F 2557

1
TOMUL 35
ian. — mar.
1976

1976 MÁJ 6

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil*

Membri:

Acad. I. ANTON,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Acad. D. DUMITRESCU,
Acad. CR. MATEESCU,
Acad. RADU VOINEA,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. BUZDUGAN, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Dr. ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Prof. DAN PAVELESCU,
Prof. RADU PRIȘCU,
Dr. doc. V. VISARION,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție,*
Dr. ing. C. TEODOSIU, *secretar de redacție.*

Toate comenzile externe pentru lucrările apărute în Editura Academiei R. S. România se vor adresa la: ILEXIM, Serviciul export-import carte; Serviciul export-import presă (pentru reviste) P.O. Box 2001, Calea Griviței nr. 64—66, București, oficiul poștal 12, România. În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Revistele se pot procura (direct sau prin poștă) și prin PUNCTUL DE DESFACERE din cadrul EDITURII ACADEMIEI.

REVISTA APARE DE 4 ORI PE AN

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei, str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
Calea Victoriei nr. 125, sectorul 1, București

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 35, nr. 1 — Ianuarie — martie 1/1976

SUMAR

STUDII

E. CARAFOLI, Despre profilele paletelor de turbomaşini şi ale palelor de elici . . . 3

AL. DIACON, I. SETEANU, Transportul aluviunilor în regim nepermanent. I. Efectul modificării profilului transversal al curgerii 11

ŞT. ZAREA, I. JELEV, Studiul şocului hidraulic într-o conductă sub presiune protejată cu rezervoare de aer şi castele de echilibru folosind un calculator numeric. II. Programul 23

CORNELIU I. CRĂCIUN, Creşterea capacităţii de transport a conductei dreptunghiulare prin injecţia unui al doilea fluid de viscozitate mai mică 27

A. RAICU, Lanţuri cinematice cu cinci elemente 51

SERGIU-BORIS CONONOVICI, Simularea pe calculatorul electronic, instrument în studiul mecanismelor complexe 57

MIRCEA RADEŞ, Efectul neliniarităţilor asupra diagramelor polare ale răspunsului în frecvenţă al structurilor 73

RADU AGENT, TUDOR POSTELNICU, VOICU MAGER, EMIL LERNER, Calculul rigidităţilor diafragmelor pline şi cu goluri la clădiri etajate. II 93

VIOREL POP, AUGUSTIN POPA, VLADIMIR FOSTI, Influenţa forţei axiale asupra deplasărilor grinzii de fundare pe mediu elastic 113

VLAD ULMANU, DUMITRU RAŞEEV, Determinarea momentului optim de înşurubare a racordurilor speciale 119

HO DINH TUNG, Contribuţii la stabilirea şi rezolvarea ecuaţiei diferenţiale neliniare a sistemelor hidraulice de copiat folosind calculatorul numeric 137

V. GIURGIUŢIU, Aplicarea metodei elementului finit în analiza structurilor cu neliniaritate geometrică. II. Regim dinamic 147

RECENZII. 157

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtár
U36/1978

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI KÖNYVTÁR
1848

DESPRE PROFILELE PALETELOR DE TURBOMAŞINI ŞI ALE PALELOR DE ELICI

de E. CARAFOLI
Institutul de mecanică a fluidelor şi construcţii aerospaţiale

În prezentul articol se fac unele consideraţii asupra profilelor care se utilizează în construcţia paletelor de turbomaşini sau a palelor de elici.
Se indică modul de trasare a unor profile speciale cu „vîrf rotunjit", care prezintă anumite avantaje mecanice pentru a fi utilizate în acest scop.

1. CONSIDERAŢII INTRODUCTIVE

În numărul 2, 1975 al revistei S.C.M.A., ing. Gh. Zidaru a publicat un articol sub titlul „Caracteristicile geometrice ale profilelor".

Apreciem că această lucrare este foarte utilă pentru toţi cei care au de studiat, sub aspectul caracteristicilor mecanice şi aerodinamice, paletele de turbomaşini sau palele de elici, iar în anumite cazuri chiar profilele aripilor de anumită formă, impusă de consideraţii constructive; întrucît autorul se ocupă şi de „profilele Carafoli", voi adăuga cîteva precizări în acest sens, necesare pentru lămurirea proprietăţilor geometrice, mecanice şi aerodinamice ale acestor profile. Mă voi ocupa mai ales de acele aspecte care nu sînt prinse în lucrarea sus-amintită şi care au făcut obiectul unor numeroase studii în ţară şi în străinătate. Voi menţiona în special şcoala de la Timişoara [1]), care s-a ilustrat prin cercetări deosebite în studiul paletelor de turbine.

Avînd în vedere deci diversele aplicaţii în acest sens, voi încerca în cele de mai jos să dau într-o formă simplă caracteristicile principale ale unor astfel de profile, în special ale acelora cu „vîrful rotunjit". În acest scop vom considera două sisteme de axe, $O\xi\eta$, respectiv, Oxy, pe care le vom suprapune (fig. 1), şi fie ζ şi Z variabilele complexe în cele două plane

$$\zeta = \xi + i\eta, \qquad Z = x + iy. \tag{1}$$

Mai departe vom considera în planul ζ un cerc de rază $\overline{MQ} = R$, pe care îl vom denumi „cerc generator". Fie acum o funcţie de transformare $Z = Z(\zeta)$, care transformă cercul generator din planul ζ într-un profil aerodinamic din planul Z, aceste două plane fiind suprapuse din motive geometrice.

[1]) Sub conducerea profesorilor A. Bărglazan, I. Anton, O. Popa, E. Sisak.

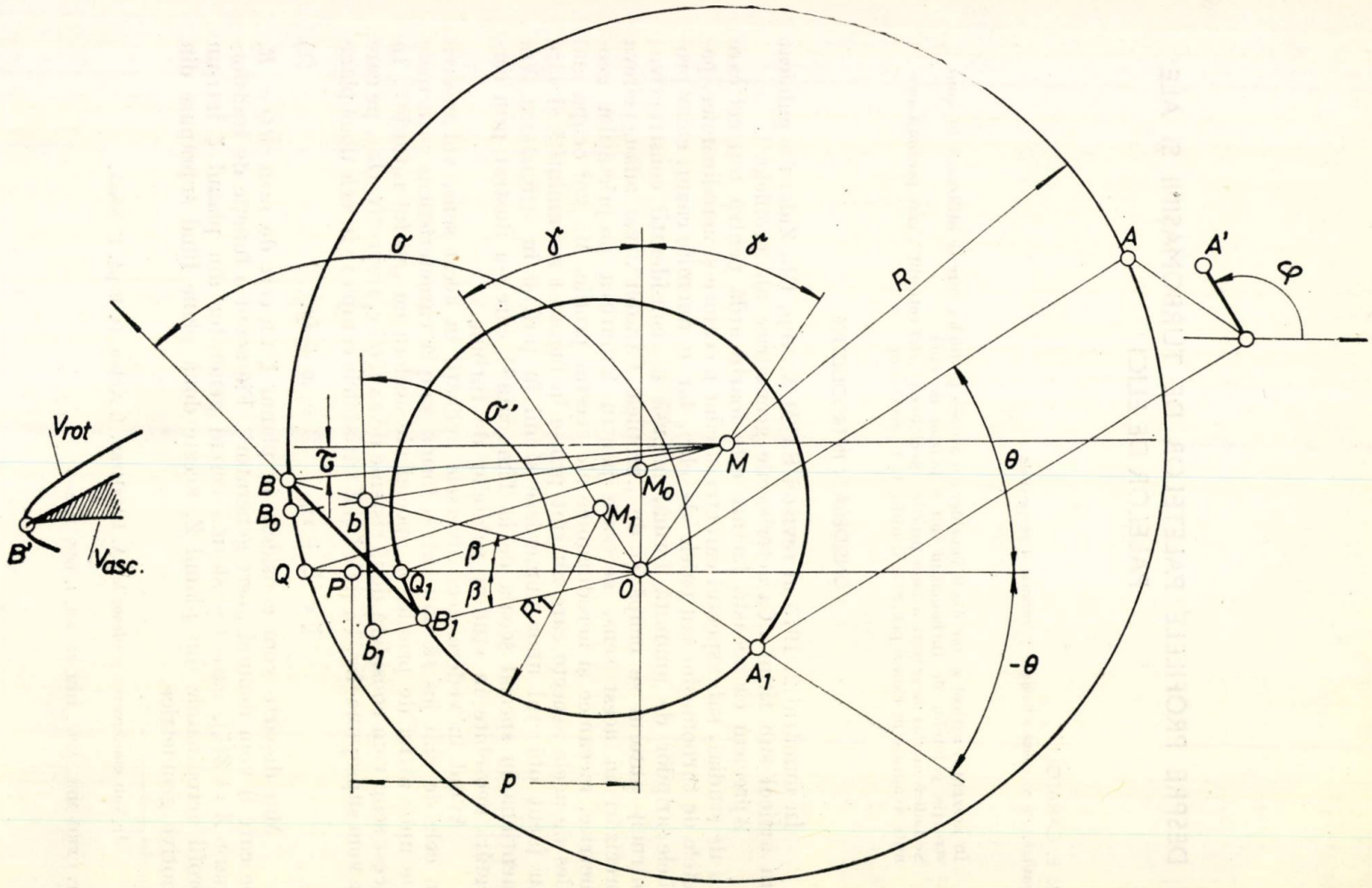


Fig. 1

Funcția $Z = Z(\zeta)$ se dezvoltă în general într-un număr oarecare de termeni; putem, totuși, fără a-i restrînge generalitatea, s-o limităm la următoarea formă simplă și practică

$$Z = \zeta + \frac{p^2}{\zeta} + \frac{p_n}{\zeta^n}, \quad p_n = a_n + ib_n \quad (n = 2; 3; 4), \tag{2}$$

care ne dă o multiplă infinitate de profile ce acoperă un cîmp larg de aplicații curente. Această funcție trebuie însă să satisfacă condiția ca rădăcinile derivatei sale,

$$\frac{dz}{d\zeta^n} = 1 - \frac{p^2}{\zeta^n} - \frac{np_n}{\zeta^{n+1}}, \tag{3}$$

să fie cuprinse toate în interiorul cercului, afară de un număr finit de rădăcini, care pot fi pe cerc și care reprezintă vîrfuri ascuțite pe profil. Pentru profilele obișnuite există un singur vîrf ascuțit, care corespunde *bordului de fugă* al profilului. Dacă expresia de mai sus nu se anulează în nici un punct pe cerc, iar una din rădicinile sale se află totuși foarte apropiată de conturul cercului generator, acest punct va constitui bordul de fugă cu *vîrf rotunjit*.

Mai departe, să considerăm un alt punct, Q_1 spre exemplu, pe axa absciselor, prin care trece cercul rezultat din funcția de transformare $\zeta_1 = \zeta_1(\zeta)$, ce se numește o *inversiune*,

$$\zeta_1 = \frac{p^2}{\zeta}, \quad (\overline{OQ} \cdot \overline{OQ_1} = p^2) \tag{4}$$

și care transformă cercul generator în cercul M_1, de rază $\overline{M_1Q_1} = R_1$; astfel, primii doi termeni din membrul al doilea al expresiei (1)

$$Z_1 = \zeta + \zeta_1 = \zeta + \frac{p^2}{\zeta} \tag{5}$$

formează un *contur de bază*, la care se va adăuga și ultimul termen pentru a obține profilul definitiv, pe care îl căutăm.

Se poate ușor arăta că raza R_1 a cercului M_1, generat de inversiunea (4), este dată de relația

$$R_1 = \frac{R}{R^2 - m^2}, \quad m = \overline{OM}, \tag{6}$$

iar centrul său M_1 se află pe o paralelă Q_1M_1 la QM sau la intersecția dreptei Q_1M_1 cu OM_1, simetrică lui OM față de axa $O\eta$.

---

[2]) Termenul $n = 1$ este reprezentat prin termenul al doilea din membrul al doilea al expresiei (2).

Reluînd mai departe raționamentul din lucrările noastre anterioare [3], [5], [7], vom nota cu B punctul de pe cercul generator, unde derivata (3) se anulează, sau are o valoare foarte mică, și unde, prin urmare, viteza trebuie să fie nulă; iar cu B_1 transformatul punctului B, care cade pe cercul M_1, după relația (4), și care, la rîndul său, este transformatul cercului generator M după aceeași relație.

2. TRASAREA PROFILELOR

Cu aceste elemente geometrice, care reprezintă caracteristicile specifice ale acestui tip de profil considerat mai sus, vom da mai jos, în linii generale, trasarea lor. Trecînd peste detalii, care se găsesc în lucrările noastre anterioare, va trebui să determinăm mai departe termenul al treilea din (1), astfel încît să satisfacă relația (3). Vom da mai jos modulul și argumentul acestui termen, după cum profilul este cel obișnuit cu *vîrf ascuțit* sau cel cu *vîrf rotunjit*.

a) *Profilul cu vîrf ascuțit.* Din condiția (3) rezultă foarte ușor

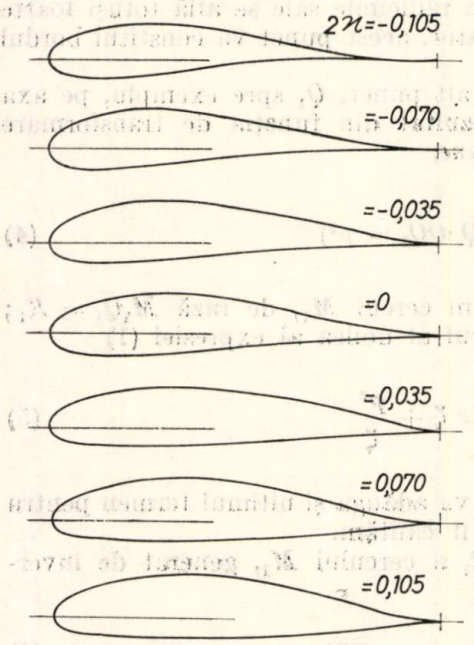


Fig. 2

$$\left|\frac{p_n}{\zeta^n}\right| = (-1)^n \frac{\overline{B_1B}}{n}\left(\frac{\overline{OB}}{\overline{OP}}\right)^n, \qquad (7a)$$

$$\varphi_n = \sigma - n\gamma - n\theta, \qquad (7b)$$

unde P este un punct oarecare pe cercul generator, căruia îi căutăm corespondentul său P' pe profil, prin însumarea celor trei termeni din (2). În același mod găsim punctul B' care reprezintă *vîrful ascuțit* al profilului.

Aceste profile cu vîrf ascuțit nu pot fi utilizate în scopul menționat mai sus, decît dacă, cu ajutorul parametrului $\overline{QQ_1}/p$ putem să ajungem la o grosime suficientă pentru a elimina vibrațiile și a îmbunătăți rezistența lor la vîrf. În acest sens am reprodus în figura 2 o serie de 7 profile, avînd toate aceleași caracteristici geometrice și aerodinamice, în afară de distribuția grosimii, care, pe lîngă parametrul $\overline{M_0M}/p$, depinde și de $\overline{QQ_1}/p$. Fiecare profil depinde de acest parametru după cum urmează

$$2\varkappa = \frac{\overline{QQ_1}}{p} = -0{,}105\ ;\ -0{,}07\ ;\ -0{,}035\ ;\ 0\ \ 0{,}035\ ;\ 0{,}07\ ;\ 0{,}105.$$

Se vede că abia de la un anumit profil, cele care urmează pot fi convenabile scopului propus la început. În ceea ce privește arcuirea, aceasta poate fi mărită după cerință, lăsînd grosimea aleasă nemodificată.

b) *Profile cu vîrf rotunjit.* Aceste profile sînt cu adevărat indicate pentru aplicații în scopul menționat mai sus. Derivata (3) nu se anulează în punctul B și în nici un punct de pe cerc. Cel mai apropiat punct din interior, în care se anulează această derivată este punctul b; iar punctul B de pe cerc, care corespunde punctului B' de pe profil, reprezintă un bord de fugă rotunjit. Teoretic se demonstrează că în B_0, cel mai apropiat punct de b, are loc curbura cea mai mare a profilului în care viteza trebuie să fie nulă; în orice altă parte curentul s-ar desprinde. Totuși, în mod practic, punctul de viteză nulă poate fi considerat în B, deoarece pe extrados, în apropiere de vîrf, curentul se desprinde mai devreme și, din această cauză, totul se petrece ca și cum punctul de viteză nulă ar fi plasat mai spre extrados, în B. Construcția profilului este aceeași, însă modulul și argumentul termenului trei din (1) sînt, respectiv,

$$\left|\frac{p'_n}{\zeta^n}\right| = (-1)^n \frac{\overline{b_1 b}}{n}\left(\frac{\overline{Ob}}{\overline{OP}}\right)^n, \tag{8a}$$

$$\varphi'_n = \sigma' - n\gamma - n\theta, \tag{8b}$$

unde P este același punct de pe cercul generator, corespondentul lui P' pe noul profil, iar B' (vîrful rotunjit) corespunde lui B de pe cerc. În punctul b derivata (3) se anulează, iar mărimea $\overline{Bb}$ definește gradul de rotunjire exprimat, ca cel mai indicat parametru, prin relația

$$k = \frac{\overline{Bb}}{p}. \tag{9}$$

În figura 3 am reprezentat un număr de cinci profile cu k variabil, avînd însă aceleași caracteristici geometrice și aerodinamice, în afară de gradul de rotunjire definit de k:

$k = 0$; 0,0175; 0,035; 0,0525; 0,07.

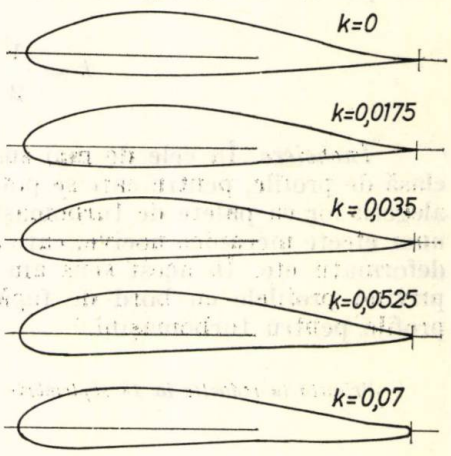


Fig. 3

Caracteristicile geometrice și aerodinamice sînt aceleași ca și pentru profilul cu vîrf ascuțit: axa de portanță nulă, dubla arcuire, grosimea și legea de distribuție, unghiul τ etc.

c) *Caracteristicile geometrice și aerodinamice.* Luînd mărimea p ca unitate de măsură, care caracterizează dealtfel și scara epurii, deoarece coarda profilului este de 4 ori p ($c \simeq 4p$), parametrii de mai jos definesc aceste caracteristici:

1. $\overline{OM_0}/p$ și poziția punctului B față de Q, adică unghiul β, determină arcuirea anterioară majoră și, respectiv, arcuirea posterioară a profilului rezultat, care este astfel un profil cu dublă arcuire;

2. $\overline{M_0M}/p$ și $\overline{QQ_1}/p$ determină grosimea profilului și legea sa de distribuție de-a lungul corzii;

3. Unghiul τ este proporțional cu coeficientul de moment la portanță nulă,

$$C_{m0} = -\frac{\pi}{2}\tau. \tag{10}$$

Coeficientul C_{m0} are o mare importanță, întrucît pentru un unghi τ mare, deci C_{m0} mare, s-ar putea să apară torsiuni inadmisibile pentru paletele de turbomașini sau pentru palele de elici.

4. BI este axa de portanță nulă.

d) *Cazul profilului cu doi termeni* ($p_n \equiv 0$). În acest caz, punctul de pe cerc, unde viteza este nulă, cade în Q. Pe de altă parte, derivata (3) se anulează în punctul P și obținem profilul rezultat din funcția de transformare simplă cu doi termeni

$$Z = \zeta + \frac{p^2}{\zeta}, \tag{11}$$

deci aceeași funcție de transformare ca și profilul Jucovski cu vîrf ascuțit, însă profilul are acum un vîrf rotunjit, de gradul

$$k = \frac{1}{2}\frac{\overline{QQ_1}}{p} = \frac{\overline{PQ}}{p}. \tag{12}$$

Încheiere. În cele de mai sus am încercat să reamintesc o anumită clasă de profile, pentru care se pot stabili unele criterii generale în vederea alegerii lor ca palete de turbomașini și pale de elici, în scopul eliminării unor efecte mecanice nocive, care apar la bordul de fugă: vibrații, fisurări, deformații etc. În acest sens am dat la sfîrșit o bibliografie mai amplă privind profilele cu bord de fugă rotunjit și aplicațiile lor în rețele de profile pentru turbomașini.

Primită la redacție la 19 septembrie 1975

BIBLIOGRAFIE PRIVIND PROFILELE CU VÎRF ROTUNJIT

1. E. Carafoli, *Méthode générale pour le tracé des profils d'aviation*, C.R.A.S. de Paris, **185** (1927).
— *Sur les profils aérodynamiques de forme générale*, C.R.A.S. de Paris, **185** (1927).
2. E. Carafoli, *Recherches expérimentales sur les ailes monoplanes*, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, Gauthier-Villars, Paris, 1932.
3. M. I. Brennan, A. C. Stevenson, *Simplified Two-Dimensional Airfoil Theory*, Aircraft Engineering, **XVIII** (1946).

4. E. Carafoli, *Aerodinamica*, Edit. tehnică, 1954.
— *Tragflügeltheorie*, Verlag Technik, Berlin, 1954.
— *Aerodinamika krîla samoleta*, Izdstvo Akademii Nauk SSSR, Moskva, 1956.
5. Wlodzimiers Prosnak, *Theory of Two-Dimensional Aerofoil with Jet Flap*, Nadbitka Z Archiwum Mechariki Stosowaneg, **X** (1958).
6. N. L. Ghosh, H. R. Chatterjee, *Resistance in Potential Flow with Circulation*, II. *Symmetrical Carafoli and Joukowski Aerofoils*, Proceedings of the National Institute of Sciences of India, Vol. 26, A., No. 6, 1960.
7. O. Popa, *Asupra geometriei profilelor Carafoli utilizate în construcția rețelelor hidrodinamice*, St. cerc. științe tehnice, **VI**, *3—4* (1959).
— *Rețele de profile Carafoli*, St. cerc. științe tehnice, **VII**, *3—4* (1960).
8. E. Sisak, O. Popa, *Studiul teoretic și experimental al profilului Carafoli* MHTC 04.04.10, St. cerc. științe tehnice, **X**, *2* (1963).
9. I. Anton, O. Popa, *Caracteristicile cavitaționale ale unei rețele de profile cu bordul de fugă rotunjit* (profile Carafoli), St. cerc. științe tehnice, **X**, *2* (1963).
10. L. M. Milne-Thomson, *Theoretical Aerodynamics*, Mac Millan, London, 1966.
11. I. Anton, O. Popa, *Incipiența fenomenului de cavitație în mișcări plane și periodice*, St. cerc. mec. apl., **27**, *4* (1968).
12. P. Rebuffet, *Aérodynamique expérimentale*, 1969.
13. Gh. Zidaru, *Caracteristicile geometrice ale profilelor*, St. cerc. mec. apl., **34**, *2* (1975).
14. L. M. Milne—Thomson, *Theoretical Aerodynamics*, Fourth Edition London, MacMillan, 1966.

TRANSPORTUL ALUVIUNILOR ÎN REGIM NEPERMANENT. I. EFECTUL MODIFICĂRII PROFILULUI TRANSVERSAL AL CURGERII

AL. DIACON şi I. SETEANU
Institutul politehnic Bucureşti

În lucrare se prezintă un procedeu de obţinere a modificărilor în timp ale patului albiei unui rîu în condiţiile transportului de aluviuni în regim nepermanent. Se folosesc ecuaţiile lui Saint-Venant şi ale transportului de sediment scrise în diferenţe finite şi rezolvate cu ajutorul calculatorului electronic în limbajul de programare PL/1 prin folosirea conceptului de pseudo-viscozitate al lui Lax.

1. INTRODUCERE

Un rîu, pe lîngă funcţia sa principală de transport al apelor provenite din scurgere şi drenare, mai are şi o altă funcţie — de transport al aluviunilor, care se manifestă la o scară de timp mai largă. Detritusul rezultat din erodarea albiei este transportat treptat spre nivelul de bază al curgerii. Problemele legate de eroziunea, transportul şi depozitarea sedimentelor constituie unul dintre cele mai dificile şi mai puţin studiate capitole ale hidraulicii, în special datorită numărului mare de parametrii care influenţează fenomenul de transport şi datorită dificultăţilor de cercetare experimentală legate de scările mari ale geometriei procesului şi ale timpului de desfăşurare. Controlul rîurilor aluvionare pentru scopurile navigaţiei, asigurarea stabilităţii taluzurilor, sedimentarea în lacurile de acumulare etc., sînt numai cîteva probleme de mare importanţă economică legate de fenomenul de transport al aluviunilor.

Profilul în lung al rîurilor, definit pe linia talvegului este rezultatul proceselor de eroziune, transport şi depunere, iar schimbările de pantă sînt provocate de modificările topografice şi geomorfologice ale terenului. La rîndul său, mişcarea aluviunilor este strîns dependentă de schimbările în timp ale debitelor solid şi lichid. Pe de altă parte, modificările survenite în profilul transversal al albiei datorită unor lucrări artificiale (baraje, îndiguiri, lărgiri ale albiei pentru scopurile navigaţiei etc.) au ca rezultat modificarea echilibrului natural al curgerii şi deplasarea spre o nouă stare de echilibru prin efectul cumulat al proceselor de eroziune, transport şi depozitare [1]. Noua stare de echilibru poate fi avantajoasă pentru programul de regularizare al cursului de apă, dar poate să producă adesea efecte nedorite care să reclame protecţii de maluri sau operaţii ulterioare de dragare. Deoarece aceste măsuri sînt, în general, costisitoare

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 35, NR. 1, 1976, P. 11—22

și de lungă durată, este de o mare importanță economică să se poată cunoaște de la început efectul acțiunilor de regularizare asupra profilului în lung al rîului pentru a se putea adopta soluția cea mai potrivită și din punct de vedere hidraulic.

2. ECUAȚIILE CURGERII UNIDIMENSIONALE NEPERMANENTE

Vom admite că mișcarea este unidimensională și rectilinie, iar distribuția presiunii pe verticală este practic hidrostatică. Aceste ipoteze sînt general admise în dinamica rîurilor. Vom considera, de asemenea, că granulele de sediment transportate au practic același diametru, egal cu diametrul granulei medii [2].

Pentru debitul lichid au loc relațiile clasice din dinamica rîurilor (ecuațiile lui Saint-Venant)

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial V}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + g \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = R, \tag{1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + V \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + h \cdot \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

unde V este viteza medie de curgere în secțiunea transversală, h este înălțimea suprafeței libere față de fundul albiei pe linia talvegului, z este înălțimea fundului albiei față de un plan orizontal convențional ales, iar x este coordonata de poziționare a secțiunii transversale în profilul în lung, pornind de la o origine O convențional aleasă în amonte (fig. 1).

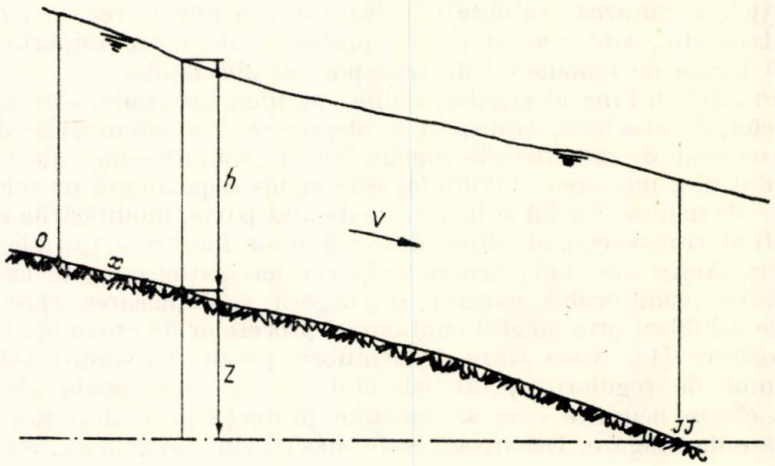


Fig. 1

În formula (1) s-a notat prin R rezistența hidrodinamică la înaintare

$$R = -\frac{g \cdot V \cdot |V|}{C^2 \cdot h}, \tag{3}$$

unde C este coeficientul lui Chézy. Formula (2) reprezintă ecuația de continuitate. Vom neglija variațiile locale în timp ale înălțimii h

$$q = V \cdot h = \text{const}(t). \tag{4}$$

Pentru debitul solid ecuația dinamică se scrie :

$$s = f(V, p_1, p_2, \ldots), \tag{5}$$

unde s-a notat cu s debitul volumetric de sediment transportat pe unitatea de lățime, iar p_1, p_2,... sînt parametrii care, pe lîngă viteza de curgere, pot influența mărimea debitului de sediment transportat (de exemplu, diametrul mediu al granulelor, panta topografică a albiei, greutatea specifică a granulelor etc.). Ecuația de continuitate a transportului de sediment este

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial s}{\partial x} = 0, \tag{6}$$

exprimînd relația existentă între eroziunea albiei și creșterea debitului de aluviuni transportate. Expresia concretă a funcției f în formula (5) este cunoscută doar parțial, existînd în literatură un număr mare de relații propuse, dar fără un consens unanim [5]. În această lucrare vom folosi formula lui Engelund-Hansen [3] :

$$\frac{s}{D^{3/2}\sqrt{g \cdot \Delta}} = 0{,}084 \left(\frac{h \cdot i}{\Delta \cdot D}\right)^{5/2} \cdot \frac{C^2}{g}, \tag{7}$$

în care D reprezintă diametrul granulei medii, Δ este greutatea specifică relativă medie a sedimentului, iar i este panta topografică a albiei.

3. VITEZA DE TRANSMITERE A PERTURBAȚIILOR

Sistemul de ecuații (1), (2), (5), (6) se poate rezolva în raport cu derivatele parțiale V_t, V_x, h_t, h_x, z_t, z_x dacă observăm că se formează următoarea ecuație matriceală :

$$A \cdot D_0 = B, \tag{8}$$

unde s-a notat

$$D_0 = (V_t, V_x, h_t, h_x, z_t, z_x)^T, \tag{9}$$

$$B = (R, 0, 0, \mathrm{d}V, \mathrm{d}h, \mathrm{d}z)^T, \tag{10}$$

iar A este o matrice 6×6 nesingulară în general. Ecuația (8) se poate inversa

$$D_0 = A^{-1} \cdot B \tag{11}$$

fiind posibil prin aceasta să se rezolve problema cu date inițiale. După cum se știe, liniile geometrice pentru care matricea A este singulară se numesc *linii caracteristice* și se obțin prin anularea determinantului matricei A :

$$-c^3 + 2 \cdot V \cdot c^2 + (g \cdot h - V^2 + g \cdot f_v) \cdot c - V \cdot g \cdot f_v = 0. \tag{12}$$

În formula (12), c reprezintă viteza de deplasare a perturbațiilor

$$c = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}. \tag{13}$$

Ecuația (12) admite trei soluții, două dintre ele fiind vitezele de transmitere a perturbațiilor la suprafața liberă spre amonte și aval care se exprimă în absența transportului de sediment ($f = 0$) cu formulele bine cunoscute

$$c_{1,2} = V \pm \sqrt{g \cdot h}, \tag{14}$$

$$c_3 = 0,$$

iar viteza de transmitere a perturbațiilor în patul albiei este dată, într-o primă aproximație, de formula

$$c_3 = -\frac{V \cdot g \cdot f_v}{V^2 - g \cdot h}. \tag{15}$$

O analiză generală [4] arată că pentru sistemul (8) liniile pe care pot exista discontinuități de prima speță sînt în mod necesar linii caracteristice. În transcriere adimensională formula (15) devine :

$$\frac{c_3}{V} = -\frac{\psi}{F - 1},$$

$$\psi = \frac{f_v}{h_x}, \quad \psi = \frac{f_v}{h'} \tag{16}$$

$$F = \frac{V^2}{g \cdot h},$$

iar F este numărul Froude al mișcării. Pentru curgeri subcritice lente, dacă aproximăm formula lui Engelund-Hansen prin relația

$$s = a \cdot V^b, \tag{17}$$

obținem din expresia (16)

$$\frac{c_3}{V} = b \cdot \frac{s}{q}, \tag{18}$$

care arată că viteza de transmitere a perturbațiilor în profilul longitudinal al albiei este mult mai mică decît viteza de curgere a debitului lichid, întrucît $s \ll q$.

Pentru un regim de curgere cvasipermanent, combinînd formulele (1), (3), (4), (6) și (15) putem scrie relația

$$\frac{\partial z}{\partial t} + c_s \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{R \cdot f_v}{\frac{g \cdot q}{V^2} - V}, \tag{19}$$

în care am notat prin c_s „celeritatea" sedimentului, adică viteza de transmitere a perturbației în patul albiei:

$$c_s = \frac{g \cdot f_v}{\frac{g \cdot q}{V^2} - V}. \tag{20}$$

Cunoscînd mărimea vitezei $V(x, t)$ se poate efectua integrarea ecuației (19), obținînd profilul longitudinal al albiei la diverse momente de timp. Pe de altă parte, dacă se cunoaște profilul în lung al albiei, se poate determina mărimea vitezei prin integrarea ecuației

$$\frac{\partial V}{\partial x}\left(V - \frac{g \cdot q}{V^2}\right) + g \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{g \cdot V^3}{C^2 \cdot q} \tag{21}$$

dacă se impun condiții adecvate în amonte și aval.

4. SCHEMA ÎN DIFERENȚE FINITE

Transcrierea directă în diferențe finite a ecuației generale de conservare,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\{A(u, x)\} = 0, \tag{22}$$

dată de expresia

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} + \frac{A_{j+1}^{n+1} - A_{j-1}^n}{2 \cdot \Delta x} = 0, \tag{23}$$

constituie o schemă instabilă [7]. În 1954, Lax a propus introducerea unui „stabilizator", transcriind ecuaţia (22) sub forma [6]

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\Delta t} + \frac{A_{j+1}^n - A_{j-1}^n}{2 \cdot \Delta x} = 0, \tag{24}$$

obţinînd o schemă stabilă în anumite condiţii. Pentru ecuaţia (19) condiţia lui Lax se scrie

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} < \frac{1}{|c_{s_{\min}}|} \tag{25}$$

în cazul unei reţele echidistante de pas Δx. Din punct de vedere fizic, schema lui Lax corespunde introducerii unui termen de „pseudoviscozitate" care netezeşte discontinuităţile şi asigură stabilitatea soluţiei. Pentru a nu perturba situaţia fizică modelată, termenul de pseudoviscozitate, care pentru ecuaţia (19) are forma

$$\frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot \Delta t} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \tag{26}$$

trebuie să fie menţinut cît mai mic posibil. Întrucît condiţiile (25) şi (26) sînt contradictorii, este necesar să se facă un compromis între precizia cu care ecuaţia (24) aproximează fenomenul fizic şi stabilitatea pe care o conferă soluţiei introducerea termenului de pseudoviscozitate.

În lucrarea de faţă folosim o schemă Lax îmbunătăţită de forma

$$\frac{u_j^{n+1} - \left\{\frac{\alpha}{2} \cdot u_{j+1}^n + (1 - \alpha) \cdot u_j^n + \frac{\alpha}{2} \cdot u_{j-1}^n\right\}}{\Delta t} + \frac{A_{j+1}^n - A_{j-1}^n}{2 \cdot \Delta x} = 0, \tag{27}$$

pentru care se deduce următoarea condiţie :

$$\left(c_s \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 < \alpha < 1.$$

Putem accepta, în mod uzual, estimarea

$$\beta = \alpha - \left(c_s \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \approx 10^{-2}. \tag{28}$$

Avantajul schemei lui Lax îmbunătăţite (27) faţă de schema (24) constă în posibilitatea de a se alege valoarea lui α în cadrul limitelor admise astfel încît condiţia (28) să fie local satisfăcută, fără a se mai impune o condiţie de ansamblu de genul formulei (25).

5. METODA APROXIMAŢIILOR SUCCESIVE ŞI CALCULUL DEBITULUI MEDIU

Întrucît modificările patului albiei sînt mai lente decît mişcarea nepermanentă a suprafeţei libere se pot rezolva, într-o primă aproximaţie, ecuaţiile lui Saint-Venant pentru un profil longitudinal al patului albiei cunoscut şi presupus fix — prin urmare, se obţine soluţia ecuaţiei (21) în care z este o funcţie cunoscută. În continuare, se determină evoluţia în timp a profilului longitudinal luînd în considerare transportul nestaţionar de aluviuni, soluţionîndu-se ecuaţia (19), unde V este o funcţie cunoscută obţinută în prima etapă de calcul. Se poate admite un regim staţionar de curgere gradual-variată corespunzînd debitului mediu de lichid în perioada de timp Δt în prima etapă de calcul şi un interval de timp suficient de mare (circa 15 zile) pentru a doua etapă de rezolvare a problemei.

Soluţia ecuaţiei (19) se obţine prin utilizarea schemei lui Lax perfecţionate. Ecuaţia (21) se rezolvă după transcrierea sa în diferenţe finite. Debitul de lichid se cunoaşte din analiza hidrografului curgerii. Se obţine un sistem de ecuaţii algebrice :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_m = \frac{g \cdot \left(- \frac{B_m \cdot V_m^3}{C^2 \cdot Q} - \frac{z_{j+1} - z_j}{\Delta x} \right)}{V_m - \frac{g \cdot Q}{B_m \cdot V_m^2}} \qquad (j = 1, \ldots, jj), \qquad (29)$$

în care m este un punct situat la mijlocul distanţei între nodurile j şi $j + 1$, iar B_m se determină din formula

$$B_m = \frac{B_j + B_{j+1}}{2}. \qquad (30)$$

Acest sistem de ecuaţii se rezolvă succesiv, pornind din bieful aval, unde admitem că, la o distanţă suficient de mare de sectorul studiat, are loc o curgere uniformă de viteză

$$V_0 = \frac{Q}{B_0 \cdot h_0}, \qquad (31)$$

şi de adîncime de curgere

$$h_0 = \left(\frac{Q}{C \cdot B_0 \sqrt{i_0}} \right)^{2/3}. \qquad (32)$$

MÜSZAKI EGYETEM 1848

Sedimentul transportat este dat de relația

$$S = a \cdot B \cdot V_0^5, \tag{33}$$

$$a = 0{,}084/(C^3 \cdot \Delta^2 \cdot D \cdot \sqrt{g}). \tag{34}$$

Derivata $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_m$ în formula (29) se calculează printr-un procedeu de aproximări succesive („predictor — corrector method"), admițind mai întîi în membrul drept estimarea :

$$V_m = V_{j+1},$$

iar apoi calculînd mai exact pe V_j cu formula

$$V_j = V_{j+1} - \Delta x \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_m.$$

Urmează apoi a doua estimare

$$V_{m1} = (V_j + V_{j+1})/2,$$

care permite reevaluarea derivatei în formula (29) :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{cor} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_m + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{m1}\right],$$

unde $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{m1}$ se obține din formula (29) înlocuind V_m cu V_{m1}. În continuare se poate calcula viteza în nodul amonte adiacent :

$$(V_j)_{cor} = V_{j+1} - \Delta x \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{cor}. \tag{35}$$

Procedeul se poate repeta de mai multe ori, dar practic sînt suficiente trei iterări succesive.

Pentru determinarea profilului longitudinal al patului albiei se alege extremitatea aval a sectorului studiat ca origine de referință :

$$z_{jj}^n = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{36}$$

Pentru extremitatea amonte vom presupune că

$$z_0^{n+1} = z_0^n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{37}$$

Condiția (37) este echivalentă cu supoziția că variațiile lunare ale debitului de lichid dau perturbații ale patului amonte care nu pot modifica procesul de sedimentare în sectorul dat. Abaterile de la această condiție nu alterează rezultatele dacă este îndeplinită condiția

$$L > c_{s_m} \cdot T, \tag{38}$$

unde c_{s_m} este celeritatea medie care corespunde debitului de lichid ce realizează transportul mediu de aluviuni („dominant discharge"). Acest debit se poate calcula cu formula

$$Q_{dd} = \left(\frac{1}{T} \Sigma Q_j^{5/3} \cdot T_j \right)^{3/5}. \tag{39}$$

În formula (39) T_j reprezintă perioada în care debitul mediu este Q_j, iar T este timpul total. Această formulă este o consecință a relației (33). Viteza medie care corespunde curgerii uniforme pentru debitul Q_{dd} este

$$V_{dd} = \left(\frac{Q_{dd} \cdot C^2 \cdot i}{B} \right)^{1/3}, \tag{40}$$

iar celeritatea medie se obține din formula (18) sub forma

$$c_{dd} = \psi_{dd} \cdot V_{dd}, \tag{41}$$

unde, pentru $b = 5$, s-a notat

$$\psi_{dd} = 5 \cdot \frac{s_{dd}}{q_{dd}}.$$

6. EXEMPLU DE CALCUL

S-a aplicat metoda de calcul numeric prezentată mai sus la determinarea evoluției profilului longitudinal al unei albii care înainte de începerea analizei poseda o zonă lărgită, iar apoi, la momentul inițial, a fost îngustată prin îndiguire (fig. 2). S-au considerat 57 de secțiuni longitudinale a cîte 100 de metri fiecare, iar intervalul de timp între două iterații s-a ales DELTAT = 15 zile. Coeficientul lui Chézy s-a presupus constant și egal cu 40,0 m/s. Panta topografică a albiei în amonte și aval de sectorul studiat s-a presupus constantă și egală cu $i = 5 \cdot 10^{-5}$

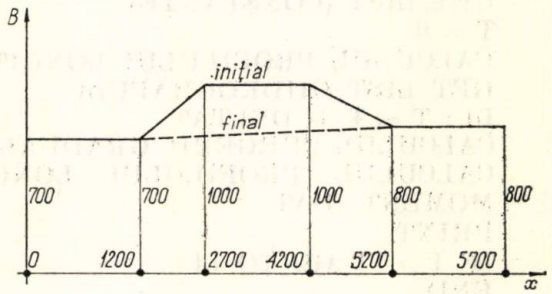


Fig. 2

Timpul total de calcul s-a luat egal cu circa un an, TT=359 zile. În formula (34) s-a ales $\Delta = 1{,}65$, iar diametrul mediu D al granulelor s-a presupus egal cu 0,4 mm, rezultînd $a = 39 \cdot 10^{-5}$. Lăţimile iniţiale şi finale ale albiei sînt indicate în figura 2.

Hidrograful curgerii s-a ales conform tabelului 1.

Tabelul 1

Luna	Zilele	Debitul (m^3/s)	Luna	Zilele	Debitul (m^3/s)
Ianuarie	1 — 30	1300	Iulie	181 — 195	2150
Februarie	31 — 60	1050		196 — 210	1700
Martie	61 — 90	1300	August	211 — 240	1700
Aprilie	91 — 105	2000	Septembrie	241 — 270	1650
	106 — 120	2800	Octombrie	271 — 285	2300
Mai	121 — 150	3050		286 — 300	1850
Iunie	151 — 165	2750	Noiembrie	301 — 330	3050
	166 — 180	2500	Decembrie	331 — 345	2650
				346 — 360	2250

Folosind formula (39) rezultă $Q_{dd} = 2120$ m³/s, $V_{med} = 0{,}625$ m/s şi $h_{med} = 4{,}85$ m, iar din formula (45) se obţine $\psi_{med} = 6{,}04 \cdot 10^{-5}$ pentru un număr Froude mediu $F_{med} = 0{,}09$. Prin urmare, se deduce $c_{med} = 3{,}27$ m/zi şi distanţa L_{min} din formula (38) este $L_{min} = 1177{,}20$ m. După cum se vede din figura 2, am admis acoperitor $L = 1200$ m. Coeficientul de pondere α folosit în schema lui Lax îmbunătăţită va fi egal, conform formulei (28), cu expresia

$$\alpha = 0{,}01 + \left(5 \cdot \frac{S}{Q} \cdot V \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x}\right)^2 = 0{,}01 + 25 \cdot \left(k_1 \cdot S \cdot \frac{V}{Q^2}\right),$$

unde s-a notat $k_1 = 864.DELTAT$.

Pentru obţinerea rezultatelor numerice s-a elaborat un program de calcul în limbajul de programare PL/1 care prezintă avantaje deosebite în privinţa folosirii economice a memoriei calculatorului şi a simplificării instrucţiunilor de intrare-ieşire. O formă simplificată a organigramei de calcul utilizată este indicată în cele ce urmează.

```
DECLARE (J, JJ, DELTAT, T, TT, IT)
GET LIST (JJ)
BEGIN
DECLARE (B, X, Z, ZN, CONSTANTE)
GET LIST (CONSTANTE)
T = 0
CALCULUL PROFILULUI LONGITUDINAL INITIAL
GET LIST (HIDROGRAFUL)
L1 : T = T + DELTAT
CALCULUL CURGERII GRADUAL VARIATE
CALCULUL PROFILULUI LONGITUDINAL LA UN
MOMENT DAT
PRINT
IF T > TT GO TO L1
END
DATELE
```

Folosirea instrucţiunii BEGIN a permis utilizarea raţională a memoriei calculatorului, factor esenţial în situaţiile în care se utilizează un număr mare de date.

Pentru ilustrare, în tabelul 2 se indică selectiv rezultatele obţinute în ziua $T = 120$ în care debitul a fost $Q = 2800$ m^3/s.

Tabelul 2

X	*Z*	*H*	*HZ*
0	−0,74576	6,52305	5,77729
300	−0,75886	6,52583	5,76697
600	−0,77386	6,53007	5,75621
900	−0,78935	6,53452	5,74517
1200	−0,77342	6,47737	5,70395
1500	−0,49379	6,18026	5,68647
1800	−0,26098	5,93182	5,67084
2100	−0,06364	5,71828	5,65464
2400	0,10458	5,53259	5,63717
2700	0,24346	5,37184	5,61530
3000	0,37855	5,24784	5,62639
3300	0,38467	5,24334	5,62801
3600	0,36603	5,24339	5,60942
3900	0,34774	5,24329	5,59103
4200	0,32944	5,23973	5,56917
4500	0,29330	5,28742	5,58072
4800	0,16315	5,40152	5,56467
5100	−0,00180	5,55934	5,55754
5400	−0,01388	5,36323	5,34935
5700	0,00000	5,34998	5,34998

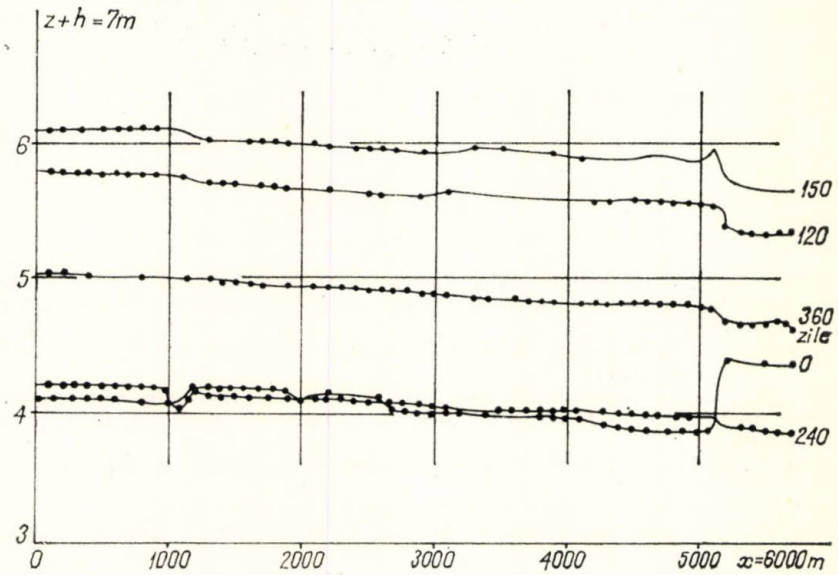


Fig. 3

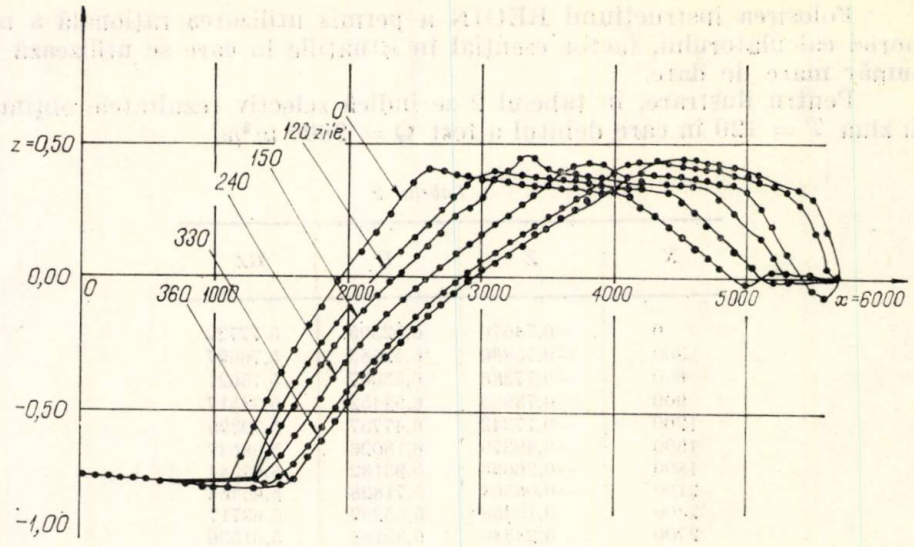


Fig. 4

În tabelul de mai sus H reprezintă înălțimea suprafeței libere deasupra patului albiei la distanța X de originea O aleasă în amonte, Z este cota liniei de talveg pentru coordonata X dată, măsurată de la un plan orizontal care trece prin extremitatea din aval a patului albiei în sectorul studiat, iar HZ este cota suprafeței libere față de acest plan.

Forma suprafeței libere la diferite momente de timp este trasată în figura 3, iar evoluția profilului în lung se redă în figura 4 la o scară deformată pe verticală.

Primită la redacție la 5 martie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. L. B. Leopold, W. B. Langbein, *The Concept of Entropy in Landscape evolution*, U.S. Geological Survey Professional Paper 500-A, Washington: U.S. Govt. Printing Office (1962).
2. H. M. Morris, J. M. Wiggert, *Applied Hydraulics in Engineering*, Ronald Press Co., New York (1971).
3. M. de Vries, *Lecture Notes on Solving River Problems by Hydraulic and Mathematical Models*, Polish Academy of Science, Institute of Hydro-Engineering, Gdansk (1969).
4. R. Courant, D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. 2, Interscience Publ., New York (1962).
5. F. M. Henderson, *Open Channel Flow*, McMillan, New York (1966).
6. R. Richtmyer, K. Morton, *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Interscience Publ., New York (1967).
7. G. E. Forsythe, W. R. Wasow, *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*, John Wiley, New York (1960).

STUDIUL ŞOCULUI HIDRAULIC ÎNTR-O CONDUCTĂ SUB PRESIUNE PROTEJATĂ CU REZERVOARE DE AER ŞI CASTELE DE ECHILIBRU FOLOSIND UN CALCULATOR NUMERIC. II. PROGRAMUL

de ŞT. ZAREA
Institutul politehnic Bucureşti
I. JELEV
Institutul de studii şi cercetări pentru îmbunătăţiri funciare, Bucureşti

Se prezintă programul, în limbaj FORTRAN IV, pentru calculul variaţiei presiunii şi debitului datorite şocului hidraulic, într-o conductă avînd tronsoane cu diametre şi grăsimi diferite, legate în serie, şi protejată cu rezervoare de aer şi castele de echilibru. Programul a fost utilizat pentru calculul unor cazuri concrete şi permite rezolvarea problemelor de interes practic referitoare la optimizarea sistemelor de protecţie a conductelor sub presiune.

1. SCOPUL LUCRĂRII

În această a doua parte a lucrării se indică datele necesare, lista variabilelor din programul de calcul, recomandări pentru completarea datelor, precum şi programul complet, în limbaj FORTRAN IV.

Pentru rezolvarea cazurilor concrete este suficient să se completeze datele de bază şi programul poate fi aplicat fără nici o modificare. Pentru a putea fi identificat, programului i s-a atribuit denumirea SOHIC-JZ.

2. INDICAŢII DE UTILIZARE A PROGRAMULUI PENTRU CALCULUL ŞOCULUI HIDRAULIC ÎNTR-O CONDUCTĂ PREVĂZUTĂ CU SISTEME DE PROTECŢIE (SOHIC–JZ)

În vederea utilizării programului pentru calculul loviturii de berbec este necesară cunoaşterea următoarelor date de bază:

1) profilul longitudinal al conductei de refulare şi nivelele apei în bazinul de aspiraţie şi refulare;

2) parametrii constructivi ai conductei: lungimi, diametre, grosimea pereţilor, natura materialului din care este executată conducta, armăturile utilizate;

3) datele referitoare la electropompele staţiei de pompare: număr de agregate, turaţia nominală, GD^2 al ansamblului rotor-pompă — rotor motor electric; curba caracteristică $H = f(Q)$; curba de variaţie a randamentului pompelor funcţie de debit, puterea nominală a fiecărei pompe.

2.1. LISTA VARIABILELOR DIN PROGRAMUL DE CALCUL

Variabilele reprezentînd datele de bază pentru programul SOHIC-JZ au următoarele semnificaţii :

ANTET — variabilă alfanumerică utilizată pentru imprimarea antetului dorit, la începutul fiecărei variante noi;
NP — numărul de secţiuni în care se împarte conducta (30) * ;
NPP — numărul de puncte prin care se exprimă caracteristica $H = f(Q)$ a pompei (30);
NPD — numărul de puncte prin care se exprimă curba de închidere a clapetei sau vanei (30);
NPH — numărul de puncte prin care se reprezintă caracteristica adimensională de volum a rezervorului de aer funcţie de cota adimensională a apei din rezervor;
NPC — numărul de puncte prin care se exprimă variaţia diametrului castelului funcţie de cotă (5);
NPC2 — numărul de secţiuni prevăzute cu castel de echilibru (28);
NPDIA — numărul de secţiuni prevăzute cu diafragmă;
NRPØMP — numărul de pompe;
NCØM; INDP — pentru algoritmul utilizat fiecare este egal cu 1;
ZAV — nivelul apei în bazinul de aspiraţie;
ZAM — nivelul apei în bazinul de refulare;
ENNØM — turaţia de regim a pompei;
GDPATR — GD^2 al ansamblului rotor pompă — rotor motor electric;
TINC — timpul de închidere a vanei;
EPNØM — puterea unei pompe, kgf. m/s;
TFIN — intervalul de timp în care se studiază fenomenul, s;
EXPØN — exponentul adiabatic sau politropic;
TICLAP — timpul de închidere a clapetei;
QCØMCLAP — valoarea debitului la care începe închiderea clapetei;
Z — cota fiecărei secţiuni de calcul a conductei faţă de nivelul din bazinul de aspiraţie;
EL — lungimea tronsoanelor de calcul ale conductei;
D — diametrul fiecărui tronson;
EGRØ — grosimea peretelui fiecărui tronson al conductei;
RK — constantă ce caracterizează materialul conductei;
HD; QD — sarcina şi debitul din curba caracteristică a pompei;
ETANØM — randamentul, din curba de variaţie a randamentului în funcţie de debit, la turaţia nominală;
HINV — sarcina pompei, din curba caracteristică $H = f(Q)$ în domeniul curgerii inverse;
QINV — debitul invers, din curba caracteristică a pompei;
DESC — valoarea adimensională a deschiderii vanei sau clapetei;
REZAJ — valoarea $M(t)$ corespunzătoare diferitelor deschideri ale vanei sau clapetei;

---

* Numărul din paranteză indică valoarea maximă a variabilei respective.

ZBH — cota bazei rezervoarelor de aer față de axa conductei;
ELHIDR — lungimea rezervoarelor de aer (considerate cilindrice și orizontale *);
VTØTH — volumele totale ale rezervoarelor de aer;
PVTØT — pentru algoritmul considerat este egal cu zero;
DPEDT — nivelul apei din rezervoarele de aer raportat la diametrele lor maxime, măsurat față de baza rezervorului;
VPEVT — volumul de apă din rezervorul de aer raportat la volumul total al acestuia;
REZHJ — modulii de rezistență hidraulică ai legăturilor rezervoarelor de aer cu conducta de refulare;
ZC — cotele care exprimă legea de variație a diametrului castelelor de echilibru (față de nivelul din bazinul de aspirație);
DFC — diametrele corespunzătoare cotelor ZC;
REZC — modulii de rezistență hidraulică ai legăturilor dintre castelele de echilibru și conducta de refulare;
QAPØRTJ — debitele aduse sau prelevate în secțiunile de calcul;
NRUG — coeficienții de rugozitate ai tronsoanelor conductei;
PDIA — numere egale ca valoare cu numărul nodului în care se află amplasată o diafragmă de calcul echivalentă cu pierderea de sarcină longitudinală.

2.2. RECOMANDĂRI PRIVIND COMPLETAREA DATELOR DE BAZĂ

Modul de completare a cartelelor rezultă din programul pentru calculator, anexat, la care se adaugă următoarele precizări și recomandări:

— secțiunii rezervorului de refulare i se atașează numărul de ordine 1, iar secțiunii clapetei și pompelor, numărul de ordine N (maximum 30), completarea tuturor datelor referitoare la conductă, rezervoare de aer și castele de echilibru făcîndu-se dinspre secțiunea 1 spre secțiunea N (această convenție este valabilă numai în referirile care se fac la completarea datelor de bază);

— în cazul unei stații de pompare prevăzută cu vane programate se recomandă a se exprima legea de închidere cu aceleași variabile ca la clapetă, perforîndu-se cifra zero în cîmpul corespunzător variabilei TINC;

— curba $H = f(Q)$ pentru domeniul curgerii directe se completează incluzîndu-se și cîteva puncte în domeniul curgerii inverse, domeniu în care Q se consideră, convențional, pozitiv:

— variabilei ETANØM (I) pentru punctul QD(I) = 0, i se va da o valoare mică, diferită de zero;

— variabila REZAJ (1) (vana sau clapeta complet deschisă) se va lua mică, dar diferită de zero;

— valorile variabilelor ZBH(I), ELHIDR(I), VTØTH(I), REZHJ(I) și REZC(I) se perforează numai în cîmpurile corespunzătoare unei secțiuni în care se află amplasat un rezervor de aer sau castel de echilibru,

* Se pot utiliza rezervoare de altă formă și cu ax vertical, dar în aceste cazuri trebuie să se precizeze în program legea de variație a volumului în funcție de nivelul apei din rezervor.

restul cîmpurilor rămînînd neperforate (de exemplu dacă în secțiunea 5 se află un rezervor de aer, numai ZBH(5), ELHIDR(5), VTØTH(5) și REZHJ(5) vor fi diferite de zero, și amplasate fiecare în al cincelea cîmp începînd de la stînga cartelei corespunzătoare;

— dacă pe conducta sub presiune nu există nici un rezervor de aer sau castel de echilibru, pentru fiecare din variabilele de mai înainte se va introduce un număr de cartele neperforate egal cu numărul de cartele necesare pentru perforarea variabilei Z(I); totodată, cartelele pe care se perforează variabilele ZC(I) și DFC (I) nu se vor introduce;

— în continuarea cartelelor pe care s-au perforat variabilele VTØTH(I) se vor introduce întotdeauna un număr de cartele neperforate egal cu numărul de cartele necesare pentru perforarea variabilelor Z(I);

— QAPØRTJ(I) se consideră negativ dacă debitul este afluent și pozitiv dacă este defluent;

— pe ultimele cartele ale setului de date de bază se vor perfora pe cîmpuri de cîte cinci coloane, numere întregi egale ca valoare cu numărul de ordine al secțiunii în care am introdus o diafragmă (de exemplu în cîmpul al treilea se va perfora cît mai spre dreapta cifra 3, dacă se dorește introducerea unei diafragme în a treia secțiune începînd dinspre rezervor); în secțiunile 1 și N precum și în cele în care se află castele de echilibru sau rezervoare de aer, nu se introduc diafragme; cîmpurile corespunzătoare unor secțiuni în care nu s-a introdus diafragmă, vor fi lăsate libere;

— variabila RK(I) este 0,5 pentru oțel, 1,0 pentru fontă, 4,4 pentru azbociment, 5,0 pentru plumb, 16...20 pentru cauciuc;

— recomandăm ca pentru variabilele DPEDT(I) și VPEVT(I) să se folosească următoarele valori: DPEDT(I) = 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1,0, iar VPEVT(I) corespunzător egal cu 0,052; 0,1424; 0,2523; 0,3735; 0,5; 0,6265; 0,7477; 0,8576; 0,94801; 1,0. În acest caz NPH = 10; cartelele care conțin variabilele DPEDT(I) și VPEVT(I) se vor introduce chiar dacă pe conducta de refulare nu este amplasat nici un rezervor de aer;

— în cadrul programului, calculele s-au efectuat pentru $V_{i,0}$ egal cu 1/5 din volumul total; dacă se adoptă altă relație se va modifica în mod corespunzător cartela 1520.

3. CONCLUZII

Programul elaborat pentru calculul mișcării nepermanente într-o conductă sub presiune permite determinarea atît a variațiilor de presiune în lungul conductei, cu și fără sisteme de protecție, cît și a variațiilor de debit și de nivel în sistemele de protecție.

Curbele rezultate, în ipotezele adoptate în lucrare, sînt similare cu cele obținute prin aplicarea altor metode de calcul.

Programul poate fi utilizat pentru optimizarea sistemelor de protecție a conductelor sub presiune, în cazul apariției șocului hidraulic (lovitură de berbec).

Primită la redacție la 18 martie 1974

```
      C     PROGRAM PENTRU CALCULUL MISCARII PERMANENTE IN CONDUCTELE SUB
      C     PRESIUNE ALE STATIILOR DE POMPARE SI ALE CENTRALELOR HIDROELEC-
      C     TRICE
      C
      CC                              NOTATII
      C                               *******
            INTEGER PDIA(30)
            DOUBLE PRECISION ANTET(10)
            REAL NRUG(30),M(30),TL                                                  10
           DIMENSION  Z(30),EL(30),D(30),EGRO(30),RK(30),HD(30),QD(30),ETANOM       1
          1(30),HINV(30),QINV(30),DESC(30),REZAJ(30),ZBH(30),ZA(30                  2
          1),VTOTH(30),PVTOT(30),DPEDT(30),VPEVT(30),REZH(30),ELHIDR(30),Z          3
          1C(30,5),FC(30,5),REZC(30),DFC(30,5),QAPORT(30),HRC(30),A(30),C(          4
          130),CM(30),E1(30),CHR(30),DELTAT(30),RD(30),          HR(30),ALF         5
          1A(30),EXPR(30),QPRIM(30,2),QSEC(30,2),HPRIM(30,2),HSEC(30,2),PP          6
          1RIM(30),PSEC(30),TANTET(30),RSEC(30,2),SPRIM(30,2),PRESC(30),PI          7
          1ERDD(30),QBJC(30,2),QBJH(30,2),VAERO(30),PVREL(30),DHIDR(30),YB          8
          1J(30),QDSUM(30),HABSO(30),TAUO(30)                                       9
      C                                                                            12
      CC    INITIALIZAREA  DATELOR  SI  CALCULUL  MARIMILOR  AJUTATOARE            20
      C                                                                            22
            READ 1,ANTET                                                         30
            PRINT 2,ANTET                                                        40
        1   FORMAT(10A8)                                                         50
        2   FORMAT('1',29X,10A8///' ',63X,'DATE  DE  BAZA'//)                    60
            READ 3,NP,NPP,NPD,NPH,NPC,NPC2,NPDIA,NRPOMP,NCOM,INDP                70
        3   FORMAT (16I5)                                                        80
            PRINT 4,NP,NPP,NPD,NPH,NPC,NPC2,NPDIA,NRPOMP,NCOM,INDP               90
        4   FORMAT (10X,16I5)                                                   100
            READ 5,ZAV,ZAM,ENNOM,GDPATR,TINC,EPNOM,TFIN,EXPON,TICLAP,QCOMCLAP    110
        5   FORMAT (8F10.5)                                                     120
            PRINT 6,ZAV,ZAM,ENNOM,GDPATR,TINC,EPNOM,TFIN,EXPON,TICLAP,QCOMCLAP   130
        6   FORMAT (10X,8F10.5)                                                 140
            ENNOR=ENNOM                                                         145
            ENNORI=ENNOM                                                        146
            INV=1                                                               147
            READ 5,(Z(J),J=1,NP)                                                150
            PRINT 6,(Z(J),J=1,NP)                                               160
            READ 5,(EL(J),J=2,NP)                                               170
            PRINT 6,(EL(J),J=2,NP)                                              180
            READ  5,(D(J),J=2,NP)                                               190
            PRINT 6,(D(J),J=2,NP)                                               200
            READ  5,(EGRO(J),J=2,NP)                                            210
            PRINT 6,(EGRO(J),J=2,NP)                                            220
            READ  5,(RK(J),J=2,NP)                                              230
            PRINT 6,(RK(J),J=2,NP)                                              240
            READ  5,(HD(IP),IP=1,NPP)                                           250

6                                          SOHICHJZ   08/10/75  20.29.26


            PRINT 6,(HD(IP),IP=1,NPP)                                           260
            READ  5,(QD(IP),IP=1,NPP)                                           270
            PRINT 6,(QD(IP),IP=1,NPP)                                           280
            READ  5,(ETANOM(IP),IP=1,NPP)                                       290
            PRINT 6,(ETANOM(IP),IP=1,NPP)                                       300
            READ  5,(HINV(IP),IP=1,NPP)                                         310
            PRINT 6,(HINV(IP),IP=1,NPP)                                         320
            READ  5,(QINV(IP),IP=1,NPP)                                         330
            PRINT 6,(QINV(IP),IP=1,NPP)                                         340
            READ  5,(DESC(NV),NV=1,NPD)                                         350
            PRINT 6,(DESC(NV),NV=1,NPD)                                         360
               READ  5,(REZAJ(NV),NV=1,NPD)                                     370
            PRINT 6,(REZAJ(NV),NV=1,NPD)                                        380
            READ  5,(ZBH(J),J=1,NP)                                             390
            PRINT 6,(ZBH(J),J=1,NP)                                             400
            READ  5,(ELHIDR(J),J=1,NP)                                          410
            PRINT 6,(ELHIDR(J),J=1,NP)                                          420
            READ  5,(VTOTH(J),J=1,NP)                                           430
            PRINT 6,(VTOTH(J),J=1,NP)                                           440
            READ  5,(PVTOT(J),J=1,NP)                                           450
            PRINT 6,(PVTOT(J),J=1,NP)                                           460
            READ  5,(DPEDT(JH),JH=1,NPH)                                        470
            PRINT 6,(DPEDT(JH),JH=1,NPH)                                        480
            READ  5,(VPEVT(JH),JH=1,NPH)                                        490
            PRINT 6,(VPEVT(JH),JH=1,NPH)                                        500
            READ  5,(REZH(J),J=1,NP)                                            510
            PRINT 6,(REZH(J),J=1,NP)                                            520
            READ  5,(REZC(J),J=1,NP)                                            560
            PRINT 6,(REZC(J),J=1,NP)                                            580
            DO 603 JC=1,NP                                                      581
            IF(REZC(JC).EQ.0.0) GO TO 603                                       582
            READ  5, (ZC(JC,IC),IC=1,NPC)                                       583
            PRINT 6, (ZC(JC,IC),IC=1,NPC)                                       584
            READ  5, (DFC(JC,IC),IC=1,NPC)                                      586
            PRINT 6, (DFC(JC,IC),IC=1,NPC)                                      587
      603   CONTINUE                                                            589
            READ  5,(QAPORT(J),J=1,NP)                                          590
            PRINT 6,(QAPORT(J),J=1,NP)                                          600
            READ  5,(NRUG(J),J=2,NP)                                            610
            PRINT 6,(NRUG(J),J=2,NP)                                            620
            READ 3,(PDIA(J),J=1,NP)                                             630
            PRINT 4,(PDIA(J),J=1,NP)                                            640
      C                                                                         650
      CC    CALCULUL  MARIMILOR  AJUTATOARE                                     660
      C                                                                         670
            HRM=0.                                                              680
            HG=ZAM-ZAV                                                          690

6                                          SOHICHJZ   08/10/75  20.29.26


            DO 7 J=2,NP                                                         700
            A(J)=(3.14*D(J)*D(J))/4.                                            710
            C(J)=9900./SQRT(48.3+(RK(J)*D(J))/EGRO(J))                          720
            M(J)=C(J)/(9.81*A(J))                                               730
            CM(J)=1./NRUG(J)*(D(J)/4.)**0.166666                                740
      100   E1(J)=8.*9.81/CM(J)/CM(J)                                           750
      101   CHR(J)=E1(J)*EL(J)/D(J)/2/9.81/(A(J)**2)                            760
      102   DELTAT(J)=EL(J)/C(J)                                                770
      103   HRM=HRM+CHR(J)                                                      780
      104   DO 8 J=1,NP                                                         790
      105   IF (J.EQ.PDIA(J)) RD(J)=HRM/NPDIA                                   800
      106   IF(J.EQ.PDIA(J))GO TO 8                                             805
      107   RD(J)=0.                                                            810
      108 8 CONTINUE                                                            820
      109 C                                                                     830
      110 CC    ALEGEREA  TIMPULUI  DE  CALCUL                                  840
      111 C                                                                     850
      112   NP1=NP-1                                                            860
      113   DETMIN=DELTAT(2)                                                    870
      114   DO 9 J=2,NP1                                                        880
      115   IF (DELTAT(J+1).LE.DETMIN) DETMIN=DELTAT(J+1)                       890
      116 9 CONTINUE                                                            900
      117 C                                                                     910
      118 CC    CALCULUL  CARACTERISTICII  DE  INTERPOLARE  PE  FIECARE  TRONSON 920
      119 C                                                                     930
      120   DO 10 J=2,NP                                                        940
      121  10 ALFA(J)=DETMIN/DELTAT(J)                                          945
      122   PRINT 35,HG,DETMIN,HRM                                              950
      123  35 FORMAT (50X,'MARIMI  AJUTATOARE'///10X,3F10.5)                    951
      124   PRINT 6,(A(J),J=2,NP)                                               952
      125   PRINT 6,(C(J),J=2,NP)                                               953
      126   PRINT 6,(M(J),J=2,NP)                                               954
      127   PRINT 6,(CM(J),J=2,NP)                                              955
      128   PRINT 6,(E1(J),J=2,NP)                                              956
      129   PRINT 6,(CHR(J),J=2,NP)                                             957
      130   PRINT 6,(DELTAT(J),J=2,NP)                                          958
      131   PRINT 6,(RD(J),J=1,NP)                                              959
      132   PRINT 6,(ALFA(J),J=2,NP)                                            960
      133 C                                                                     965
      134 CC    DETERMINAREA PRESIUNILOR SI DEBITELOR IN FIECARE NOD DE CALCUL  970
      135 C                                                                     980
      136   IF (ENNOM.GT.0.00) GO TO 12                                         990
      137   WRITE(108,11)                                                      1000
      138  11 FORMAT(10X,'ACEST CAZ NU SE POATE CALCULA')                      1010
      139   GO TO 5000                                                         1020
      140  12 DO 15 IP=1,NPP                                                   1030
      141   QD(IP)=QD(IP)*NRPOMP                                               1040

6                                          SOHICHJZ   08/10/75  20.29.26


      142   QINV(IP)=QINV(IP)*NRPOMP                                           1045
      143   HR(IP)=HG                                                          1050
      144   QDSUM(IP)=QD(IP)                                                   1060
      145   DO 13 J=1,NP                                                       1070
      146   QDSUM(IP)=QDSUM(IP)-QAPORT(NP-J+1)                                 1080
      147  13 HR(IP)=HR(IP)-CHR(NP-J+1)*ABS(QDSUM(IP))*QDSUM(IP)              1090
      148   EXPR(IP)=HD(IP)-HR(IP)                                             1100
      149   IF(IP-1) 14,15,14                                                  1110
      150  14 IF(EXPR(IP)*EXPR(IP-1))16,15,15                                  1120
      151  16 RM=(HR(IP)-HR(IP-1))/(QD(IP)-QD(IP-1))                          1140
      152   RM1=(HD(IP)-HD(IP-1))/(QD(IP)-QD(IP-1))                           1150
      153   QD1=(HD(IP-1)-HR(IP-1)-(RM1-RM)*QD(IP-1))/(RM-RM1)                 1160
      154   HR1=HR(IP-1)+RM*(QD1-QD(IP-1))                                     1170
      155  15 CONTINUE                                                         1175
      156   I=1                                                                1180
      157   DO 19 J=1,NP                                                       1190
      158   IF(J-1)17,18,17                                                    1200
      159  18 QSEC(NP-J+1,I)=QD1                                               1210
      160   QPRIM(NP-J+1,I)=QSEC(NP-J+1,I)                                     1220
      161   HSEC(NP-J+1,I)=HR1                                                 1230
      162   XRMP=.01                                                           1235
      163   HPRIM(NP-J+1,I)=HSEC(NP-J+1,I)+ XRMP    *ABS(QSEC(NP-J+1,I))*     1240
      164  1QSEC(NP-J+1,I)                                                     1250
      165   PPRIM(NP-J+1)=HPRIM(NP-J+1,I)-Z(NP-J+1)                            1260
      166   PSEC(NP-J+1)=HSEC(NP-J+1,I)-Z(NP-J+1)                              1270
      167   GO TO 19                                                           1280
      168  17 QSEC(NP-J+1,I)=QPRIM(NP-J+2,I)                                   1290
      169   QPRIM(NP-J+1,I)=QSEC(NP-J+1,I)-QAPORT(NP-J+1)                      1300
      170   HSEC(NP-J+1,I)=HPRIM(NP-J+2,I)                                     1310
      171   HPRIM(NP-J+1,I)=HSEC(NP-J+1,I)+RD(NP-J+1)*ABS(QSEC(NP-J+1,I))*     1320
      172  1QSEC(NP-J+1,I)                                                     1330
      173   PPRIM(NP-J+1)=HPRIM(NP-J+1,I)-Z(NP-J+1)                            1340
      174   PSEC(NP-J+1)=HSEC(NP-J+1,I)-Z(NP-J+1)                              1350
      175  19 CONTINUE                                                         1360
```

```
C
C     CALCULUL  MARIMILOR  INITIALE  PENTRU  HIDROFOR
C
      INDIC=1
      INDIC1=1
      DO 20 J=1,NP
      IF(ABS(VTOTH(J)-0.00)-.0001)20,20,21
   20 CONTINUE
   21 IF(J-NP) 22,25,23
   22 INDIC=INDIC+1
      DO 24 J=1,NP1
      IF(ABS(VTOTH(J)-.00)-.0001) 24,24,2500
 2500 IF(NCOM.EQ.2) GO TO 25

                                        SOWICHJZ   08/10/75  20.29.26


      DHIDR(J)=SQRT((4.*VTOTH(J))/(3.14*ELHIDR(J)))
      VAERO(J)=VTOTH(J)/5
      VTXY=(VTOTH(J)-VAERO(J))/VTOTH(J)
      VTXY1=TL (VTXY,VPEVT,DPEDT,NPH)
      ZA(J)=DHIDR(J)*VTXY1
      ZAH(J)=ZBH(J)+ZA(J)
      QBJH(J,I)=0.00
      PVREL(J)=PPRIM(J)-ZBH(J)-ZA(J)
      TAUO(J)=VAERO(J)
      HABSO(J)=PVREL(J)+10.
      GO TO 24
   25 DHIDR(J)=SQRT((4.*VTOTH(J))/(3.14*ELHIDR(J)))
      VAERO(J)=(((VTOTH(J)**EXPON)*PVTOT(J))/(PPRIM(J)+10.-ZBH(J)-0.75
     1*DHIDR(J)))**(1./EXPON)
      IF(VAERO(J)/VTOTH(J)-0.2)26,26,27
   26 VTOTH(J)=1.1*VTOTH(J)
      GO TO 25
   27 VTXY=(VTOTH(J)-VAERO(J))/VTOTH(J)
      VTXY1=TL (VTXY,VPEVT,DPEDT,NPH)
      ZA(J)=DHIDR(J)*VTXY1
      ZAH(J)=ZBH(J)+ZA(J)
      QBJH(J,I)=0.00
      PVREL(J)=PPRIM(J)-ZAH(J)
      TAUO(J)=VAERO(J)
      HABSO(J)=PVREL(J)+10.
   24 CONTINUE
C
C     CALCULUL  MARIMILOR  INITIALE  PENTRU  CASTELUL  DE  ECHILIBRU
C
   25 DO 29 J=1,NP
      IF(ABS(REZC(J)-0.00)-.0001)29,29,30
   29 CONTINUE
   30 IF(J-NP)31,32,32
   31 INDIC=INDIC+1
      INDIC1=INDIC1+1
      DO 33 J=1,NP1
      IF(ABS(REZC(J)-.00)-.0001)33,33,34
   34 HBC(J)=HSEC(J,I)
      PRESC(J)=HBC(J)-Z(J)
      PIERDD(J)=0.00
      QBJC(J,I)=0.00
      DO 1000 IC=1,NPC
 1000 FC(J,IC)=(3.14*DFC(J,IC)*DFC(J,IC))/4.
      PRINT 6,(FC(J,IC),IC=1,NPC)
   33 CONTINUE
C
C     INSTRUCTIUNI DE TIPARIRE A DATELOR INITIALE FUNCTIE DE CAZUL

                                        SOWICHJZ   08/10/75  20.29.26


C     STUDIAT
C
   34 TCALC=0.000
      TSEC=0.000
      WRITE (108,40)
   40 FORMAT(///20X,'VALORILE PRESIUNILOR SI DEBITELOR IN SECTAUNILE
     1 DE CALCUL ALE CONDUCTEI.'/20X,81('*'),//////)
      DO 42 J=1,NP
   42 IANTET(J)=J
      WRITE(108,43) TCALC,TSEC,ENNOM
   43 FORMAT(5X,'TIMPUL DE CALCUL=',F10.5/5X,'TIMPUL IN SECUNDE=',F10.5,
     1'SEC.'/5X,'VITEZA ROTATIE POMPA=',F10.5,'ROT/MIN.')
      IF(INDIC.EQ.1) GO TO 36
      IF(INDIC.EQ.2.AND.INDIC1.EQ.2) GO TO 37
      IF(INDIC.EQ.3) GO TO 38
      IF(INDIC.EQ.2.AND.INDIC1.EQ.1) GO TO 39
   37 DO 44 J=1,NP
      IF(REZC(J)-.0001)44,44,45
   45 WRITE(108,46)J,HBC(J),PRESC(J),PIERDD(J),QBJC(J,I)
   46 FORMAT(5X,'CASTEL NODUL ',I5/1X,'NIVELUL APEI IN CASTEL=',F6.2,'M.
     1 PRESIUNEA IN CONDUCTA=',F6.2,'M. PIERDERI IN DIAFRAGMA=',F6.2,'M.
     1 DEBIT SCHIMB=',F6.2,'M3.')
   44 CONTINUE
      GO TO 36
   38 DO 47 J=1,NP
      IF(REZH(J)-.0001)48,48,49
   49 WRITE(108,53)J,VTOTH(J),VAERO(J),DHIDR(J),ELHIDR(J),ZBH(J),PVR
     1EL(J),ZAH(J),QBJH(J,I)
   53 FORMAT(5X,'HIDROFOR NODUL',I5/1X,'VHIDR.=',F6.2,'M3. VAER=',F6.2,
     1'M3. DHIDR.=',F5.2,'M. EHIDR.=',F5.2,'M. COTA BAZA=',F4.2,'M. PRES
     1,REL.=',F6.2,'M. COTA ARA=',F5.2,'M.'/5X,'DEBIT SCHIMB=',F6.3,'M3.
     1')
      IF(REZC(J)-.0001)47,47,54
   54 WRITE(108,46)J,HBC(J),PRESC(J),PIERDD(J),QBJC(J,I)
   47 CONTINUE
      GO TO 36
   39 DO 56 J=1,NP
      IF(REZH(J)-.0001)56,56,57
   57 WRITE(108,53)J,VTOTH(J),VAERO(J),DHIDR(J),ELHIDR(J),ZBH(J),PVREL
     1(J),ZAH(J),QBJH(J,I)
   56 CONTINUE
   36 WRITE(108,41) (IANTET(J),J=1,NP)
   41 FORMAT(1X,'NODUL',17I7)
      WRITE(108,60) (PPRIM(J),J=1,NP)
   60 FORMAT          (1X,'PPRIM =',17F7.2)
      WRITE(108,61) (PSEC(J),J=1,NP)
   61 FORMAT (1X,'PSEC  =',17F7.2)

                                        SOWICHJZ   08/10/75  20.29.26


      WRITE(108,62) (QPRIM(J,I),J=1,NP)
   62 FORMAT (1X,'QPRIM =',17F7.2)
      WRITE(108,63) (QSEC(J,I),J=1,NP)
   63 FORMAT (1X,'QSEC  =',17F7.2)
C
C     CALCULUL INVRIMM
C
      DO 50 J=2,NP
   50 HSEC(J-1,I)=HSEC(J-1,I)+M(J)*QSEC(J-1,I)+(1.-ALFA(J))*(HPRIM(J,
     1I)+M(J)*QPRIM(J,I)-HSEC(J-1,I)-M(J)*QSEC(J-1,I))
      DO 52 J=1,NP1
   52 HPRIM(J+1,I)=HPRIM(J+1,I)-M(J+1)*QPRIM(J+1,I)+(1.-ALFA(J+1))*
     1(HSEC(J,I)-M(J+1)*QSEC(J,I)-HPRIM(J+1,I)+M(J+1)*QPRIM(J+1,I))
      TCALC=TCALC+1.000
      TSEC=TSEC+DETMIN
      QRET=QPRIM(NP,I)
      NV=1
C
C     REZOLVAREA ECUATIILOR IN FIECARE NOD FUNCTIE DE PARTICULARITATILE
C     SALE
C
  630 DO 100 J=1,NP
      IF(J.EQ.NP) GO TO 130
      IF(VTOTH(J).GT.0.00) GO TO 350
      IF(REZC(J).GT.0.00) GO TO 380
      IF(RD(J).GT.0.00) GO TO 410
      IF(RD(J).LT.0.000001) GO TO 440
      GO TO 99
  130 IF (ENNOM.GT.0.00) GO TO 120
   99 WRITE(108,11)
      GO TO 5000
  120 IF (REZAJ(NV).GT.0.00) GO TO 200
      IF (QSEC(J,I))150,150,140
C
C     REZOLVAREA ECUATIEI IN CAZUL-FARA CLAPET SAU VANA-CURGERE DIRECTA
C
  150 ENNOM2=ENNOM/(1.+(3600.*9.81*ENNOM*TSEC)/((3.14*ENNOM)*(3.14*
     1ENNOM)*GDPATR))
      DO 160 IP=1,NPP
      HD(IP)=HD(IP)*(ENNOM2/ENNOR)*(ENNOM2/ENNOR)
      QD(IP)=QD(IP)*(ENNOM2/ENNOR)
      HSEC1     =-M(J)*QD(IP)+RSEC(J-1,I)
      EXPR(IP)=HD(IP)-HSEC1
      IF(IP.EQ.1)GO TO 160
      IF(EXPR(IP)*EXPR(IP-1))170,160,160
  170 QSEC(J,I+1)=(((HD(IP)-HD(IP-1))/(QD(IP)-QD(IP-1)))*QD(IP-1)+
     1RSEC(J-1,I)-HD(IP-1))/((HD(IP)-HD(IP-1))/(QD(IP)-QD(IP-1))+

                                        SOWICHJZ   08/10/75  20.29.26


     1M(J))
      QPRIM(J,I+1)=QSEC(J,I+1)
      HSEC(J,I+1)=HD(IP-1)+((HD(IP)-HD(IP-1))/(QD(IP)-QD(IP-1)))*
     1(QSEC(J,I+1)-QD(IP-1))
      HPRIM(J,I+1)=HSEC(J,I+1)
  160 CONTINUE
      PPRIM(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      PSEC(J)=HSEC(J,I+1)-Z(J)
      ENNOR=ENNOM2
      GO TO 460
C
C     REZOLVAREA ECUATIEI IN CAZUL-FARA VANA SAU CLAPET-CURGERE INVERSA
C
  140 ENNOM2=0.00
      DO 180 IP=1,NPP
      HSEC1     =-M(J)*QINV(IP)+RSEC(J-1,I)
      EXPR(IP)=HINV(IP)-HSEC1
      IF(IP.EQ.1) GO TO 180
      IF(EXPR(IP)*EXPR(IP-1))190,180,180
  190 ECU=(HINV(IP)-HINV(IP-1))/(QINV(IP)-QINV(IP-1))
```

```
      QSEC(J,I+1)=(ECU*QINV(IP-1)+RSEC(J-1,I)-HINV(IP-1))/(ECU+M(J))
      QPRIM(J,I+1)=QSEC(J,I+1)
      HSEC(J,I+1)=HINV(IP-1)+ECU*(QSEC(J,I+1)-QINV(IP-1))
  180 CONTINUE
      PPRIM(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      PSEC(J)=HSEC(J,I+1)-Z(J)
      GO TO 460
  200 IF(INDP.EQ.2) GO TO 660
      IF(TINC.GT.0.00) GO TO 330
      IF(INV.GT.1) GO TO 270
      IF(QSEC(J,I).GE.-.10) GO TO 270
      TINV=TSEC
      IF(QSEC(J,I).LE.QCOMCLAP) TRETIN=TSEC
      IF(QSEC(J,I).GE.QCOMCLAP) RVA=IL((TSEC-TRETIN),DESC,REZAJ,NPD)
      IF((TSEC-TRETIN).GE.TICLAP) GO TO 320
      IF(QSEC(J,I).GE.QCOMCLAP)GO TO 340
      RVA=0.00
C
CC    REZOLVAREA ECUATIEI,CAZUL-CU VANA SAU CLAPET-CURGERE DIRECTA
C
  340 ENNOM2=ENNOM/(1.+(3600.*9.81*EPNOM*TSEC)/((3.14*ENNOM)*(3.14*
     1ENNOM)*GDPATR))
      DO 230 IP=1,NPP
      HD(IP)=HD(IP)*(ENNOM2/ENNOR)*(ENNOM2/ENNOR)
      QD(IP)=QD(IP)*(ENNOM2/ENNOR)
      HSEC1      =-M(J)*QD(IP)+RSEC(J-1,I)-RVA*ABS(QD(IP))*QD(IP)
      EXPR(IP)=HD(IP)-HSEC1
```

```
06                                    SOHICHJZ   08/10/75  20.29.26

      IF(IP.EQ.1) GO TO 230
      IF(EXPR(IP)*EXPR(IP-1)) 240,230,230
  240 ECU=(HD(IP)-HD(IP-1))/(QD(IP)-QD(IP-1))
      XP=-6.
      CTX=-4.
      E=RVA*CTX*ABS(CTX)+(ECU+M(J))*CTX+HD(IP-1)-ECU*QD(IP-1)-RSEC(
     1J-1,I)
      CTY=E
      E=RVA*XP*ABS(XP)+(ECU+M(J))*XP+HD(IP-1)-ECU*QD(IP-1)-RSEC(J-1
     1,I)
  250 XC=XP-E*((CTX-XP)/(CTY-E))
      E=RVA*XC*ABS(XC)+(ECU+M(J))*XC+HD(IP-1)-ECU*QD(IP-1)-RSEC(J-1
     1,I)
      IF(ABS(E-0.00).LT.0.0001) GO TO 260
      XP=XC
      GO TO 250
  260 QSEC(J,I+1)=XC
      HSEC(J,I+1)=HD(IP-1)+ECU*(QSEC(J,I+1)-QD(IP-1))
  230 CONTINUE
      HPRIM(J,I+1)=HSEC(J,I+1)+RVA*ABS(QSEC(J,I+1))*QSEC(J,I+1)
      QPRIM(J,I+1)=QSEC(J,I+1)
      PPRIM(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      PSEC(J)=HSEC(J,I+1)-Z(J)
      ENNOR=ENNOM2
      GO TO 460
C
CC    REZOLVAREA ECUATIEI CAZUL-CU VANA SAU CLAPET-CURGERE INVERSA
C
  270 IF(TINC.GT.0.0) GO TO 210
      IF(QSEC(J,I).LE.QCOMCLAP) TRETIN=TSEC
      IF(TSEC-TRETIN.GE.TICLAP) GO TO 320
      RVA=IL((TSEC-TRETIN),DESC,REZAJ,NPD)
  210 IF(ENNOM2.LE.50.) GO TO 220
      IF(TINV.NE.TRET) GO TO 220
      ENNOM2=ENNOM/(1.+(3600.*9.81*EPNOM*TSEC)/((3.14*ENNOM)*(3.14*
     1ENNOM)*GDPATR))
      TINV=TSEC
      GO TO 650
  220 ENNOM2=ENNOM/(1.+(3600.*9.81*EPNOM*TINV)/((3.14*ENNOM)*(3.14*
     1ENNOM)*GDPATR))
      TINV=TINV-DETMIN
  650 DO 280 IP=1,NPP
      HINV(IP)=HINV(IP)*(ENNOM2/ENNORI)*(ENNOM2/ENNORI)
      QINV(IP)=QINV(IP)*(ENNOM2/ENNORI)
      HSEC1      =-M(J)*QINV(IP)+RSEC(J-1,I)-RVA*ABS(QINV(IP))*QINV
     1(IP)
      EXPR(IP)=HINV(IP)-HSEC1
```

```
06                                    SOHICHJZ   08/10/75  20.29.26

      IF(IP.EQ.1) GO TO 280
      IF(EXPR(IP)*EXPR(IP-1)) 290,280,280
  290 ECU=(HINV(IP)-HINV(IP-1))/(QINV(IP)-QINV(IP-1))
      XP=-6.
      CTX=-4.
      E=RVA*CTX*ABS(CTX)+(ECU+M(J))*CTX+HINV(IP-1)-ECU*QINV(IP-1)-
     1RSEC(J-1,I)
      CTY=E
      E=RVA*XP*ABS(XP)+(ECU+M(J))*XP+HINV(IP-1)-ECU*QINV(IP-1)-RSE
     1C(J-1,I)
  300 XC=XP-E*((CTX-XP)/(CTY-E))
      E=RVA*XC*ABS(XC)+(ECU+M(J))*XC+HINV(IP-1)-ECU*QINV(IP-1)-RSE
     1C(J-1,I)
      IF(ABS(E-0.00).LT.0.0001) GO TO 310
      XP=XC
      GO TO 300
  310 QSEC(J,I+1)=XC
      HSEC(J,I+1)=HINV(IP-1)+ECU*(QSEC(J,I+1)-QINV(IP-1))
  280 CONTINUE
      HPRIM(J,I+1)=HSEC(J,I+1)+RVA*ABS(QSEC(J,I+1))*QSEC(J,I+1)
      QPRIM(J,I+1)=QSEC(J,I+1)
      PPRIM(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      PSEC(J)=HSEC(J,I+1)-Z(J)
      ENNORI=ENNOM2
      INV=INV+1
      GO TO 460
C
C     NOD CU POMPA VARIANTA 2
C
  660 CONTINUE
C
CC    REZOLVAREA ECUATIEI CAZUL-CLAPETUL SAU VANA INCHISA-
C
  320 ENNOM2=0.00
      QPRIM(J,I+1)=0.00
      QSEC(J,I+1)=0.00
      HSEC(J,I+1)=0.00
      HPRIM(J,I+1)=RSEC(J-1,I)
      PPRIM(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      PSEC(J)=0.00
      GO TO 460
  330 IF(TSEC.GE.TINC) GO TO 320
      RVA=IL(TSEC/TINC,DESC,REZAJ,NPD)
      IF(QSEC(J,I).GE.-.10) GO TO 270
      TINV=TSEC
      GO TO 340
C
```

```
06                                    SOHICHJZ   08/10/75  20.29.26

C     REZOLVAREA ECUATIEI -NODUL CU HIDROFOR-
C
  350 ECU=(M(J)*M(J+1))/(M(J)+M(J+1))
      ECU1=QAPORT(J)+(RSEC(J-1,I)/M(J))+(SPRIM(J+1,I)/M(J+1))
      YBJ(J   )=Z(J)+ZAH(J)-10.0
      XP=-3.
      CTX=-1.
      E=HABSO(J)*(TAUO(J)**EXPON)-ECU*((VAERO(J)+0.5*(QBJH(J,I)+CTX)*DET
     1MIN)**EXPON)*(CTX+ECU1)-((VAERO(J)+0.5*(QBJH(J,I)+CTX)*DETMIN)**
     1EXPON)*(REZH(J)*(CTX*ABS(CTX))-YBJ(J))
      CTY=E
      E=HABSO(J)*(TAUO(J)**EXPON)-ECU*((VAERO(J)+0.5*(QBJH(J,I)+XP)*DETM
     1IN)**EXPON)*(XP+ECU1)-((VAERO(J)+0.5*(QBJH(J,I)+XP)*DETMIN)**EXP
     1ON)*(REZH(J)*(XP*ABS(XP))-YBJ(J))
  360 XC=XP-E*((CTX-XP)/(CTY-E))
      E=HABSO(J)*(TAUO(J)**EXPON)-ECU*((VAERO(J)+0.5*(QBJH(J,I)+XC)*DETM
     1IN)**EXPON)*(XC+ECU1)-((VAERO(J)+0.5*(QBJH(J,I)+XC)*DETMIN)**EXP
     1ON)*(REZH(J)*(XC*ABS(XC))-YBJ(J)).
      IF(ABS(XC-XP).LE.0.001.AND.E*XVER.LT.0.0) GO TO 370
      IF(ABS(E-0.00).LT.0.001 ) GO TO 370
      XP=XC
      XVER=E
      GO TO 360
  370 QBJH(J,I+1)=XC
      VAERO(J)=VAERO(J)+0.5*(QBJH(J,I)+QBJH(J,I+1))*DETMIN
      PVTOT(J)=          (HABSO(J)*(TAUO(J)**EXPON))/(VAERO(J)**EXPON)
      PVREL(J)=PVTOT(J)-10
      ZA(J)=DHIDR(J)*IL((VTOTH(J)-VAERO(J))/VTOTH(J),VPEVT,DPEDT,
     1NPH)
      ZAH(J)=ZBH(J)+ZA(J)
      YBJ(J)=Z(J)+ZAH(J)-10.
      HPRIM(J,I+1)=PVTOT(J)-REZH(J)*ABS(QBJH(J,I+1))*QBJH(J,I+1)+
     1YBJ(J)
      HSEC(J,I+1)=HPRIM(J,I+1)
      PPRIM(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      PSEC(J)=HSEC(J,I+1)-Z(J)
      QPRIM(J,I+1)=(RSEC(J-1,I)-HPRIM(J,I+1))/M(J)
      QSEC(J,I+1)=QPRIM(J,I+1)+QAPORT(J)+QBJH(J,I+1)
      IF(PPRIM(J).LE.-8.0.OR.PSEC(J).LE.-8.) GO TO 460
      IF(VAERO(J).LT.VTOTH(J)) GO TO 100
      VAERO(J)=VTOTH(J)
      QBJH(J,I+1)=0.00
      PVTOT(J)=10.
      PVREL(J)=0.
      ZA(J)=0.
      ZAH(J)=ZBH(J)+ZA(J)
      YBJ(J)=Z(J)+ZAH(J)-10.
```

```
      QPRIM(J,I+1)=QSEC(J,I+1)-QAPORT(J)
      PPRIM(J)=-B.
      PSEC(J)=-B.
      HPRIM(J,I+1)=PPRIM(J)+Z(J)
      HSEC(J,I+1)=PSEC(J)+7(J)
10U   CONTINUE
C
C     TIPARIREA REZULTATELOR CALCULATE
C
      WRITE(108,43) TCALC,TSEC,ENNOM2
      IF(INDIC.EQ.1) GO TO 480
      IF(INDIC.EQ.2.AND.INDIC1.EQ.2) GO TO 490
      IF(INDIC.EQ.3) GO TO 500
      IF(INDIC.EQ.2.AND.INDIC1.EQ.1) GO TO 510
49U   DO 520 J=1,NP
      IF(REZC(J)-0.00015)520,520,470
520   CONTINUE
      GO TO 480
50U   DO 540 J=1,NP
      IF(PREZH(J)-.00015)550,550,560
56U   PRINT 53,J,VTOTH(J),VAERO(J),DHIDR(J),ELHIDR(J),ZBH(J),PVREL
      1(J),ZAH(J),QBJH(I,I+1)
55U   IF(REZC(J)-0.00015)540,540,570
57U   PRINT 46,J,HBC(J),PRESC(J),PIERDD(J),QBJC(J,I+1)
540   CONTINUE
      GO TO 480
51U   DO 580 J=1,NP
      IF(REZH(J)-0.00015)580,580,590
59U   PRINT 53,J,VTOTH(J),VAERO(J),DHIDR(J),ELHIDR(J),ZBH(J),PVREL
      1(J),ZAH(J),QBJH(I,I+1)
58U   CONTINUE
48U   WRITE(108,41) (IANTET(J),J=1,NP)
      WRITE(108,60)(PPRIM(J),J=1,NP)
      WRITE(108,61) (PSEC(J) ,J=1,NP)
      WRITE(108,62) (QPRIM(J,I+1),J=1,NP)
      WRITE(108,63) (QSEC(J,I+1) ,J=1,NP)
      IF(TSEC.GE.TFIN) GO TO 5000
C
C     CALCULUL INRIMM LA TIMPUL I+1
C
      DO 600 J=2,NP
60U   RSEC(J-1,I)=HSEC(J-1,I+1)+M(J)*QSEC(J-1,I+1)+(1.-ALFA(J))*(H
     1PRIM(J,I+1)+M(J)*QPRIM(J,I+1)-HSEC(J-1,I+1)-M(J)*QSEC(J-1,I+1))
      DO 610 J=1,NP1
61U   SPRIM(J+1,I)=HPRIM(J+1,I+1)-M(J+1)*QPRIM(J+1,I+1)+(1.-ALFA(J+1)
     1)*(HSEC(J,I+1)-M(J+1)*QSEC(J,I+1)-HPRIM(J+1,I+1)+M(J+1)*QPRIM
      GO TO 630
5000  STOP
      END
      REAL FUNCTION XL (A,XT,YT,N)
      DIMENSION XT(50),YT(30)
      IF(N) 2,3,2
3     IL=0.
      RETURN
4     CONTINUE
      IF(X.LE.AT(1))J=1
      IF(X.GE.XT(N)) J=N-1
      DO 1 I=2,N
1     CONTINUE
      IF(X.GE.XT(I-1).AND.X.LT.XT(I)) J=I-1
      IL=(YT(J+1)-YT(J))/(XT(J+1)-XT(J))*(X-XT(J))+YT(J)
      RETURN
      END
      FUNCTION CIL(L,Z,X,Y,N)
      DIMENSION X(30,5),Y(30,5)
      IF(Z.LE.X(1,1)) J=1
      IF(Z.GE.X(1,N)) J=N-1
      DO 1 L=2,N
      IF(Z.GE.X(I,L-1).AND.Z.LT.X(I,L))J=L-1
1     CONTINUE
      CIL=Y(I,J)+(Y(I,J+1)-Y(I,J))/(X(I,J+1)-X(I,J))*(Z-X(I,J))
      RETURN
      END
```



```
      HSEC(J,I+1)=-M(J)*(QSEC(J,I+1)-QAPORT(JJ))-RD(J)*(QSEC(J,I+1)-
     1QAPORT(J))*ABS(QPRIM(J,I+1)-RSEC(J-1,I))
      HPRIM(J,I+1)=HSEC(J,I+1)+RD(J)*QPRIM(J,I+1)+ABS(QPRIM(J,I+1))
      PPRIM(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      PSEC(J)=HSEC(J,I+1)-7(J)
      GO TO 460
C
C     REZOLVAREA ECUATIEI INTR-UN NOD SIMPLU
C
44U   IF(J.EQ.1) GO TO 450
      QPRIM(J,I+1)=(RSEC(J-1,I)-SPRIM(J+1,I)-M(J+1)*QAPORT(J))/(M(
     1J)+M(J+1))
      QSEC(J,I+1)=QPRIM(J,I+1)+QAPORT(J)
      HPRIM(J,I+1)=(M(J)*M(J+1)+M(J+1))+QAPORT(J))+M(J-1)*RSEC(J-1,I)+M(J)*
     1SPRIM(J+1,I))/(M(J)+M(J+1))
      HSEC(J,I+1)=HPRIM(J,I+1)
      PPRIM(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      PSEC(J)=HSEC(J,I+1)  -7(J)
      GO TO 460
C
C     REZOLVAREA ECUATIEI LA REZERVOR
C
45U   HPRIM(J,I+1)=HPRIM(J,I)
      HSEC(J,I+1)=HSEC(J,I)
      PPRIM(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      PSEC(J)=HSEC(J,I+1)-7(J)
      QSEC(J,I+1)=(HSEC(J,I+1)-SPRIM(J+1,I))/M(J+1)
      QPRIM(J,I+1)=QSEC(J,I+1)-QAPORT(J)
46U   IF(VTOTH(J).GT.0.00) GO TO 2000
      IF(PPRIM(J).LE.-R.0.OR.PSEC(J).LE.-8.) GO TO 470
      GO TO 400
200U  IF(VAERO(J).LT.VTOTH(J)) GO TO 470
      PPRIM(J)=0.00
      PSEC(J)=0.00
      HPRIM(J,I+1)=PPRIM(J)+Z(J)
      HSEC(J,I+1)=PSEC(J)+7(J)
      QSEC(J,I+1)=0.00
      QPRIM(J,I+1)=QSEC(J,I+1)-QAPORT(J)
      VAERO(J)=VTOTH(J)
      QBJH(J,I+1)=0.00
      PVTOT(J)=10.00
      PVREL(J)=0.00
      ZAH(J)=0.00
      ZBH(J)=ZBH(J)+ZA(J)
      YBJ(J)=ZBH(J)+ZAH(J)-10.
      GO TO 400
47U   QSEC(J,I+1)=0.00
```



```
      GO TO 100
C
C     REZOLVAREA ECUATIILOR IN NODURILE PREVAZUTE CU CASTEL DE ECHILIBRU
C
58U   FCAST=CIL(J,HBC(J),ZC,FC,NPC)
      ECU=(M(J)*M(J+1))/(M(J)+M(J+1))+(0.5*DETMIN)/FCAST
      ECU1=((M(J)*M(J+1))/(M(J)+M(J+1)))*(QAPORT(J)+(RSEC(J-1,I)/M
     1(I))+(SPRIM(J+1,I)/M(J+1)))
      ECU3=(0.5*DETMIN*QBJC(J,I))/FCAST-MBC(J)
      XP=-6.
      CTX=-4.
      E=REZC(J)*CTX*ABS(CTX)+ECU*CTX+ECU1+ECU3
      CTY=E
      E=REZC(J)*XP*ABS(XP)+ECU*XP+ECU1+ECU3
39U   XC=YP-E*((CTX-YP)/(CTY-E))
      E=REZC(J)*XC*ABS(XC)+ECU*XC+ECU1+ECU3
      IF(ABS(E-0.00).LT.0.0011) GO TO 420
      XP=XC
      GO TO 390
40U   QBJC(J,I+1)=XC
      HBC(J)=HBC(J)-(0.5*DETMIN*(QBJC(J,I+1)+QBJC(J,I))/FCAST
      HPRIM(J,I+1)=HBC(J)-REZC(J)*QBJC(J,I+1)*ABS(QBJC(J,I+1))
      PRESC(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      HSEC(J,I+1)=HPRIM(J,I+1)-7(J)
      PPRIM(J)=HPRIM(J,I+1)-Z(J)
      PSEC(J)=HSEC(J,I+1)-7(J)
      QPRIM(J,I+1)=(RSEC(J-1,I)-HPRIM(J,I+1))/M(J)
      QSEC(J,I+1)=QPRIM(J,I+1)+QBJC(J,I+1)+QAPORT(J)
      PIERDD(J)=REZC(J)*QBJC(J,I+1)*ABS(QBJC(J,I+1))
      GO TO 460
C
C     REZOLVAREA ECUATIILOR IN NODURILE CU DIAFRAGMA
C
41U   ECU=M(J)+M(J+1)
      ECU1=SPRIM(J+1,I)-RSEC(J-1,I)-M(J)*QAPORT(J)
      XP=-8.
      CTX=200.
      E=RD(J)*((CTX-QAPORT(J))*ABS(CTX-QAPORT(J))+ECU*CTX+ECU1
      CTY=E
      E=RD(J)*(XP-QAPORT(J))*ABS(XP-QAPORT(J))+ECU*XP+ECU1
42U   XC=XP-E*((CTX-YP)/(CTY-E))
      E=RD(J)*(XC-QAPORT(J))*ABS(XC-QAPORT(J))+ECU*XC+ECU1
      IF(ABS(E-0.00).LT.0.0011) GO TO 43U
      XP=XC
      GO TO 410
43U   QSEC(J,I+1)=XC
      QPRIM(J,I+1)=QSEC(J,I+1)-QAPORT(J)
```

CREȘTEREA CAPACITĂȚII DE TRANSPORT A CONDUCTEI DREPTUNGHIULARE PRIN INJECȚIA UNUI AL DOILEA FLUID DE VISCOZITATE MAI MICĂ

de CORNELIU I. CRĂCIUN

Laboratorul de cercetări hidraulice
Institutul politehnic București

Se arată că prin injecția unui fluid de viscozitate mai mică decît a celui transportat, într-un strat de grosime convenabilă, se poate obține o creștere substanțială a debitului transportat pentru un gradient de presiune constant.

1. INTRODUCERE

În lucrarea [1] am arătat că în mișcarea de tip Poiseuille plană, sub gradient de presiune între două plăci paralele, debitul transportat poate crește de cîteva ori dacă se injectează un lichid de viscozitate mai mică, într-un strat suficient de subțire, lîngă unul din pereți. Dezvoltările analitice au fost însoțite de calcule numerice care au ilustrat eficacitatea procedeului.

Fără îndoială că din punct de vedere practic prezintă interes aplicarea procedeului la conducte. Studiul a fost efectuat într-o primă etapă pe conducte de secțiune dreptunghiulară pentru care distribuția de viteze în curgerea stratificată a fost stabilită în [2], urmînd ca în viitor el să fie extins la conducte de secțiune circulară.

Pentru a ușura expunerea și pentru uniformizarea notațiilor, vom prezenta la început cîteva rezultate cunoscute care ne sînt utile.

2. MIȘCAREA UNUI FLUID VÎSCOS ÎN CONDUCTA DREPTUNGHIULARĂ

Se consideră conducta de secțiune dreptunghiulară cu lățimea $2a$ și înălțimea $2b$. Se alege un sistem de axe triortogonal astfel ca Oz să fie orientată în lungul curgerii, iar Ox și Oy să fie paralele cu laturile dreptunghiului din secțiunea normală, ca în figura 1.

Mișcarea de tip Poiseuille în conducta dreptunghiulară are loc pe traiectorii drepte paralele [3]. Distribuția de viteze a fost obținută prin

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 35, NR. 1, 1976, P. 27–50

metoda separării variabilelor, ca soluție a problemei la limită :

$$\Delta v\,(x, y) = -K, \tag{1}$$

$$v\,(\pm a, y) = 0, \tag{2}$$

$$v\,(x, \pm b) = 0. \tag{3}$$

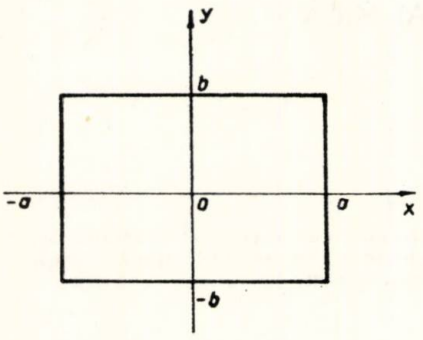


Fig. 1.

Dacă se notează cu P gradientul de presiune,

$$P = \frac{\partial p}{\partial z} < 0, \tag{4}$$

atunci K reprezintă cantitatea pozitivă,

$$K = -\frac{1}{\mu} P. \tag{5}$$

Distribuția de viteze apare ca o dezvoltare în serie de funcții proprii $\{\cos \lambda_n x\}$, în care λ_n sînt valorile proprii

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\,\pi}{2a}. \tag{6}$$

Viteza se scrie [3] sub două forme :

$$v(x, y) = \frac{K}{2}\left[a^2 - x^2 - \frac{4}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \frac{\operatorname{ch} \lambda_n y}{\operatorname{ch} \lambda_n b} \cos \lambda_n x\right] \tag{7}$$

sau

$$v(x, y) = \frac{2K}{a}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n y}{\operatorname{ch} \lambda_n b}\right] \cos \lambda_n x. \tag{8}$$

Debitul curgerii este

$$Q = \frac{4}{3} K a^3 b\left[1 - \frac{192}{\pi^5} \frac{a}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\,\pi}{2} \frac{b}{a}\right] \tag{9}$$

sau, sub o formă puțin modificată,

$$Q = \frac{128}{\pi^4} K a^4\left[\frac{b}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\,\pi}{2} \frac{b}{a}\right]. \tag{10}$$

Vom remarca în primul rînd faptul că debitul din (10) se poate scrie

$$Q = \frac{128}{\pi^4} Ka^4 f\left(\frac{b}{a}\right), \tag{11}$$

unde f este funcție numai de raportul $\frac{b}{a}$ al dimensiunilor conductei, raport ce o caracterizează din punct de vedere geometric. În al doilea rînd, menționăm că echivalența formulelor (9) și (10) se poate arăta cu ajutorul identității, [4] p. 21,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}. \tag{12}$$

În vederea dezvoltărilor ulterioare vom particulariza formulele debitului pentru cazul conductei de secțiune pătrată ($a = b$) de latură $2a$. Astfel

$$Q = \frac{4}{3} Ka^4 \left[1 - \frac{192}{\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2}\right] \tag{13}$$

sau

$$Q = \frac{128}{\pi^4} Ka^4 \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2}\right]. \tag{14}$$

Pentru debitul din conducta pătrată se poate da o evaluare numerică cu o foarte bună aproximație. Observînd că pentru $n > 1$ avem $\operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \simeq 1$, seriile rapid convergente din (13) sau (14) se pot calcula relativ ușor și se obține

$$Q \simeq 0{,}5624\, K a^4. \tag{15}$$

3. DISTRIBUȚIA DE VITEZE ÎN MIȘCAREA A DOUĂ FLUIDE STRATIFICATE ÎN CONDUCTA DREPTUNGHIULARĂ

Să presupunem că în conducta dreptunghiulară de laturi $2a$ și $2b$ curg stratificate, sub acțiunea gradientului de presiune P, două lichide de viscozități μ_1, respectiv μ_2. Atunci

$$K_1 = -\frac{1}{\mu_1} P, \quad K_2 = -\frac{1}{\mu_2} P. \tag{16}$$

Grosimile straturilor fiind b_1 și b_2 avem situația din figura 2. Notăm că

$$b_1 + b_2 = 2b \tag{17}$$

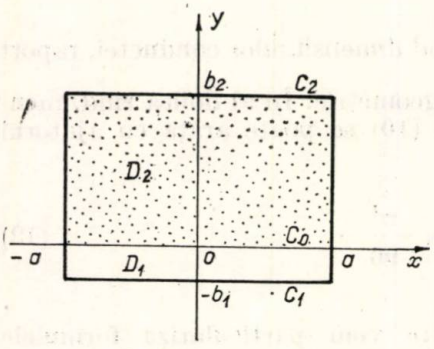


Figura 2

Problema la limită pentru viteze se scrie:

$$\Delta v_1(x, y) = -K_1, \tag{18}$$

$$\Delta v_2(x, y) = -K_2, \tag{19}$$

$$v_1(\pm a, y) = 0, \tag{20}$$

$$v_1(x, -b_1) = 0, \tag{21}$$

$$v_2(\pm a, y) = 0, \tag{22}$$

$$v_2(x, b_2) = 0, \tag{23}$$

$$v_1(x, 0) = v_2(x, 0), \tag{24}$$

$$\mu_1 \frac{\partial v_1(x, y)}{\partial y}\bigg|_{y=0} = \mu_2 \frac{\partial v_2(x, y)}{\partial y}\bigg|_{y=0}. \tag{25}$$

Ea a fost rezolvată în lucrarea citată [2] printr-o metodă directă. Noi am reluat problema în cazul conductei de secțiune oarecare în scopul găsirii unor metode generale de obținere a vitezelor celor două fluide în contact [5]. Ca ilustrare a unei metode de aproximații succesive propusă, am determinat distribuția de viteze în conducta dreptunghiulară, care coincide cu cea din [2]. Vom expune aici pe scurt procedeul direct pentru a pune în evidență o formă diferită a coeficienților, formă utilă în calculul debitelor.

Soluția ecuației (18), care satisface condițiile (20) și (21) pe frontierele solide ale domeniului D_1, este, [5] p. 319,

$$v_1(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[B_n \left(\operatorname{ch} \lambda_n y + \frac{\operatorname{ch} \lambda_n b_1}{\operatorname{sh} \lambda_n b_1} \operatorname{sh} \lambda_n y \right) + \frac{2K_1}{a} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \left(1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\operatorname{sh} \lambda_n y}{\operatorname{sh} \lambda_n b_1} \right) \right] \cos \lambda_n x, \tag{26}$$

unde λ_n sînt valorile proprii (6). Tot așa, soluția ecuației (19), care satisface condițiile (22) și (23) pe frontierele solide ale domeniului D_2, este

$$v_2(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[A_n \left(\operatorname{ch} \lambda_n y - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n b_2}{\operatorname{sh} \lambda_n b_2} \operatorname{sh} \lambda_n y \right) + \frac{2K_2}{a} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \left(1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\operatorname{sh} \lambda_n y}{\operatorname{sh} \lambda_n b_2} \right) \right] \cos \lambda_n x. \tag{27}$$

Vom nota de această dată

$$B_n = -\frac{2K_1}{a}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\mathcal{B}_n, \tag{28}$$

$$A_n = -\frac{2K_2}{a}\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\mathcal{A}_n. \tag{29}$$

Cu noile notații vitezele se scriu

$$v_1(x, y) = \frac{2K_1}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1 + \frac{\operatorname{sh}\lambda_n y}{\operatorname{sh}\lambda_n b_1} - \mathcal{B}_n\left(\operatorname{ch}\lambda_n y + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\operatorname{ch}\lambda_n b_1}{\operatorname{sh}\lambda_n b_1}\operatorname{sh}\lambda_n y\right)\right]\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\cos\lambda_n x, \tag{30}$$

$$v_2(x, y) = \frac{2K_2}{a}\sum_{n=0}^{\infty}\left[1 - \frac{\operatorname{sh}\lambda_n y}{\operatorname{sh}\lambda_n b_2} - \mathcal{A}_n\left(\operatorname{ch}\lambda_n y - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\operatorname{ch}\lambda_n b_2}{\operatorname{sh}\lambda_n b_2}\operatorname{sh}\lambda_n y\right)\right]\frac{(-1)^n}{\lambda_n^3}\cos\lambda_n x. \tag{31}$$

Coeficienții $\mathcal{A}_n$ și $\mathcal{B}_n$ se determină din condițiile (24) și (25) de pe suprafața de contact a fluidelor, adică pentru $y = 0$. Prin identificarea coeficienților funcțiilor proprii de același rang obținem sistemul

$$K_1(1 - \mathcal{B}_n) = K_2(1 - \mathcal{A}_n), \tag{32}$$

$$\frac{\mu_1 K_1}{\operatorname{sh}\lambda_n b_1}(1 - \mathcal{B}_n \operatorname{ch}\lambda_n b_1) = -\frac{\mu_1 K_2}{\operatorname{sh}\lambda_n b_2}(1 - \mathcal{A}_n \operatorname{ch}\lambda_n b_2). \tag{33}$$

Să observăm că după (16) avem

$$\mu_1 K_1 = \mu_2 K_2 = -P, \tag{34}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{35}$$

Sistemul (32), (33) devine

$$\mu_2(1 - \mathcal{B}_n) = \mu_1(1 - \mathcal{A}_n), \tag{36}$$

$$\operatorname{sh}\lambda_n b_2(1 - \mathcal{B}_n \operatorname{ch}\lambda_n b_1) = -\operatorname{sh}\lambda_n b_1(1 - \mathcal{A}_n \operatorname{ch}\lambda_n b_2). \tag{37}$$

Rezolvarea sistemului conduce la următoarele expresii pentru coeficienții $\mathcal{A}_n$ și $\mathcal{B}_n$:

$$\mathcal{A}_n = \frac{\mu_2(\operatorname{sh}\lambda_n b_1 + \operatorname{sh}\lambda_n b_2) + (\mu_1 - \mu_2)\operatorname{ch}\lambda_n b_1 \cdot \operatorname{sh}\lambda_n b_2}{\mu_1 \operatorname{ch}\lambda_n b_1 \cdot \operatorname{sh}\lambda_n b_2 + \mu_2 \operatorname{ch}\lambda_n b_2 \cdot \operatorname{sh}\lambda_n b_1}, \tag{38}$$

$$\mathcal{B}_n = \frac{\mu_1(\operatorname{sh}\lambda_n b_1 + \operatorname{sh}\lambda_n b_2) + (\mu_2 - \mu_1)\operatorname{sh}\lambda_n b_1 \cdot \operatorname{ch}\lambda_n b_2}{\mu_1 \operatorname{ch}\lambda_n b_1 \cdot \operatorname{sh}\lambda_n b_2 + \mu_2 \operatorname{ch}\lambda_n b_2 \cdot \operatorname{sh}\lambda_n b_1}. \tag{39}$$

Formulele (30) și (31), cu coeficienții (38) și (39) reprezintă distribuția vitezelor în mișcarea stratificată a celor două fluide sub același gradient de presiune.

4. CALCULUL DEBITELOR PENTRU CURGEREA STRATIFICATĂ ÎN CONDUCTE

Debitele celor două lichide stratificate se pot calcula pe baza formulelor vitezelor, integrînd pe domeniile corespunzătoare :

$$Q_1 = \int_{-a}^{a} \int_{-b_1}^{0} v_1(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, \tag{40}$$

respectiv

$$Q_2 = \int_{-a}^{a} \int_{0}^{b_2} v_2(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{41}$$

Nu vom insista asupra calculelor și vom da direct rezultatele :

$$Q_1 = \frac{4K_1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b_1}{\lambda_n^4} - \frac{1 + \mathcal{B}_n}{\lambda_n^5} \operatorname{th} \frac{\lambda_n b_1}{2} \right], \tag{42}$$

$$Q_2 = \frac{4K_2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b_2}{\lambda_n^4} - \frac{1 + \mathcal{A}_n}{\lambda_n^5} \operatorname{th} \frac{\lambda_n b_2}{2} \right]. \tag{43}$$

Deoarece valorile proprii λ_n au expresia (6) putem scrie debitele și sub forma :

$$Q_1 = \frac{128}{\pi^4} K_1 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b_1}{2a} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1 + \mathcal{B}_n}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b_1}{2a} \right], \tag{44}$$

$$Q_2 = \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \sum_{n=} \left[\frac{b_2}{2a} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1 + \mathcal{A}_n}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b_2}{2a} \right]. \tag{45}$$

Reamintim că în conformitate cu relația (17), $b_1 + b_2$ reprezintă înălțimea conductei dreptunghiulare. Coeficienții $\mathcal{A}_n$ și $\mathcal{B}_n$ au expresiile (38) și (39).

Vom considera acum unele cazuri limită pentru curgerea studiată. Ele vor constitui un mijloc de verificare a formulelor stabilite pentru debite și totodată vor defini debitele de referință.

— *Cazul* $b_1 = 0$.

Din (17) rezultă $b_2 = 2b$.

Formula (44) dă

$$Q_1 = 0, \tag{46}$$

deoarece primul termen din paranteză conține factor pe b_1, iar în al doilea b_1 intervine ca factor în argumentul tangentei hiperbolice.

Pentru Q_2 dat de (45) este necesar calculul prealabil al coeficienților $\mathcal{A}_n$. Formula (38) pentru $b_1 = 0$ conduce la valoarea

$$\mathcal{A}_n = 1. \tag{47}$$

Astfel

$$Q_2 = \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b}{a} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right]. \tag{48}$$

După cum rezultă din compararea cu formula (10) am obținut debitul din curgerea fluidului de viscozitate μ_2 în întreaga conductă. Îl vom numi debit de referință al fluidului μ_2 și-l vom nota Q_2^0.

— *Cazul* $b_2 = 0$.

Din (17) rezultă $b_1 = 2b$

Pentru calculul debitului Q_1 din (44) vom calcula coeficienții $\mathcal{B}_n$. Din (39) pentru $b_2 = 0$ găsim

$$\mathcal{B}_n = 1. \tag{49}$$

Obținem

$$Q_1 = \frac{128}{\pi^4} K_1 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b}{a} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right]. \tag{50}$$

Din formula (45) rezultă

$$Q_2 = 0. \tag{51}$$

Astfel Q_1 reprezintă debitul în curgerea fluidului de viscozitate μ în întreaga conductă. Îl vom nota Q_1^0 și-l vom numi debit de referință

— *Cazul* $\mu_1 = \mu_2 = \mu$.

Să admitem că cele două fluide stratificate au viscozități dinamice egale. Din (38) și (39) rezultă :

$$\mathcal{A}_n = \frac{\operatorname{sh}\lambda_n b_1 + \operatorname{sh}\lambda_n b_2}{\operatorname{sh}\lambda_n (b_1 + b_2)} = \mathcal{B}_n. \tag{52}$$

Cu aceste expresii ale coeficienților, formulele (44) și (45) dau debitele :

$$Q_1 = \frac{128}{\pi^4} Ka^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{b_1}{2a} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1}{\pi} \left[1 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\operatorname{sh}\lambda_n b_1 + \operatorname{sh}\lambda_n b_2}{\operatorname{sh}\lambda_n (b_1 + b_2)} \right] \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b_1}{2a} \right\},$$

$$Q_2 = \frac{128}{\pi^4} Ka^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{b_2}{2a} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1}{\pi} \left[1 + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\operatorname{sh}\lambda_n b_1 + \operatorname{sh}\lambda_n b_2}{\operatorname{sh}\lambda_n (b_1 + b_2)} \right] \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b_2}{2a} \right\}.$$

Vom însuma cele două debite. Calcule elementare arată că

$$\left[1 + \frac{\operatorname{sh}\lambda_n b_1 + \operatorname{sh}\lambda_n b_2}{\operatorname{sh}\lambda_n (b_1 + b_2)} \right] \left[\operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b_1}{2a} + \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b_2}{2a} \right] =$$

$$= 2 \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b_1 + b_2}{2a}.$$

Astfel

$$Q_1 + Q_2 = \frac{128}{\pi^4} Ka^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b_1 + b_2}{2a} \frac{1}{(2n+1)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b_1 + b_2}{2a} \right].$$

Avînd în vedere relația (17), obținem

$$Q_1 + Q_2 = \frac{128}{\pi^4} Ka^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{b}{a} \frac{1}{(2n+1)^4} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{b}{a} \right]. \tag{53}$$

Suma debitelor este egală cu debitul din curgerea fluidului de viscozitate μ, singur în întreaga conductă, așa cum rezultă din compararea lui (53) cu (10). Rezultatul este valabil dacă cele două fluide diferă prin alte caracteristici în afară de viscozități. El apare ca banal cînd cele două lichide sînt identice.

5. PARAMETRI ADIMENSIONALI

Vom introduce în cele ce urmează o serie de parametri adimensionali care au un rol esențial în problema studiată.

Un prim parametru este caracteristica geometrică a conductei dreptunghiulare, care reprezintă raportul între înălțimea și lățimea conductei :

$$\frac{2b}{2a} = C. \tag{54}$$

Parametri de stratificare sînt

$$\frac{b_1}{2a} = h_1, \qquad \frac{b_2}{2a} = h_2. \tag{55}$$

Dacă împărțim relația (17) cu $2a$ și ținem seama de (55), obținem

$$h_1 + h_2 = C. \tag{56}$$

Să observăm că pentru o conductă de secțiune pătrată $2a \times 2a$, caracteristica geometrică C, definită la (54), este egală cu unitatea,

$$C = 1, \tag{57}$$

așa încît relația (56) între parametrii de stratificare se scrie

$$h_1 + h_2 = 1. \tag{58}$$

Un alt parametru important este raportul viscozităților dinamice ale celor două fluide. Vom nota

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = m, \qquad \frac{\mu_1}{\mu_2} = m', \tag{59}$$

cu relația evidentă

$$m = \frac{1}{m'}. \tag{60}$$

Fie Q_1 debitul lichidului de viscozitate μ_1 în mișcarea stratificată. În absența celui de-al doilea lichid ($h_2 = 0$), lichidul μ_1 ar curge cu debitul Q_1^0 dat de formula (50), pe care l-am numit debit de referință. Vom numi cîtul adimensional al celor două debite debit raportat și-l vom nota q_1 :

$$q_1 = \frac{Q_1}{Q_1^0}. \tag{61}$$

În mod analog, vom numi debit raportat q_2 cîtul între debitul Q_2 al lichidului de viscozitate μ_2 pentru curgerea stratificată și debitul de referință Q_2^0 cînd lichidul ar curge singur în întreaga conductă sub același gradient de presiune :

$$q_2 = \frac{Q_2}{Q_2^0}. \tag{62}$$

Vom transcrie acum formulele de bază, făcînd să apară parametrii adimensionali :

$$\mathcal{A}_n = \frac{\mathrm{sh}(2n+1)\pi h_1 + \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_2 + (m'-1)\mathrm{ch}(2n+1)\pi h_1 \cdot \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_2}{m'\mathrm{ch}(2n+1)\pi h_1 \cdot \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_2 + \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_1 \cdot \mathrm{ch}(2n+1)\pi h_2}, \tag{63}$$

$$\mathcal{B}_n = \frac{\mathrm{sh}(2n+1)\pi h_1 + \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_2 + (m-1)\mathrm{sh}(2n+1)\pi h_1 \cdot \mathrm{ch}(2n+1)\pi h_2}{\mathrm{ch}(2n+1)\pi h_1 \cdot \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_2 + m\mathrm{sh}(2n+1)\pi h_1 \cdot \mathrm{ch}(2n+1)\pi h_2}. \tag{64}$$

Se observă că și constantele $\mathcal{A}_n$ și $\mathcal{B}_n$ sînt adimensionale. Debitele de referință (50), respectiv (48), se scriu :

$$Q_1^0 = \frac{128}{\pi^4} K_1 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[C \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \mathrm{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} C \right], \tag{65}$$

$$Q_2^0 = \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[C \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \mathrm{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} C \right]. \tag{66}$$

Debitele (44) și (45) din mișcarea stratificată se scriu

$$Q_1 = \frac{128}{\pi^4} K_1 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[h_1 \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1+\mathcal{B}_n}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \mathrm{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} h_1 \right], \tag{67}$$

$$Q_2 = \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[h_2 \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1+\mathcal{A}_n}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \mathrm{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} h_2 \right]. \tag{68}$$

Pentru o conductă dată prin caracteristica ei geometrică C, seriile din (65) sau (66) au o valoare numerică determinată :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} \left[C \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \mathrm{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} C \right]. \tag{69}$$

Debitele raportate vor fi prin urmare :

$$q_1 = \frac{1}{S}\sum_{n=0}^{\infty}\left[h_1\frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1+\mathcal{B}_n}{\pi}\frac{1}{(2n+1)^5}\,\mathrm{th}\,\frac{(2n+1)\pi}{2}h_1\right], \quad (70)$$

$$q_2 = \frac{1}{S}\sum_{n=0}^{\infty}\left[h_2\frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{1+\mathcal{A}_n}{\pi}\frac{1}{(2n+1)^5}\,\mathrm{th}\,\frac{(2n+1)\pi}{2}h_2\right]. \quad (71)$$

În particular, în cazul conductei pătrate ($C = 1$) :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}\,\mathrm{th}\,\frac{(2n+1)\pi}{2} = 0{,}42798, \quad (72)$$

$$\frac{1}{S} = 2{,}336557. \quad (73)$$

În încheiere, vom remarca faptul că în cazul curgerii unui singur lichid în întreaga conductă, debitul raportat este egal cu unitatea. În cazul în care prin injecția unui al doilea lichid, cu o viscozitate și într-un strat de grosime convenabile, s-ar transporta un debit mai mare decît cel de referință, atunci debitul raportat ar avea o valoare supraunitară. Aceasta este situația pe care urmărim să o punem în evidență și de aici rezultă necesitatea studierii variației debitului raportat în funcție de diferiții parametri ce intervin.

Așa cum a arătat studiul mișcării stratificate de tip Poiseuille între două plăci, injecția inferioară sau injecția superioară conduc la rezultate similare care se pot transpune. De aceea ne vom limita la studiul injecției inferioare, materializată de exemplu prin injecția cu apă în transportul petrolului.

6. DEPENDENȚA DEBITULUI TRANSPORTAT DE VISCOZITĂȚI LA INJECȚIA INFERIOARĂ

Să admitem că inițial în conducta dreptunghiulară curge fluidul de viscozitate μ_2 cu debitul de referință Q_2^0 și să injectăm un fluid de viscozitate μ_1 cu densitate mai mare ca a primului ($\rho_1 > \rho_2$) astfel încît el să ocupe un strat de grosime b_1 căruia îi corespunde parametrul h_1. Fluidului inițial îi revine atunci, în conformitate cu (17), o grosime a stratului :

$$b_2 = 2b - b_1, \quad (74)$$

căreia îi corespunde parametrul h_2 legat de h_1 conform lui (56) prin relația

$$h_2 = C - h_1. \quad (75)$$

Ne-am fixat deci asupra unei anumite configurații a straturilor și încercăm să urmărim variația debitului transportat Q_2 în funcție de visco-

zitatea μ_1 a fluidului injectat. Pentru aceasta vom deriva în raport cu μ_1 debitul Q_2 scris la (68):

$$\frac{dQ_2}{d\mu_1} = -\frac{128}{\pi^5} K_2 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\mathcal{A}_n}{d\mu_1} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} h_2. \tag{76}$$

Din formula (63) a coeficienților $\mathcal{A}_n$ se vede că aceștia depind de μ_1 numai prin intermediul parametrului adimensional m' dat de (59). Vom deriva prin intermediul acestui parametru:

$$\frac{d\mathcal{A}_n}{d\mu_1} = \frac{d\hat{\mathcal{A}}_n}{dm'} \frac{dm'}{d\mu_1} = \frac{1}{\mu_2} \frac{d\mathcal{A}_n}{dm'}. \tag{77}$$

Calculele conduc la expresia derivatei:

Deoarece argumentele funcțiilor hiperbolice sînt pozitive și cosinusul hiperbolic este supraunitar, rezultă

$$\frac{d\mathcal{A}_n}{dm'} > 0. \tag{79}$$

Revenim în (76) cu (77)

$$\frac{dQ_2}{d\mu_1} = -\frac{128}{\pi^5} K_2 a^4 \frac{1}{\mu_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d\mathcal{A}_n}{dm'} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} h_2. \tag{80}$$

Termenii seriei sînt pozitivi, astfel încît suma ei este un număr pozitiv. Rezultă imediat că derivata este totdeauna negativă,

$$\frac{dQ_2}{d\mu_1} < 0, \tag{81}$$

adică debitul transportat Q_2 descrește cînd viscozitatea μ_1 crește.

În concluzie, la o configurație a straturilor aleasă cu cît viscozitatea μ_1 a lichidului injectat este mai mare, cu atît debitul transportat Q_2 este mai mic.

Să presupunem că viscozitatea μ_1 tinde spre infinit, ceea ce din punct de vedere fizic ar corespunde solidificării domeniului D_1 ocupat de fluidul injectat. Cum debitul Q_2 depinde de μ_1 numai prin $\mathcal{A}_n$ și acesta la rîndul lui de μ_1 numai prin parametrul m' vom face pe rînd:

$$\lim_{\mu_1 \to \infty} m' = 0,$$

$$\lim_{m'\to 0} \mathcal{A}_n = \frac{\operatorname{ch}(2n+1)\pi h_1 \cdot \operatorname{sh}(2n+1)\pi h_2}{\operatorname{ch}(2n+1)\pi h_1 \cdot \operatorname{sh}(2n+1)\pi h_2} = 1,$$

și, în definitiv,

$$\lim_{\mu_1\to\infty} Q_2 = \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \sum_{n=0}^{\infty} \left[h_2 \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} h_2 \right].$$

Compararea formulei cu (10) arată că acesta reprezintă debitul curgerii fluidului de viscozitate μ_2 într-o conductă de înălțime b_2.

Debitul calculat ca limită corespunde interpretării fizice pe care am dat-o anticipat.

Dacă grosimea straturilor a fost aleasă, pentru a obține un debit transportat Q_2 cît mai mare trebuie ca viscozitatea μ_1 a fluidului injectat să fie cît mai mică.

7. DEPENDENȚA DEBITULUI TRANSPORTAT ÎN CONDUCTĂ DE GROSIMEA STRATULUI INJECTAT

În cele ce urmează ne propunem să studiem variația debitului transportat în funcție de grosimea stratului injectat atunci cînd viscozitățile fluidelor sînt stabilite, adică la o anumită valoare a parametrului m' (sau m). Este avantajos să cercetăm variația debitului raportat q_2 care findică în ce raport se află debitul transportat cînd are loc injecția față de cel în absența ei, adică față de debitul de referință.

Ne vom fixa deci atenția asupra debitului raportat (71) la care se adaugă legătura (75) între parametrii de stratificare.

Domeniul de variație al parametrului h_1 este $[0, C]$. Cele două situații limită corespunzătoare capetelor intervalului au fost analizate pentru debite și mărimi dimensionale la paragraful 4° (cazul $b_1 = 0$ și cazul $b_2 = 0$). Rezultatele se pot transpune în mărimi adimensionale, pentru debitele raportate.

1. *Cazul limită* $h_1 = 0$. Din (75) rezultă $h_2 = C$. Din (63) se calculează

$$\mathcal{A}_n|_{h_1=0} = 1. \tag{82}$$

Coeficienții $\mathcal{A}_n$ sînt egali cu unitatea, indiferent de rangul n și valoarea parametrului m', dacă $h_1 = 0$ ($h_2 = C$). Înlocuind aceste valori în (71) obținem

$$q_2 = \frac{1}{S} \sum_{n=0}^{\infty} \left[C \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} C \right].$$

Cum seria din această formulă este tocmai cea a cărei sumă a fost notată la (69) cu S, avem

$$q_2|_{h_1=0} = 1. \tag{83}$$

Pentru debitul raportat q_1 observăm că în formula (70), h_1 intervine ca factor în primul termen și ca factor în argumentul tangentei hiperbolice. Pentru $h_1 = 0$ ambii termeni se anulează, deci

$$q_1|_{h_1=0} = 0. \tag{84}$$

2. *Cazul limită* $h_1 = C$. Din (75) rezultă $h_2 = 0$.
Din formula (71) se deduce imediat

$$q_2|_{h_1=C} = 0. \tag{85}$$

Pentru q_1 dat de (70) se calculează întîi coeficienții $\mathcal{B}_n$ din (64):

$$\mathcal{B}_n|_{h_1=C} = 1. \tag{86}$$

Coeficienții $\mathcal{B}_n$ sînt egali cu unitatea, independent de rangul lor n și de valoarea parametrului m, atunci cînd $h_1 = C$ ($h_2 = 0$). Formula (70) se scrie:

$$q_1 = \frac{1}{S}\sum_{n=0}^{\infty}\left[C\frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi}\frac{1}{(2n+1)^5}\operatorname{th}\frac{(2n+1)\pi}{2}C\right].$$

Dacă ținem seama de (69), avem

$$q_1|_{h_1=C} = 1. \tag{87}$$

Așadar la capetele intervalului de variație a lui h_1, adică pentru $h_1 = 0$ și $h_1 = C$, debitul raportat q_2 ia valorile unu, respectiv zero. Rămîne de văzut comportarea lui în interval și anume dacă q_2 ar putea depăși unitatea. Atunci debitul Q_2 transportat prin procedeul de injecție ar depăși valoarea de referință Q_2^0 în absența injecției.

Aici au fost prețioase indicațiile date de studiul mișcării Poiseuille plane [1]. În acel caz creșterea era posibilă dacă viscozitatea lichidului injectat era inferioară celei a lichidului transportat și grosimea stratului injectat suficient de mică. Creșterea debitului se obținea deci la limita din stînga a intervalului $[0, C]$ în care variază h_1.

Pentru studiul variației funcției q_2 în raport cu h_1 vom calcula derivata $\frac{dq_2}{dh_1}$.

Deoarece q_2 depinde de h_1 atît direct, cît și prin intermediul lui h_2, se înlocuiește h_2 în conformitate cu (75) prin $C - h_1$ și se derivează în raport cu h_1 sau se derivează prin intermediul lui h_2, ținînd seama că

$$\frac{dh_2}{dh_1} = -1. \tag{88}$$

La rîndul lor coeficienții $\mathcal{A}_n$ depind de h_1 așa încît din (71) obținem prin derivare

$$\frac{dq_2}{dh_1} = \frac{1}{S}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{(2n+1)^4} + \frac{1+\mathcal{A}_n}{2}\frac{1}{(2n+1)^4}\frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{(2n+1)\pi}{2}h_2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\pi}\frac{1}{(2n+1)^5}\frac{d\mathcal{A}_n}{dh_1}\operatorname{th}\frac{(2n+1)\pi}{2}h_2\right]. \tag{89}$$

Din formula (63) se calculează

$$\frac{d\mathcal{A}_n}{dh_1} = \frac{(2n+1)\pi}{[m'\operatorname{ch}(2n+1)\pi h_1 \cdot \operatorname{sh}(2n+1)\pi h_2 + \operatorname{sh}(2n+1)\pi h_1 \cdot \operatorname{ch}(2n+1)\pi h_2]^2} \times$$

$$\times \{(m'-1)\operatorname{sh}(2n+1)\pi h_1 + (m'-1)\operatorname{sh}(2n+1)\pi h_2 -$$

$$- (m'-1)\operatorname{ch}(2n+1)\pi h_1 \cdot \operatorname{sh}(2n+1)\pi h_1 -$$

$$- (m'-1)\operatorname{ch}(2n+1)\pi h_2 \cdot \operatorname{sh}(2n+1)\pi h_2 +$$

$$+ [\operatorname{ch}(2n+1)\pi h_1 - \operatorname{ch}(2n+1)\pi h_2][m'\operatorname{ch}(2n+1)\pi h_2 \cdot \operatorname{sh}(2n+1)\pi h_1 +$$

$$+ \operatorname{ch}(2n+1)\pi h_1 \cdot \operatorname{sh}(2n+1)\pi h_2]\}. \tag{90}$$

Dacă se înlocuiește (90) în (89) se obține derivata debitului raportat q_2 în raport cu mărimea h_1. Forma complicată a acestei derivate o face inoperantă pentru un studiu analitic al semnului ei cînd $h_1 \in [0, C]$. Dar pentru concluziile la care vrem să ajungem este suficient să determinăm semnul derivatei la capătul $h_1 = 0$ al intervalului. Pentru $h_1 = 0$ avem $h_2 = C$ și $\mathcal{A}_n = 1$, după cum s-a calculat la (82). Apoi, din (90), dacă ținem seama de identitatea, [4] p. 39,

$$\frac{\operatorname{ch}u - 1}{\operatorname{sh}u} = \operatorname{th}\frac{u}{2},$$

obținem

$$\left.\frac{d\mathcal{A}_n}{dh_1}\right|_{h_1=0} = -\frac{(2n+1)\pi}{m'}\operatorname{th}\frac{(2n+1)\pi}{2}C. \tag{91}$$

Avem deci din (89)

$$\left.\frac{dq_2}{dh_1}\right|_{h_1=0} = \frac{1}{S}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\left[-1 + \frac{1}{\operatorname{ch}^2\frac{(2n+1)\pi}{2}C} + \frac{1}{m'}\operatorname{th}^2\frac{(2n+1)\pi}{2}C\right]. \tag{92}$$

Dacă se înlocuiește $\frac{1}{m'}$ cu m, atunci operații elementare efectuate asupra termenilor dintre croșete conduc la forma

$$\left.\frac{dq_2}{dh_1}\right|_{h_1=0} = \frac{m-1}{S}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}\,\mathrm{th}^2\frac{(2n+1)\pi}{2}\,C. \tag{93}$$

Deoarece suma seriei de termeni pozitivi din (93) este un număr pozitiv, semnul derivatei în punctul $h_1 = 0$ depinde exclusiv de semnul factorului $m - 1$. Există deci următoarele posibilități:

a) $m < 1$ (adică $\mu_1 > \mu_2$) $\left.\frac{dq_2}{dh_1}\right|_{h_1=0} < 0,$

b) $m = 1$ (adică $\mu_1 = \mu_2$) $\left.\frac{dq_2}{dh_1}\right|_{h_1=0} = 0,$

c) $m > 1$ (adică $\mu_1 < \mu_2$) $\left.\frac{dq_2}{dh_1}\right|_{h_1=0} > 0.$

Dacă se injectează un lichid mai viscos decît cel transportat (cazul a.) debitul raportat q_2, care are valoarea $q_2 = 1$ pentru $h_1 = 0$, pornește descrescător cu h_1 și scade pînă la valoarea $q_2 = 0$ pentru $h_1 = C$.

Dacă lichidul injectat are viscozitatea μ_1 mai mică decît μ_2 a celui transportat (cazul c.), atunci debitul raportat care are valoarea 1 pentru $h_1 = 0$ și derivata pozitivă pornește crescător cu h_1 depășind unitatea. Deoarece pentru $h_1 = C$ el se anulează, există în intervalul $[0, C]$ un punct h_1^* pentru care q_2 atinge o valoare maximă q_2^* supraunitară.

Am pus astfel în evidență faptul că la mișcarea în conductă procedeul de injecție poate duce la creșterea debitului transportat peste valoarea debitului în absența injecției.

Mai mult, din (93) rezultă că valoarea derivatei în punctul $h_1 = 0$ este cu atît mai mare și debitul raportat cu atît mai repede crescător cu cît m este mai mare sau cu cît viscozitatea fluidului de injecție este mai mică decît a celui transportat.

Pentru a cunoaște comportarea debitului raportat q_2 în vecinătatea celeilalte extremități a intervalului s-a calculat valoarea derivatei (89) pentru $h_1 = C$ ($h_2 = 0$).

Din (63) avem

$$\mathcal{A}_n|_{h_1=C} = 1. \tag{94}$$

În formula (89), cu $h_2 = 0$ și (94), primii doi termeni dintre croșete se reduc, iar ultimul se anulează, deci

$$\left.\frac{dq_2}{dh_1}\right|_{h_1=C} = 0. \tag{95}$$

Indiferent de valoarea parametrului m derivata debitului raportat q_2 se anulează la capătul din dreapta al intervalului de variație al lui h_1. Curbele reprezentative tind către zero apropiindu-se tangente de axa Oh_1.

Pe baza rezultatelor de mai sus sîntem în măsură să dăm o reprezentare calitativă a curbelor de variație a debitului raportat q_2 (fig. 3).

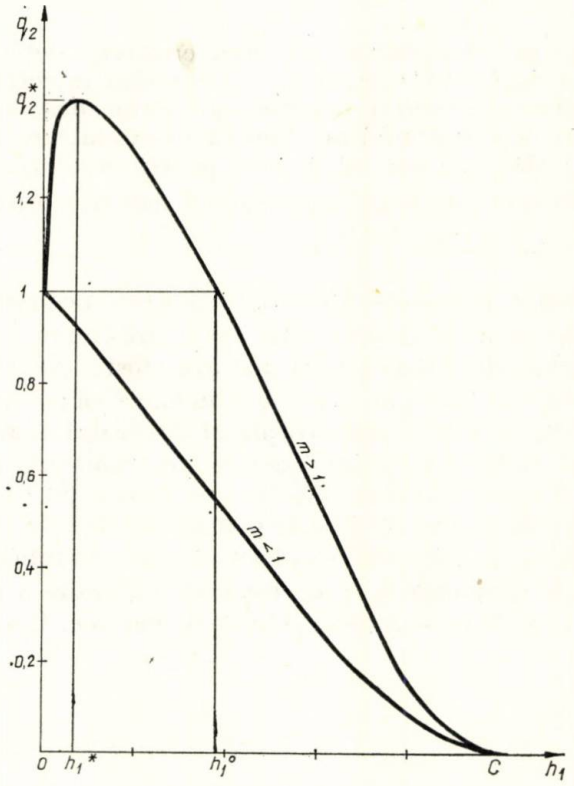


Fig. 3

8. APLICAȚII NUMERICE PENTRU INJECȚIA INFERIOARĂ

Rezultatele analitice privitoare la creșterea capacității de transport a conductelor prin procedeul de injecție au fost ilustrate cu aplicații numerice.

Ne-am stabilit la conducta de secțiune pătrată de latură $2a$, pentru care caracteristica geometrică C este după (57) egală cu unitatea, relația între parametrii de stratificare este (58) și factorul $\frac{1}{S}$ are valoarea (73).

Dacă notăm

$$\alpha_n = 1 + \mathcal{A}_n =$$

$$= \frac{2m'\mathrm{ch}(2n+1)\pi h_1 \cdot \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_2 + \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_1 + \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_2 + \mathrm{sh}(2n+1)\pi(h_1 - h_2)}{m'\mathrm{ch}(2n+1)\pi h_1 \cdot \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_2 + \mathrm{sh}(2n+1)\pi h_1 \cdot \mathrm{ch}(2n+1)\pi h_2} \tag{96}$$

și ținem seama de identitatea (12), atunci debitul transportat, raportat q_2 de la (71), se scrie:

$$q_2 = 2{,}336557 \left\{ \frac{\pi^4}{96} h_2 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \alpha_n \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} h_2 \right\}. \quad (97)$$

Așa cum am demonstrat teoretic, creșterea debitului transportat are loc numai dacă viscozitatea μ_1 a lichidului injectat este mai mică decît viscozitatea μ_2 a celui transportat sau, altfel spus, dacă parametrul m definit la (59) este supraunitar. Pentru exemplificare am ales valorile $m = 20$, 50 și 100, dar am calculat și pentru valoarea subunitară 0,5.

Seria din (97) este rapid convergentă datorită primului factor, căci $0 \leqslant \alpha_n \leqslant 2$ și $0 \leqslant \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} h_2 \leqslant 1$.

Practic, influența termenilor de rang $n \geqslant 3$ este neglijabilă.

Deoarece zona de interes este cea a grosimilor mici ale stratului injectat [1], punctele în care s-a calculat q_2 au fost alese mai dese la capătul stîng al intervalului [0, 1] de variație a lui h_1, adică pentru valori cuprinse între 0 și 0,1. Spre capătul din dreapta al intervalului, acolo unde debitul scade datorită reducerii secțiunii active de transport, punctele au fost alese mult mai rare. Îndesirea punctelor în intervalul [0, 0,1] are ca scop și determinarea aproximativă a lui h_1^* pentru care debitul transportat atinge valoarea maximă. Rezultatele calculelor se găsesc în tabela 1. Pentru cazul parametrului m subunitar nu este necesară o îndesire a punctelor în care se calculează q_2 și de aceea numărul lor este mai mic. Rezultatele se găsesc în tabela 2.

Tabela 1

h_1	$q_2\|_{m=20}$	$q_2\|_{m=50}$	$q_2\|_{m=100}$
0	1	1	1
0,01	1,2261	1,3681	1,4612
0,02	1,3191	1,4478	1,5142
0,03	1,3651	1,4759	1,5270
0,04	1,3892	1,4857	1,5271*
0,05	1,4029	1,4875*	1,5225
0,06	1,4092	1,4850	1,5155
0,07	1,4108*	1,4795	1,5064
0,08	1,4092	1,4721	1,4964
0,1	1,3992	1,4534	1,4738
0,2	1,2930	1,3272	1,3393
0,4	0,9672	0,9884	0,9958
0,5	0,7683	0,7849	0,7907
0,6	0,5556	0,5672	0,5711
0,7	0,3447	0,3515	0,3535
0.8	0,1621	0,1646	0,1655
1	0	0	0

Tabela 2

h_1	$q_2\|_{m=0,5}$
0	1
0,05	0,9489
0,1	0,8989
0,2	0,7858
0,4	0,5314
0,6	0,2801
0,8	0,0860
1	0

Pe baza datelor din tabela 1 au fost trasate curbele din figura 4.

Interpretarea rezultatelor de calcul. Procedeul de injecție duce la o creștere substanțială a debitului raportat q_2 în conducta de secțiune pătrată, adică la o creștere a debitului transportat Q_2 față de debitul Q_2^0 în absența injecției. Pentru valorile alese ale parametrului m creșterea maximă a debitului a fost de 1,4 pînă la 1,5 ori.

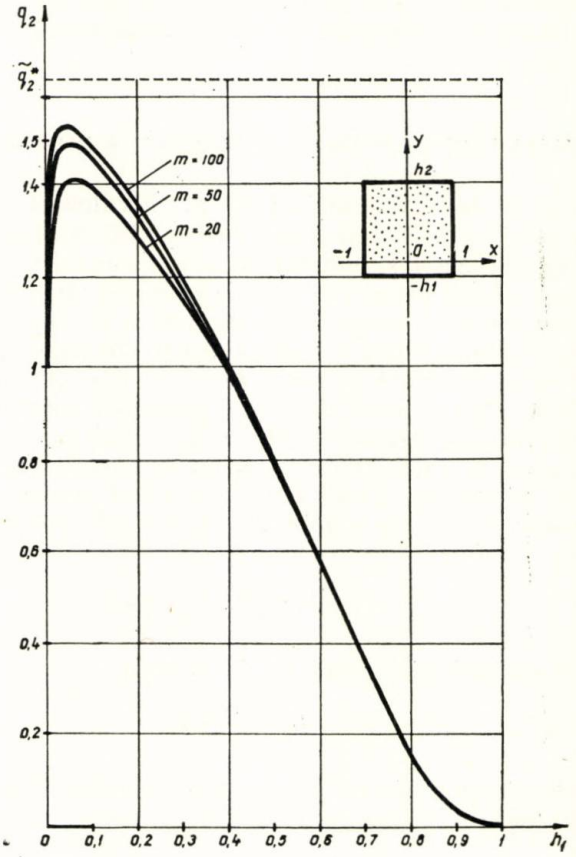


Fig. 4

Maximul debitului raportat s-a obținut pentru h_1^* în jur de $\frac{1}{20}$ adică pentru grosimi b_1 ale filmului injectat egale cu $\frac{1}{20}$ din înălțimea conductei. Valorile lui h_1^* sînt cu atît mai mici (grosime a stratului injectat mai mică) cu cît valoarea parametrului m este mai mare. Aceasta se explică prin faptul că derivata $\frac{dq_2}{dh_1}$ pentru $h_1 = 0$ crește odată cu parametrul m (formula (93) paragraful 7°). Dar o creștere importantă a debitului transportat se obține și pentru valori ale lui h_1 vecine lui h_1^*. De exemplu, la $m = 50$ creșteri apreciabile se obțin pentru grosimi ale filmului injectat

cuprinse între $\frac{1}{100}$ și $\frac{1}{10}$ din înălțimea conductei $\left(\text{în timp ce maximul este la } \frac{5}{100}\right)$.

Valorile maxime ale debitului raportat q_2^* cresc odată cu creșterea parametrului m. Se observă însă că la valori mari ale lui m, dublarea parametrului (de la 50 la 100) nu aduce o creștere relativă substanțială a lui q_2^*. Acest lucru ne-a sugerat un studiu asupra creșterii maxime posibile a debitului raportat.

9. EVALUAREA LIMITEI SUPERIOARE DE CREȘTERE A DEBITULUI PRIN INJECȚIE

Rezultatele de pînă acum au arătat că valoarea maximă a debitului transportat este cu atît mai mare cu cît viscozitatea lichidului injectat este mai mică (tabela 1 și concluziile la paragraful 6°).

De aceea ne-am propus să studiem comportarea lui q_2^* cînd μ_1 devine foarte mic sau, ceea ce este echivalent, cînd m devine foarte mare.

Pentru o grosime finită a stratului lichid injectat (h_1 finit) nu este permis a face μ_1 să tindă la zero ($m \to \infty$) căci ar conduce la un debit injectat infinit. Dar în cazul nostru și grosimea stratului injectat pentru care se obține debitul maxim tinde la zero cînd $m \to \infty$ (în tabela 1 valoarea h_1 la care se obține debitul q_2 maxim scade cînd m crește). Astfel problema nu își pierde sensul fizic și debitul transportat maxim maximorum se obține ca limită a debitului q_2 din (97) pentru $m \to \infty$ ($m' \to 0$) și $h_1 \to 0$ ($h_2 \to 1$):

$$\tilde{q}_2^* = \lim_{h_1 \to 0} \lim_{m \to \infty} q_2. \tag{98}$$

Vom trece la limită succesiv. Să notăm

$$\tilde{q}_2 = \lim_{m \to \infty} q_2. \tag{99}$$

Se vede din (97) că este suficient să calculăm limita coeficienților α_n din formula (96):

$$\tilde{\alpha}_n = \lim_{m' \to 0} \alpha_n = \frac{\operatorname{sh}(2n+1)\pi h_1 + \operatorname{sh}(2n+1)\pi h_2 + \operatorname{sh}(2n+1)\pi(h_1 - h_2)}{\operatorname{sh}(2n+1)\pi h_1 \cdot \operatorname{ch}(2n+1)\pi h_2}. \tag{100}$$

Cu expresia (100) avem:

$$\tilde{q}_2 = 2{,}336557 \left\{ \frac{\pi^4}{96} h_2 - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \tilde{\alpha}_n \cdot \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} h_2 \right\}. \tag{101}$$

Vom calcula limita acestei expresii pentru $h_1 \to 0$ ($h_2 \to 1$):

$$\tilde{q}_2^* = 2{,}336557 \left\{ \frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \tilde{\alpha}_n^* \cdot \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \right\}, \tag{102}$$

unde am notat

$$\tilde{\alpha}_n^* = \lim_{h_1 \to 0} \tilde{\alpha}_n.$$

Din (100), prin trecere la limită și înlăturarea nedeterminării, obținem

$$\tilde{\alpha}_n^* = \frac{1 + \operatorname{ch}(2n+1)\pi}{\operatorname{ch}(2n+1)\pi}.$$

Produsul care intervine în formula (102) se poate scrie mai simplu :

$$\tilde{\alpha}_n^* \cdot \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} = \operatorname{th}(2n+1)\pi. \tag{103}$$

În final,

$$\tilde{q}_2^* = 2{,}336557 \left\{ \frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th}(2n+1)\pi \right\} \tag{104}$$

sau numeric

$$\tilde{q}_2^* = 1{,}62654. \tag{105}$$

Debitul maxim maximorum este, după (62),

$$\tilde{Q}_2^* = \tilde{q}_2^* \cdot Q_2^0. \tag{106}$$

Dar din (66), (69) și (72)

$$Q_2^0 = \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \cdot 0{,}42798. \tag{107}$$

Dacă în (106) înlocuim (105) și (107) obținem

$$\tilde{Q}_2^* = 1{,}62654 \cdot \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \cdot 0{,}42798 = \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \cdot 0{,}69612. \tag{108}$$

Vom da o interpretare fizică acestui rezultat.

Presupunerea că $m \to \infty$, adică $\mu_1 \to 0$, corespunde absenței frecării la suprafața de separare, suprafață care tinde să coincidă cu latura inferioară a conductei ($h_1^* \to 0$). Mișcarea limită în conducta pătrată este similară mișcării în jumătatea superioară a unei conducte dreptunghiulare cu înălțimea dublul laturei pătratului (fig. 5).

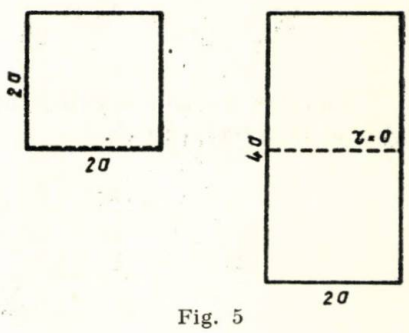


Fig. 5

Într-adevăr, pe axa de simetrie punctată a conductei dreptunghiulare de înălțime $2b = 4a$, efortul tangențial este nul. Mișcările în cele două jumătăți sînt identice. Debitul în jumătatea superioară a

conductei dreptunghiulare este jumătate din debitul în întreaga conductă, adică jumătate din debitul obținut din formula (10) pentru $b = 2a$:

$$\bar{Q} = \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \left[\frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th}(2n+1)\pi \right].$$

Calculul numeric al expresiei dintre croșete conduce la formula

$$\bar{Q} = \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \cdot 0{,}69612,$$

care coincide cu (108).

Evaluarea (105) a debitului raportat maxim posibil în conducta pătrată reprezintă o explicație pentru observația de la sfîrșitul paragrafului precedent. Pentru $m = 50$ s-a obținut $q_2^* = 1{,}4875$, iar pentru $m = 100$ $q_2^* = 1{,}5271$, ceea ce reprezintă o creștere foarte mică. Cum o creștere ulterioară a lui m poate duce la valori tinzînd cel mult către $q_2^* = 1{,}62654$ rezultă că ea nu este justificată. Valoarea $m = 50$ este suficient de mare pentru a ne conduce la o creștere mulțumitoare în limitele posibile a debitului transportat.

Interpretarea fizică permite să scriem cu ușurință debitul maxim maximorum transportat printr-o conductă de secțiune dreptunghiulară de caracteristică geometrică C adică de dimensiuni $2a \times 2b$. Acesta este egal cu jumătate din debitul în conducta de dimensiuni $2a \times 4b$ (caracteristică geometrică $2C$).

În baza formulei (10) avem

$$\tilde{Q}_2^* = \frac{1}{2} \times \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \left[2C \frac{\pi^4}{96} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th}(2n+1)\pi C \right].$$

sau

$$\tilde{Q}_2^* = \frac{128}{\pi^4} K_2 a^4 \left[C \frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th}(2n+1)\pi C \right]. \qquad (109)$$

Debitul maxim maximorum raportat se obține împărțind (109) la debitul de referință (66)

$$\tilde{q}_2^* = \frac{C \frac{\pi^4}{96} - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th}(2n+1)\pi C}{C \frac{\pi^4}{96} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} C}. \qquad (110)$$

Formula ne permite să apreciem la o conductă de formă dată creșterea maximă posibilă pentru debit cînd s-ar injecta un lichid de viscozitate foarte foarte mică în raport cu a celui transportat.

Dacă această valoare supraunitară nu este satisfăcătoare, deoarece creșterea reală obținută la un anumit parametru m este și mai mică, folosirea procedeului nu este eficientă.

10. CONCLUZII

S-a demonstrat teoretic și prin exemple calculate numeric că procedeul de injecție a unui lichid mai puțin vîscos într-un strat de grosime convenabilă poate duce la o creștere substanțială a capacității de transport a unui sistem (conductă dată și gradient de presiune dat), adică poate duce la creșterea debitului transportat.

Lucrurile se întîmplă exact ca la mișcarea între două plăci paralele [1]. Dacă în cazul curgerii între plăci debitul Q_2 putea crește pînă la o valoare de patru ori mai mare decît Q_2^0 în absența injecției, în cazul conductei dreptunghiulare creșterea este mai puțin spectaculoasă.

La plăci, prin injecția fluidului mai puțin vîscos, se reduce frecarea pe jumătate din lungimea de contact cu pereții solizi, în timp ce la conductă reducerea are loc pe o fracțiune mai mică a conturului.

Evident, efectele injecției vor fi mai mari pentru conducte dreptunghiulare cu caracteristica geometrică C mică (mai late și mai puțin înalte). Cu cît C este mai mic, cu atît efectele injecției se apropie mai mult de cele din cazul plăcilor paralele.

Dar chiar în cazul conductei de secțiune pătrată ($C = 1$) se pot obține creșteri de debit de 50—60%.

În afară de forma secțiunii conductei, debitul maxim transportat depinde de raportul m dintre viscozitatea fluidului de bază și a celui injectat.

Parametrul m determină grosimea stratului ce trebuie injectat pentru ca debitul transportat să fie maxim și odată cu aceasta mărimea debitului de injecție.

Pentru o conductă dată, valoarea maximă a debitului transportat crește cu m pînă la o valoare limită.

Debitul maxim maximorum raportat se calculează cu formula (110) în cazul conductei dreptunghiulare și are valoarea 1,62654 în cazul conductei pătrate. Alegerea unor valori prea mari ale raportului m nu este justificată de efectele ei asupra creșterii debitului.

Grosimea stratului injectat b_1^* pentru care se obține debitul transportat maxim Q_2^* este foarte mică în raport cu înălțimea $2b$ a secțiunii conductei. Această grosime scade cînd parametrul m crește.

Creșterea debitului transportat Q_2 peste valoarea Q_2^0 în absența injecției, la valori apropiate de valoarea maximă Q_2^*, se obține pentru o întreagă zonă de grosimi ale stratului de injecție, adică într-o vecinătate a valorii b_1^* la care se obține debitul maxim.

Prezentul studiu constituie în primul rînd o fundamentare teoretică a procedeului de injecție. S-au pus în evidență parametri fundamentali de care depinde creșterea debitului și modul cum trebuie ei variați pentru a obține o eficiență ridicată.

În al doilea rînd, studiul furnizează indicații prețioase pentru abordarea problemei analoage în conducte de secțiune circulară, pentru care dificultățile sînt mult sporite. Ne propunem să prezentăm respectivele rezultate într-un articol viitor.

Primită la redacție la 25 septembrie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. CORNELIU CRĂCIUN, *Creșterea debitului în mișcarea Poiseuille plană prin injecția unui alt fluid viscos*, St. cerc. mec. apl., **XXXII**, *6* (1973).
2. CR. STĂNESCU, L. DUMITRESCU, *Mișcarea unidimensională a două fluide viscoase grele separate printr-o suprafață plană*, St. cerc. mec. apl., **VII**, *4* (1956).
3. RATIP BERKER, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik, Band **VIII**, *2* (1963), Springer-Verlag.
4. I. M. RÎJIC, I. S. GRADȘTEIN, *Tabele de integrale, sume, serii și produse*, Editura Tehnică 1955.
5. CORNELIU CRĂCIUN, *Contribuții la studiul mișcării fluidelor viscoase. Mișcări fluide stratificate și cu suprafață liberă*, Teză de doctorat, 1970, Institutul politehnic Bucureșiti.

LANȚURI CINEMATICE CU CINCI ELEMENTE

A. RAICU

Institutul de construcții București

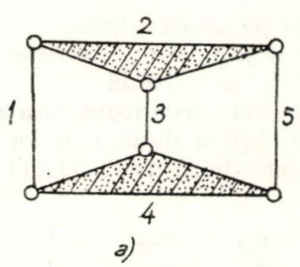
În această lucrare sînt stabilite toate posibilitățile de a lega între ele cinci corpuri rigide, în sisteme plane sau spațiale, care să formeze mecanisme sau grinzi cu zăbrele. Metodica folosită se bazează pe noțiunea de matrice asociată unui mecanism. Toate calculele se pot efectua pe calculatoare. Metodica folosită poate fi extinsă ușor la sisteme cu orice număr de elemente.

1. Sinteza structurală a sistemelor de rigide legate este necesară atît teoretic, cît și practic pentru că în această fază a proiectării se stabilesc toate posibilitățile ce trebuie analizate cinematic și dinamic ulterior pentru a alege soluția optimă [1].

Cu cinci rigide se pot obține mai multe moduri de legare și cunoscînd toate aceste posibilități se poate apoi analiza și gradul de mobilitate pentru a obține mecanisme sau grinzi cu zăbrele [2].

În literatura de specialitate sînt cunoscute mai multe metode de studiu structural a sistemelor de rigide legate între ele, în special în domeniul mecanismelor și mai puțin în domeniul grinzilor cu zăbrele. Mai uzuale sînt metodele grafice bazate pe descompunerea lanțului cinematic în grupe structurale (Assur), întîlnite în literatura rusă sau cea inspirată din aceasta [3], [4] și metodele algebrice, întîlnite în special în literatura americană actuală [5], [6], [7].

2. Unui mecanism (sau grindă cu zăbrele) i se poate asocia o matrice pătratică, formată din elemente 0 și 1 [6], unde cifra 1 indică prezența legăturii între rigidele definite prin linia și coloana ce se intersectează în dreptul cifrei 1 (fig. 1 *a*, *b*).



a)

ELEMENTUL	1	2	3	4	5
1	0	1	0	1	0
2	1	0	1	0	1
3	0	1	0	1	0
4	1	0	1	0	1
5	0	1	0	1	0

b)

Fig. 1

Prezența cifrei 1 pe o anumiză linie sau coloană arată că elementul cinematic respectiv se leagă în lanțul cinematic prin i cuple, unde i reprezintă numărul total (suma) al cifrelor 1 de pe o anumită linie sau coloană [8].

Un element nu se poate lega cu el însuși.

Într-un lanț există n elemente și c cuple (variante tip nc) [9], [10]. Dacă din cele n elemente, n_2 sînt bilatere (bare), n_3 sînt trilatere (plăci triunghiulare), n_4 sînt patrulatere etc., atunci se pot scrie următoarele relații :

$$\begin{cases} n_2 + n_3 + n_4 + \ldots + n_{n-1} = n, \\ 2n_2 + 3n_3 + 4n_4 + \ldots + (n-1)n_{n-1} = 2c, \end{cases}$$

unde $n \leqslant c \leqslant n(n-1)/2$.

Soluțiile în numere întregi ale acestui sistem determină valorile

$$n_2, n_3, n_4, \ldots, n_{n-1}.$$

În matricea asociată înseamnă că n_2 linii vor avea cifra 1 de două ori, n_3 linii vor avea cifra 1 de trei ori etc.

3. Pentru a stabili modul de legare al celor n_2 elemente bilatere, n_3 elemente trilatere etc., între ele se consideră matricea generală corespunzătoare sistemului cu cinci elemente :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ x_1 & 0 & x_5 & x_6 & x_7 \\ x_2 & x_5 & 0 & x_8 & x_9 \\ x_3 & x_6 & x_8 & 0 & x_{10} \\ x_4 & x_7 & x_9 & x_{10} & 0 \end{bmatrix}.$$

Sistemul care trebuie rezolvat este.

$$\begin{aligned} &\Sigma x_i = 2\} \text{ de } n_2 \text{ ori,} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\Sigma x_i = 3\} \text{ de } n_3 \text{ ori,} \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

unde i reprezintă indicii necunoscutelor de pe aceeași linie.

Acest sistem trebuie rezolvat în cifre 0 și 1, și cu soluțiile obținute se trece apoi la graful asociat și la mecanism sau grindă.

4. Diversele grupe de soluții pot duce la mecanisme sau grinzi cu configurație identică. Recunoașterea identității a două matrice asociate se face ușor cu ajutorul polinomului caracteristic al matricei [11]

$$P(x) = \begin{bmatrix} a_{11} - x & a_{12} & a_{13} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - x & a_{23} \ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} \ldots a_{nn} - x \end{bmatrix}.$$

Dacă polinoamele celor două matrice analizate

$$P(x) = (-1)^n A_0 x^n + (-1)^{n-1} A_1 x^{n-1} + (-1)^{n-2} A_2 x^{n-2} + \ldots + A_n$$

au aceiași coeficienți $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ înseamnă că lanțurile cinematice au o configurație identică. Rezultă de aici rolul însemnat pe care îl poate juca polinomul caracteristic în structura mecanismelor și care poate constitui un criteriu de clasificare a lor [11].

În această analiză nu este necesar să se determine coeficienții $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$, ceea ce constituie o operație dificilă, ci este suficient să se calculeze următoarele matrice :

$$M\,;\ M^2\,;\ M^3\,;\ M^4\,;\ M^5$$

și să se compare urmele lor

$$\begin{aligned} U_1 &= \Sigma a_{ii} \qquad \text{pentru matricea } M, \\ U_2 &= \Sigma a_{ii} \qquad \text{pentru matricea } M^2, \\ U_3 &= \Sigma a_{ii} \qquad \text{pentru matricea } M^3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Dacă aceste urme sînt identice la cele două matrice asociate, mecanismele (ori grinzile) sînt identice pentru că și coeficienții polinomului caracteristic sînt identici [12] :

$$\begin{aligned} A_0 &= 1, \\ A_1 &= A_0 U_1, \\ A_2 &= (A_1 U_1 - A_0 U_2)/2, \\ A_3 &= (A_2 U_1 - A_1 U_2 + A_0 U_3)/3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_n &= \left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} A_{n-k} U_k \right) / n. \end{aligned}$$

5. Pentru simplificare, fiecare tip de sistem format cu cinci rigide va fi redat în următoarea formă :

Matricea-linie $[x_1\ x_2\ x_3\ \ldots\ x_{10}]$; polinomul caracteristic ;

urmele matricelor M, M^2, M^3, M^4, M^5.

Matricea-linie se folosește la stabilirea matricei asociate și apoi a sistemului de rigide legate, iar polinomul caracteristic și urmele servesc la identificarea echivalenței a două lanțuri date.

Calculele au fost efectuate pe un calculator, iar rezultatele sînt date în cele ce urmează :

1. $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0]$; $P(x) = -x^5 + 7x^3 + 6x^2 - 3x - 2$,

$U_1 = 0$; $U_2 = 14$; $U_3 = 18$; $U_4 = 86$; $U_5 = 200$,

2. $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0]$; $P(x) = -x^5 + 9x^3 + 14x^2 + 6x$,
$U_1 = 0$; $U_2 = 18$; $U_3 = 48$; $U_4 = 186$; $U_5 = 630$,

3. $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1]$; $P(x) = -x^5 + 10x^3 + 20x^2 + 15x + 4$,
$U_1 = 0$; $U_2 = 20$; $U_3 = 60$; $U_4 = 260$; $U_5 = 1020$,

4. $[1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0]$; $P(x) = -x^5 + 8x^3 + 8x^2$,
$U_1 = 0$; $U_2 = 16$; $U_3 = 24$; $U_4 = 128$; $U_5 = 320$,

5. $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]$; $P(x) = -x^5 + 7x^3 + 6x^2$,
$U_1 = 0$; $U_2 = 14$; $U_3 = 18$; $U_4 = 98$; $U_5 = 210$,

6. $[0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]$; $P(x) = -x^5 + 7x^3 + 4x^2 - 2x$,
$U_1 = 0$; $U_2 = 14$; $U_3 = 12$; $U_4 = 90$; $U_5 = 140$,

7. $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0]$; $P(x) = -x^5 + 8x^3 + 10x^2 + x - 2$,
$U_1 = 0$; $U_2 = 16$; $U_3 = 30$; $U_4 = 132$; $U_5 = 390$,

8. $[1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1]$; $P(x) = -x^5 + 6x^3 + 4x^2 - 5x + 4$,
$U_1 = 0$; $U_2 = 12$; $U_3 = 12$; $U_4 = 52$; $U_5 = 100$,

9. $[1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1]$; $P(x) = -x^5 + 6x^3 + 2x^2 - 4x$,
$U_1 = 0$; $U_2 = 12$; $U_3 = 6$; $U_4 = 56$; $U_5 = 60$,

10. $[0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0]$; $P(x) = -x^5 + 6x^3$,
$U_1 = 0$; $U_2 = 12$; $U_3 = 0$; $U_4 = 72$; $U_5 = 0$,

11. $[0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0]$; $P(x) = -x^5 + 5x^3 - 5x + 2$,
$U_1 = 0$; $U_2 = 10$; $U_3 = 0$; $U_4 = 30$; $U_5 = 10$.

6. În literatura de specialitate, noțiunea de grindă cu zăbrele este definită numai pentru rigide cu formă de bară. Dacă această noțiune este extinsă și la sisteme care conțin rigide sub formă de plăci sau blocuri, atunci tipurile de sisteme de rigide legate prezentate la §. 5 pot fi folosite ca modele pentru grinzi dacă corespund și ca grad de mobilitate.

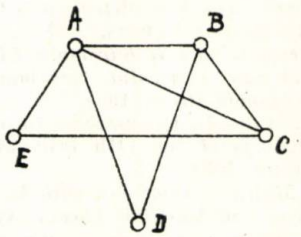
Tipurile de sisteme prezentate la § 5 pot servi și ca modele pentru grinzile cu zăbrele cu cinci noduri și formate numai din bare. Acest lucru se realizează asociind fiecărui tip cîte un graf astfel ca elementele lanțului să corespundă cu nodurile grafului, iar cuplele lanțului cinematic să cores-

pundă cu muchiile grafului. Acest graf poate fi interpretat și ca lanț cinematic format din bare și cuple multiple. În figura 2 *a*, *b*, *c* este dat ca exemplu cazul de la poziția 1, § 5.

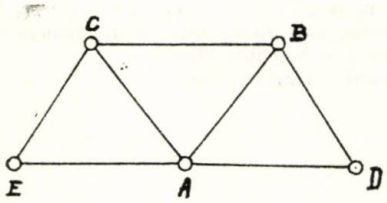
7. Gradul de mobilitate al schemelor prezentate nu este analizat în această lucrare din cauza complexității studiului dar poate face obiectul unor investigații ulterioare interesante.

a) Matricea asociată

Elementul sau nodul	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	1	1	1	1
B	1	0	1	1	0
C	1	1	0	0	1
D	1	1	0	0	0
E	1	0	1	0	0



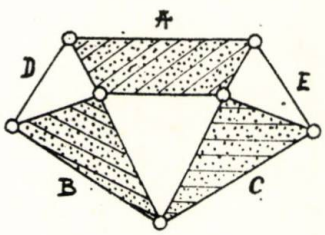
a)



b)

b) Graful asociat (grindă cu zăbrele sau lanț cinematic cu cuple multiple)

c) Lanțul cinematic



c)

Fig. 2

8. Metoda expusă pentru sinteza lanțurilor cinematice cu cinci elemente, respectiv la grinzile cu zăbrele cu cinci noduri, comportă multe calcule dar ele pot fi efectuate pe calculator astfel că elaborarea unui atlas cu scheme de lanțuri cinematice sau grinzi cu zăbrele nu mai constituie o problemă dificilă.

Primită la redacție la 24 iulie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. A. Raicu, *Contribuţii la sinteza structurală a mecanismelor spaţiale*, St. cerc. mec. apl., **27**, *3*, (1968).
2. — *Structura mecanismelor plane cu cinci elemente*, Buletinul ştiinţific al Inst construcţii Bucureşti, **XII**, *2* (1969).
3. I. I. Artobolevski, *Teoria mehanizmov*, Izd-vo Nauka, Moskva, 1965.
4. N. I. Manolescu, *O metodă unitară de alcătuire a lanţurilor cinematice şi a mecanismelor plane articulate de diferite grade de libertate şi mobilitate*, St. cerc. mec. apl., **17**, *6*, (1964).
5. F. R. E. Crossley, *A Contribution to Gruebler's Theory in the Number Synthesis of Plane Mechanisms*, Trans. ASME, J. Engng. Ind., **86** B *1* (1964).
6. — *Permutations of Kinematic Chains with Eight Members or Less from the Graph-Theoretic Viewpoint*, Developments in Theoretical and Applied Mechanics, 2, Pergamon Press, 1965.
7. F. Freudenstein, L. Dobrjansyj, *On a Theory of the Type Synthesis of Mechanisms*, Proceedings of the 11th International Congress of Applied Mechanics, Springer, Berlin, 1964.
8. A. Raicu, *Matrices Associated with Kinematic Chains with from 3 to 5 Members*, Mechanism and Machine Theory, vol. 9 (1974), Pergamon Press.
9. — *Methode pour la determination de schemas cinematiques des mecanismes*, Proceedings of the Third World Congress of the Theory of Machines and Mechanisms, D (16), (1971).
10. — *Utilizarea simbolurilor numerice şi literale în analiza şi sinteza structurală a mecanismelor*, Buletinul ştiinţific al Inst. construcţii Bucureşti, **XIV**, *1 — 2* (1971).
11. J. J. Uicker, A. Raicu, *A Method for the Identification and Recognition of Equivalence of Kinematic Chains*, Va apare în Mechanism and Machine Theory.
12. I. A. Kaplan, *Prakticeskie zaniatia po vissei matematike*, Harkov, 1968.

STUDII

SIMULAREA PE CALCULATORUL ELECTRONIC, INSTRUMENT ÎN STUDIUL MECANISMELOR COMPLEXE

de SERGIU-BORIS CONONOVICI

Centrul de mecanică a solidelor

În prezenta lucrare se prezintă metoda simulării, ca instrument pentru studiul, asistat de calculator, al comportării mecanismelor. Se arată avantajele oferite de folosire a conceptului de multipol cinematic pentru studiul mecanismelor complexe și modul în care se poate construi schema bloc, etapă intermediară a procesului de modelare. Programul de simulare cinematică a mecanismelor plane PMSIMK, realizat de autor, ilustrează modul în care se poate oferi utilizatorilor un instrument comod de cercetare. Se dau rezultatele obținute pe unele aplicații.

1. INTRODUCERE

Obiectul analizei mecanismelor îl constituie determinarea parametrilor cinematici și dinamici ai acestora.

Legate de utilizarea calculatoarelor electronice sînt metodele analitice puse sub formă numerică. Modelele matematice construite pe baza diferitelor sisteme de ipoteze dispun de un instrument foarte comod și eficient pentru rezolvarea lor, calculatorul electronic numeric (CEN).

Dacă pentru mecanismele simple utilizarea metodelor clasice pentru construirea modelului matematic și transpunerea lor în algoritme de calcul, nu ridică dificultăți prea mari, în cazul mecanismelor complexe (în cazul mecanismelor cu bare, al celor multiconture), dificultățile cresc cu complexitatea acestora.

Sînt cunoscute metode care conduc la sistematizarea calculelor, de exemplu metodele matriceale sau tensoriale, care simplifică efortul necesar din partea celui ce construiește modelul pentru rezolvare pe calculator și care permit utilizarea de proceduri sau subprograme de bibliotecă specializate.

Cu toate acestea, utilizatorul unor astfel de metode, trebuie să învingă dificultățile de construire a modelului matematic pentru cazul concret studiat și să programeze cel puțin programul principal care descrie algoritmul respectiv într-un limbaj de programare evoluat (FORTRAN, ALGOL).

În scopul facilitării activității utilizatorilor de calculatoare numerice din diverse ramuri de activitate, s-au dezvoltat în ultimii 15 ani așa-numitele metode de simulare pe calculator.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 35, NR. 1, 1976, P. 57–72

Prin modelul de simulare al unui sistem pe calculatorul electronic numeric se înțelege o reprezentare logico-matematică a acestui sistem, construită în baza considerării elementelor sale funcționale; reprezentarea este constituită într-un algoritm format prin interconectarea logică a algoritmelor corespunzătoare elementelor constituente considerate și programată în vederea rezolvării.

În sensul acestei definiții, studiul unui sistem cu ajutorul unui model de simulare trece prin următoarele etape:

— descompunerea sistemului studiat într-un set de elemente unitare din punct de vedere logic și guvernate de relații cunoscute unidirecționale de tip cauză-efect;

— modelarea prin asamblarea de operatori funcționali, eventual în termenii unui limbaj de simulare de cel mai înalt nivel, în vederea obținerii unei reprezentări abstracte a sistemului;

— rezolvarea modelului pe calculatorul electronic programat în acest scop sau capabil să suporte limbajul respectiv, în vederea obținerii soluțiilor particulare corespunzătoare parametrilor introduși în studiu, punînd în evidență comportarea sistemului în baza ipotezelor admise.

Sînt cunoscute, spre exemplu, programele de simulare analogică numerice, care oferă utilizatorului posibilitățile calculatoarelor analogice pe calculatorul numeric.

Utilizarea acestor programe, în general, se bazează pe exprimarea într-un limbaj orientat pe problemă, a schemei bloc, reprezentînd sistemul a cărui comportare este simulată. Schema este constituită din blocurile funcționale specifice calculatoarelor analogice. Chiar dacă aceste programe de simulare diferă ca formă, mod de utilizare și posibilități, au o caracteristică comună, oferă un limbaj orientat pe schemă bloc.

Tratarea în acest mod a problemelor degrevează pe cercetător de munca de construire a modelului matematic, transpunerea acestuia în formă numerică și programarea algoritmului obținut, permițîndu-i să-și concentreze eforturile asupra fenomenului fizic studiat.

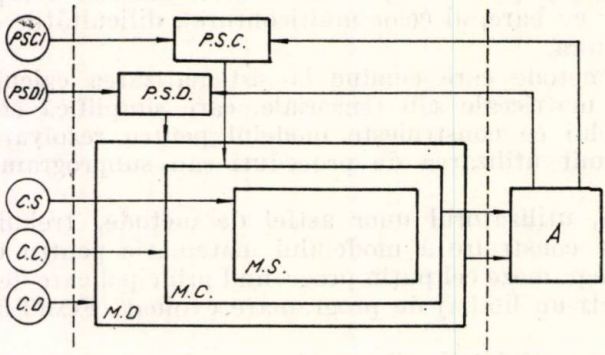


Fig. 1

Simularea comportării mecanismelor cu ajutorul CEN, implică construirea modelelor acestora, în baza unor ipoteze permițînd evidențierea anumitor proprietăți considerate importante. Se prezintă în figura 1

o schemă a procesului de simulare a mecanismelor. Prin dreptunghiuri s-au reprezentat modelele structural *MS*, cinematic *MC* și dinamic *MD*. Prin liniile punctate s-a separat partea accesibilă utilizatorului de partea suportată de *CEN*. Intrările, din partea stîngă, sînt parametrii consideraţi constanţi ai modelelor structural *CS*, cinematic *CC* și dinamic *CD*. Parametrii inițiali ai simulării necesari studiului influenței acestora asupra comportării mecanismului, care pot fi cinematici sau dinamici sînt *PSCI* și *PSDI*. Pătratul *A* reprezintă mediul de afișare al rezultatelor.

În urma intervenţiei utilizatorului, ca rezultat al interpretării rezultatelor, anumiți parametrii ai simulării, cinematici *PSC* sau dinamici *PSD*, pot primi alte valori. Procesul poate fi și automatizat.

2. CARACTERISTICILE METODELOR DE SIMULARE NUMERICĂ

Procesul de simulare pe *CEN*, în general, trebuie definit prin următorul set de informaţii :

— definirea elementelor modelului (blocurile funcţionale) ;
— definirea structurii modelului (modului de conectare al blocurilor) ;
— definirea intrărilor ;
— definirea ieșirilor ;
— opţiuni asupra modului de extragere al rezultatelor ;
— criterii pentru oprirea calculelor (în cazul proceselor iterative).

În cazul utilizării limbajelor de simulare, utilizatorul își formulează problemele cu ajutorul unui set de pseudo-instrucţiuni care permit exprimarea explicită a modelului în termeni familiari acestuia.

Crearea unui limbaj orientat pe problemă este indicată în cazul în care domeniul de aplicare și frecvența de utilizare sînt suficient de importante.

Consolele terminale la utilizator, lucrînd într-un mod interactiv, cresc avantajele oferite de simularea numerică. Modul de lucru numit în „sistem conversaţional", facilitează studiul influenței diferiților parametrii asupra sistemului modelat, procesul de simulare putînd fi controlat de utilizator prin participarea acestuia în mod direct. Terminalele prevăzute cu afișare optică, cu tuburi catodice, oferă rezultatele și sub formă grafică care completează sugestiv rezultatele numerice.

Sînt elaborate echipamente și metodologii de programare pentru reprezentarea și introducerea informației grafice, aceste posibilități lărgind și mai mult posibilitățile de aplicaţie ale simulării pe *CEN*.

3. SIMULAREA CINEMATICĂ A MECANISMELOR

Analiza cinematică a mecanismelor are ca obiect determinarea pozițiilor elementelor, traiectoriilor descrise de diferite puncte ale mecanismului, precum și a vitezelor și acceleraţiilor punctelor considerate.

Realizarea acestui deziderat printr-o modelare implică extragerea din totalitatea proprietăţilor mecanismului real a acelora legate de structura acestuia, modul în care sînt legate elementele, definirea elementelor conducătoare şi legăturilor la elementul fix, precum şi dimensiunile elementelor transformate prin factorul de scară ales k_s. Rezolvarea se face cunoscîndu-se legile de mişcare ale elementelor conducătoare.

Pentru obţinerea unui model intuitiv intermediar sub formă de schemă bloc este avantajoasă folosirea conceptului de multipol cinematic [5]. În acest sens, lanţurile cinematice, cu unul sau mai multe grade de libertate, sînt interpretate ca linii de transmisie a informaţiei de mişcare de la elementele conducătoare spre polii de ieşire consideraţi. Lanţurile cinematice elementare cu grad de mobilitate zero — grupele structurale assurice — constituie multipoli cinematici elementari, elementele unitare guvernate de relaţii unidirecţionale tip cauză-efect. Posibilitatea interconectării acestora, legării la elementele conducătoare şi la elementul fix, oferă baza necesară construirii unui model intuitiv sub formă de schemă bloc.

Grupa structurală se poate reprezenta schematic printr-un dreptunghi precedat de polii de intrare şi urmat de polii de ieşire. Polii de intrare sînt cuplele cinematice exterioare, potenţiale, iar asociaţi elementelor se pot defini polii de ieşire (cuple sau puncte), prin care se transmite mişcarea altor grupe structurale, sau sînt consideraţi ca atare. În polii de ieşire se obţin parametrii cinematici dependenţi.

Semnalul de mişcare, în cazul cuplelor de rotaţie, este exprimat de un vector sub formă complexă, vectorul de poziţie al acestora. În cazul legăturii la elementul fix, vectorul este constant.

La cuplele potenţiale de translaţie semnalul are o structură complexă şi este caracterizat de vectorul z_1^* exprimat sub formă complexă şi versorul direcţiei de alunecare — ghidajului — e^{λ} în raport cu sistemul de axe de referinţă ales (tabela 1).

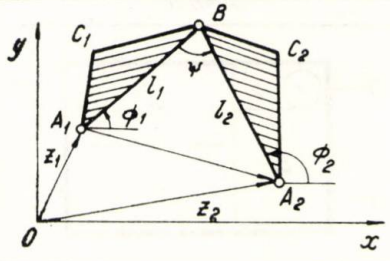
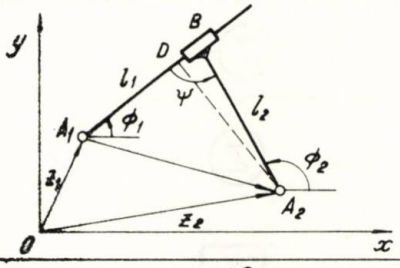
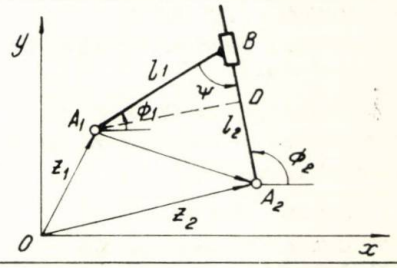
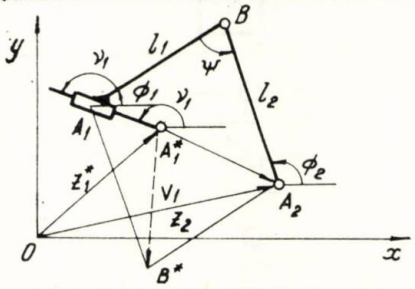
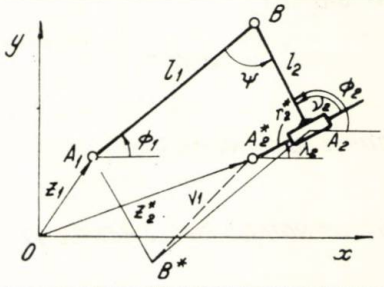
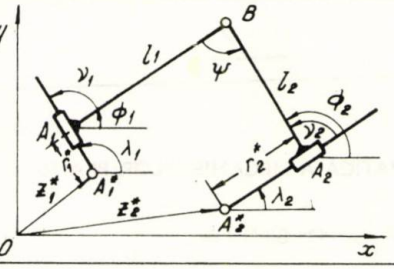
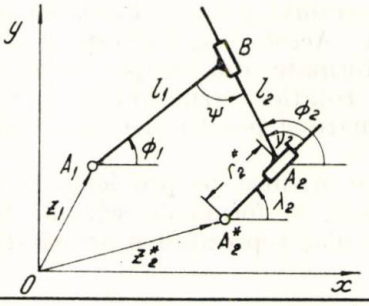
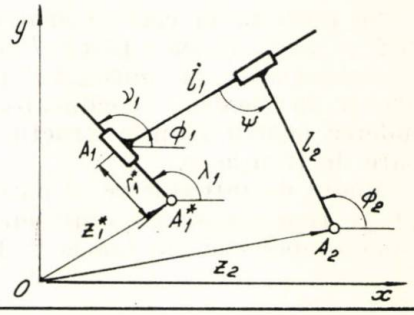
Semnalele de ieşire au, evident, aceeaşi formă funcţie de cuplele cinematice de ieşire.

Elementele conducătoare se pot interpreta ca generatoare — generatoare de semnal de mişcare — la care legile de mişcare sînt cunoscute. Se generează în acest fel parametrii independenţi. Se poate defini pentru manivela de rotaţie un generator de mişcare de rotaţie, pentru direcţia de alunecare rotitoare — ghidajul de rotaţie — un generator al versorului direcţiei variabile respective în raport cu sistemul de axe ales şi generatorul de mişcare de translaţie format de culisa motoare alunecînd de-a lungul unei direcţii fixe.

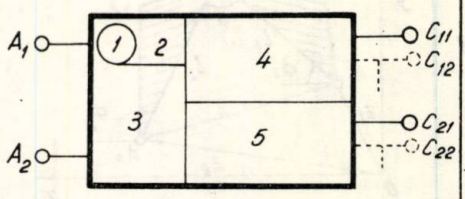
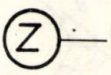
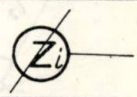
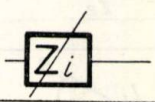
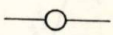
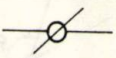
În scopul construirii schemei bloc se propun simbolurile din tabela 2 la care sînt asociate şi semnificaţiile acestora. Cu aceste notaţii se poate construi schema bloc a mecanismului studiat, punîndu-se în evidenţă fluxul informaţiei de mişcare de la elementele conducătoare — generatoare — pînă la polii de ieşire.

GRUPELE STRUCTURALE BINARE - DIADELE (notații)

Tabela I.

Aspectul	Varianta 1.	Varianta 2
1		
2		
3		
4		
5		

ELEMENTELE MODELULUI CINEMATIC Tabelul II

DEFINIREA ELEMENTULUI	SIMBOL
DIADA - GRUPA STRUCTURALA BINARĂ 1 - numărul de ordine în sch. bloc 2 - aspectul, varianta și tipul 3 - parametrii constructivi 4 - parametrii de poziție ai polilor de ieșire - elementul 1 5 - aceiași pentru - elementul 2	
MANIVELA DE ROTAȚIE (generatorul de mișcare de rotație cu rază fixă)	
GHIDAJUL DE ROTAȚIE (generatorul de mișcare de rotație cu rază variabilă)	
CULISA MOTOARE (generatorul de mișcare de translație)	
CUPLA DE ROTAȚIE	
CUPLA DE TRANSLAȚIE	
CUPLA DE ROTAȚIE CU ELEMENTUL FIX	
CUPLA DE TRANSLAȚIE CU ELEMENTUL FIX.	

4. PROGRAM PENTRU SIMULAREA CINEMATICĂ A MECANISMELOR PLANE

4.1. DESCRIERE GENERALĂ ȘI POSIBILITĂȚI

Se prezintă în cele ce urmează programul pentru simularea cinematică a mecanismelor plane *PMSIMK*. Acest program este destinat pentru simularea mecanismelor plane formate din grupe structurale binare și cu elemente conducătoare de rotație. Structura sa permite extinderea pentru grupele structurale ternare și pentru elemente conducătoare de translație.

Modul de introducere al datelor este orientat pe problemă și este bazat pe reprezentarea mecanismului obiect în forma de schemă bloc, folosind simbolurile din tabela 2. Fiecare bloc reprezintă o grupă struc-

turală binară (diadă). Toți parametrii independenți se obțin la ieșirile generatoarelor care simulează manivelele conducătoare. Parametrii independenți trebuie exprimați în funcție de unul singur, considerat parametru Lagrangean.

Fluxul informației de mișcare este prelucrat serie — cvasiparalel. Aceasta înseamnă că variația parametrilor independenți are loc cvasi-simultan, neputîndu-se în general concepe prelucrarea numerică simultană; ieșirile generatoarelor furnizează parametrii de intrare ai blocurilor conectate la acestea. După ce toate aceste blocuri fac pasul de prelucrare care conduce la obținerea parametrilor lor de ieșire, aceștia sînt interpretați ca parametrii de intrare pentru blocurile conectate la ele ș.a.m.d. Nici un bloc nu face pasul următor pînă nu sînt pregătiți parametrii săi de intrare.

În ediția referită aici programul admite următoarele limite pentru dimensiunile problemei :

6 — blocuri — diade,

3 — manivele de rotație,

6 — cuple de rotație cu batiul,

2 — ghidaje de rotație,

2 — ghidaje fixe (cuple de translație cu elementul fix),

3 — puncte de ieșire și/sau articulații pentru fiecare element de diadă sau :

1 — punct de ieșire sau articulație, și

1 — ghidaj atașat la elementul respectiv (cuplă de translație de ieșire).

Programul scris în limbaj *FORTRAN* asigură compatibilitatea cu toate calculatoarele, avînd o memorie mai mare de 64 k. octeți și compilatorul respectiv.

Rezultatele se pot obține tabelar și grafic pe ecranul unui terminal interactiv Tektronix *T*-4010, lucrînd sub controlul sistemului de programe *TSO-WITS**

Copiile imaginilor de pe ecranul tubului catodic, în cazul acestui terminal, se pot obține și pe hîrtie, de la un dispozitiv auxiliar conectat electric la terminalul *T*-4010.

4.2. STRUCTURA PROGRAMULUI ȘI MODUL DE INTRODUCERE AL DATELOR

Programul *PMSIMK* are o structură modulară care oferă, pe lîngă avantajele etapei punerii la punct, o flexibilitate concretizată prin următoarele posibilități :

— programul poate fi ușor modificat prin crearea de noi module sau modificarea celor existente ;

— este posibilă segmentarea programului în vederea reducerii volumului de memorie necesară, făcîndu-se modificările în programul principal specifice compilatorului *FORTRAN* utilizat ;

— unele module pot fi utilizate și în alte programe (de exemplu pentru analiza cinetostatică).

* Waterloo Interactiv Terminal System.

În figura 2 este prezentată schema bloc a programului.

Programul principal are rolul de monitor, controlînd succesiunea prelucrărilor efectuate de celelalte module. Tot în programul principal se generează vectorul variabilelor independente. Se pot considera incluse în acest bloc generatoarele informației de mișcare.

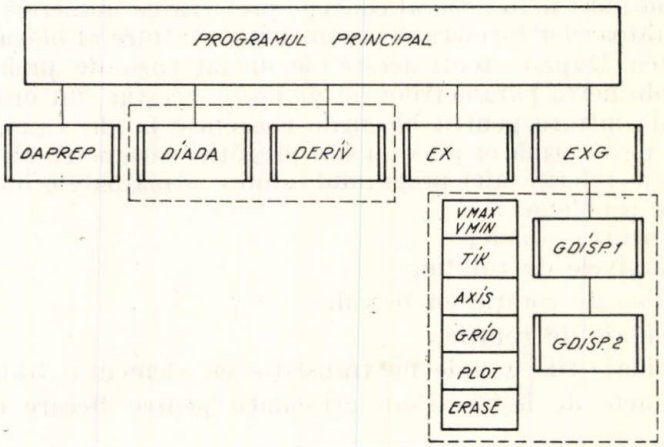


Fig. 2

Subprogramul *DAPREP* citește „setul de intrare" — pachetul de cartele — conținînd formularea problemei. În acest subprogram are loc verificarea datelor de intrare în scopul evitării unor inadvertențe, sînt emise mesajele de eroare și în cazul validității datelor, acestea sînt interpretate în forma necesară prelucrărilor ulterioare.

Subprogramul *DIADA* conține algoritmele constituite pe baza metodei prezentate în lucrarea [1] și este apelat de către programul principal ori de cîte ori un bloc *DIADA* transformă informația de mișcare de la intrarea sa, conform succesiunii logice din schema bloc. Împreună cu subprogramul *DERIV*, prin care se face derivarea vectorilor de ieșire, prin metoda diferențelor finite, se obțin parametrii cinematici ai punctelor de ieșire considerate.

Subprogramul *EX* asigură imprimarea rezultatelor într-o formă corespunzătoare opțiunilor făcute de utilizator în setul de intrare.

Subprogramele *EXG*, *GDISP*1 și *GDISP*2, împreună cu subprogramele de nivel inferior necesare (*VMAX*, *VMIN*, *PLOT*, *TIK* etc.), asigură obținerea rezultatelor sub formă grafică pe ecranul tubului catodic al terminalului *T*-4010.

Datele pentru definirea unei probleme sînt formulate în cadrul unui set de intrare alcătuit prin interpretarea schemei bloc și materializat într-un pachet de cartele perforate. Fiecare cartelă începe cu un cuvînt de identificare, urmat de parametrii respectivi necesari separați prin virgule.

În cazul lucrului via terminalul interactiv Tektrouix, programul trebuie să se afle în setul de date al beneficiarului, aflat în biblioteca

FORTRAN a sistemului (*FORTLIB*). Prin chemarea lui și fuziunea cu setul de intrare sau șirul acestora, aflat în bibliotecă sau introdus prin claviatura terminalului, se obține procesul de simulare cu rezultatele grafice afișate pe ecran, iar rezultatele numerice tabelate la imprimantă.

4.3. FORMULAREA PROBLEMELOR

Pentru simularea cinematică a unui mecanism cu ajutorul programului *PMSIMK* trebuie parcurse următoarele etape :

— desenarea schemei cinematice a mecanismului considerat în poziție inițială ;

— construirea schemei bloc echivalente ;

— pregătirea setului de intrare și transpunerea lui pe cartele perforate ;

— rularea programului în vederea obținerii soluțiilor.

Desenarea schematică a mecanismului poate fi făcută în conformitate cu notațiile folosite în tabela 1.

S-au folosit următoarele notații referitoare la diada i :

— A_1^i, A_2^i pentru cuplele exterioare ;

— B^i pentru cupla interioară ;

— C_1^i, j, C_2^i, k, pentru punctele sau conexiunile din planul bielelor 1, respectiv 2, avînd : $0 \leqslant j \leqslant 3$ și $0 \leqslant k \leqslant 3$ pentru ediția referită a programului ;

— l_1^i, l_2^i lungimile elementelor.

Indicarea apartenenței la bloc, la grupă structurală, se face folosind indicierea superioară. O manivelă sau un ghidaj de rotație trebuie considerate ca element conducător de referință. Pozițiile inițiale ale celorlalte manivele sau ghidaje se exprimă cu ajutorul unghiului de decalaj φ_d.

Pentru definirea mișcării elementelor conducătoare, diferite de elementul de referință, se folosește raportul vitezelor unghiulare $\omega_i/\omega_0 = K_i$.

Pregătirea schemei bloc se face interpretînd schema cinematică în sensul simbolurilor propuse în tabela 2.

4.4. APLICAȚII

Sînt prezentate cîteva exemple ilustrînd modul de formulare al problemei în vederea utilizării programului *PMSIMK* și rezultatele grafice obținute pe ecranul tubului catodic copiate pe hîrtie.

Aplicația 1. În figura 3 se prezintă schema cinematică și schema bloc corespunzătoare unui mecanism cu 6 elemente Stephenson, al cărui contur patrulater este un paralelogram. Sînt reproduse în figurile 4 și 5 hodografele vectorilor deplasărilor punctelor marcate cu asterisc pentru $l_2^2 = 2{,}5$ și reluate cu $l_2^2 = 3$.

Aplicația 2. Este studiat un mecanism cu două grade de mobilitate, pentalater de specia 1. Schema cinematică și schema bloc sînt reprezentate

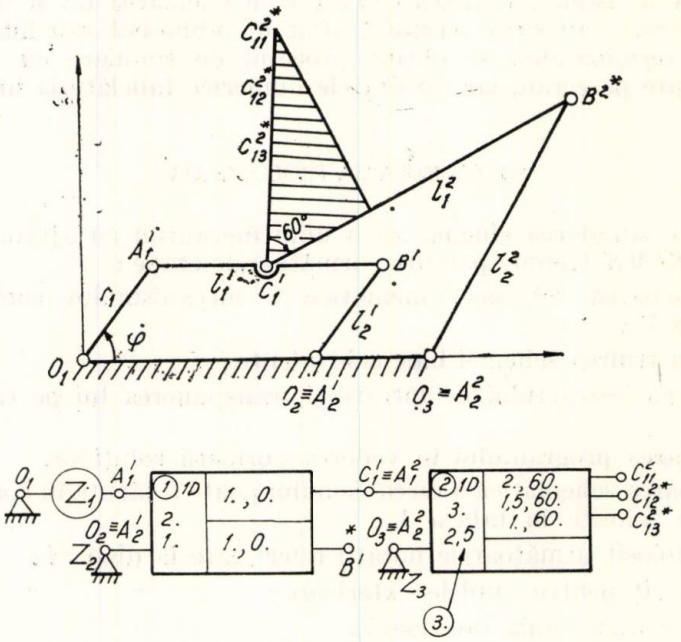

C_{11}^{2*}
C_{12}^{2*}
C_{13}^{2*}
B^{2*}
l_1^2
l_2^2
60°
A_1'
B'
C_1'
l_1'
l_2'
r_1
φ
O_1
$O_2 \equiv A_2'$
$O_3 \equiv A_2^2$
Z_1
Z_2
Z_3
$C_1' \equiv A_1^2$
1. , 0.
1. , 0.
2. , 60.
1,5, 60.
1. , 60.
2,5
3.

Fig. 3

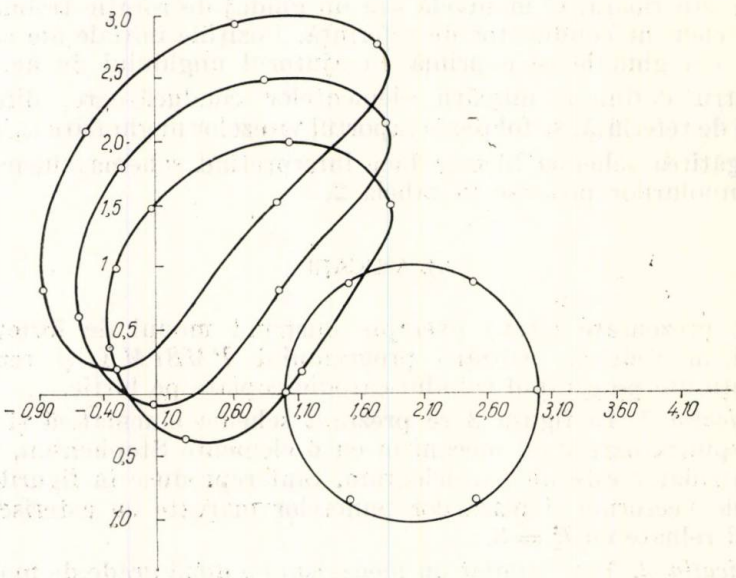

3,0
2,5
2,0
1,5
1
0,5
0,5
1,0
-0,90
-0,40
0,10
0,60
1,10
1,60
2,10
2,60
3,10
3,60
4,10

Fig. 4

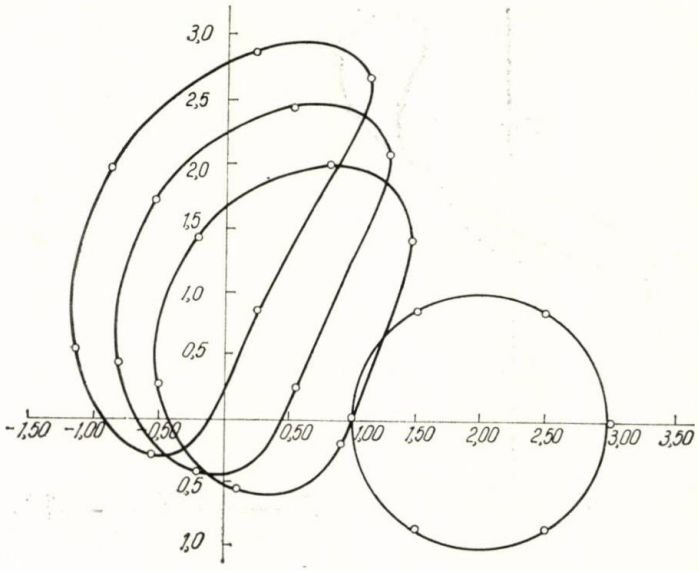
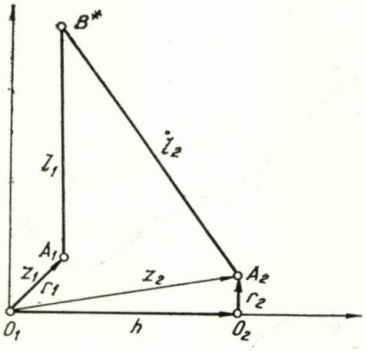
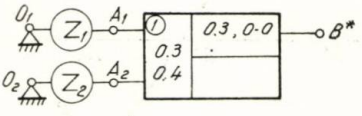


Fig. 5

în figura 6. În figurile 7, 8, 9 și 10 se prezintă hodograful vectorului deplasării, proiecțiile acestui vector, proiecțiile vectorilor vitezei și acceleraţiei punctului B, considerat pol de ieșire.

Fig. 6





Aplicația 3. Se consideră mecanismul elipsograf al lui Delaunay, format din două diade, de aspectul 3, variantele 2 și 1, legate la o manivelă, și o diadă de aspectul 1 legată la prelungirile bielelor acestora (fig. 11). În figura 12 se arată hodografele vectorilor punctelor marcate cu asterisc.

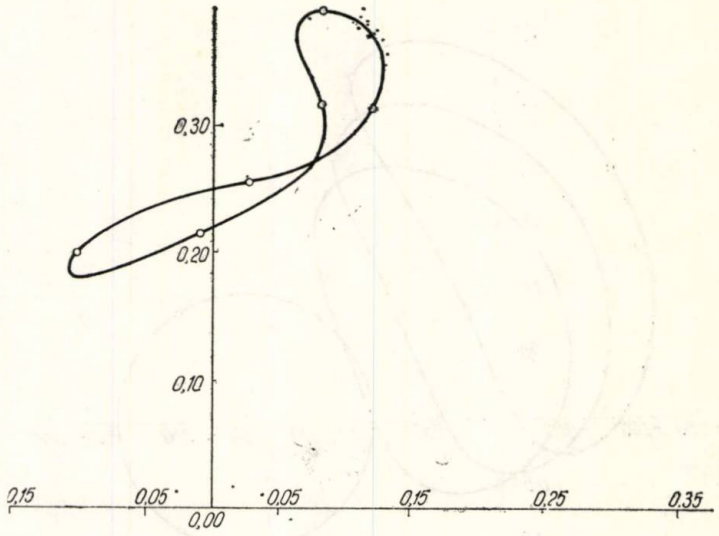


Fig. 7

Aplicația 4. În figura 13 este prezentat un mecanism cu două grade de mobilitate, format prin conectarea unei diade de aspectul 4 la balansierul unui mecanism paralelogram și la un ghidaj de rotație. Figura 14 reprezintă hodografele vectorilor de poziție ai punctelor marcate

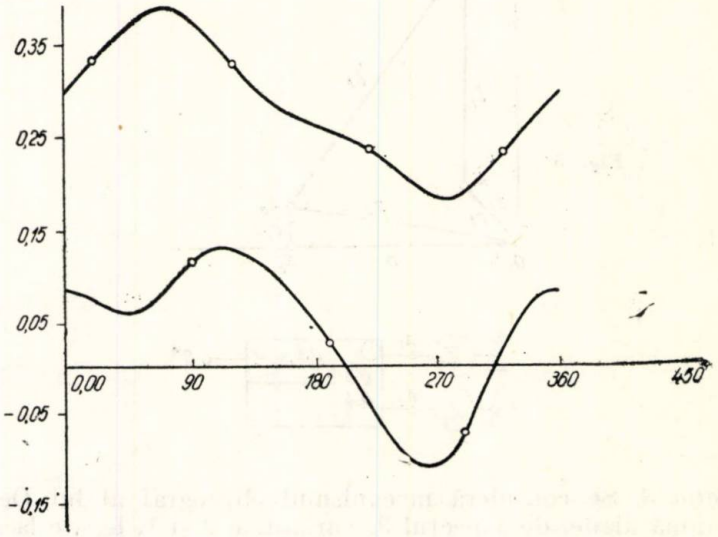


Fig. 8

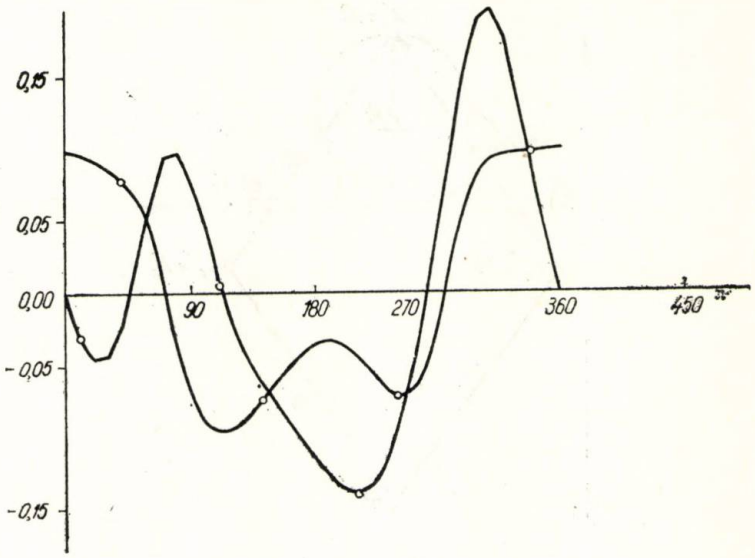


Fig. 9

în figura 13. Programul a fost rulat pe calculatorul *IBM*-370 al *NEUCC* (Northern Europe University Computing Center) via, un terminal Tektronix *T*-4010 în timpul specializării autorului la Universitatea tehnică din Danemarca.

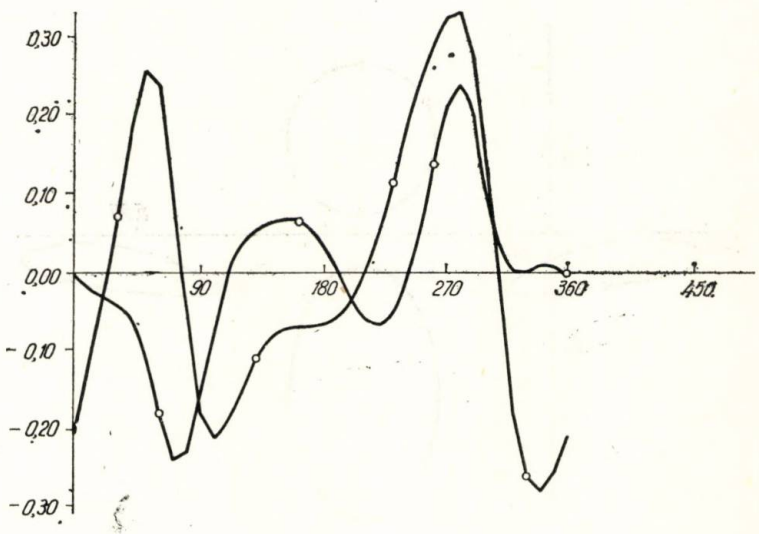


Fig. 10

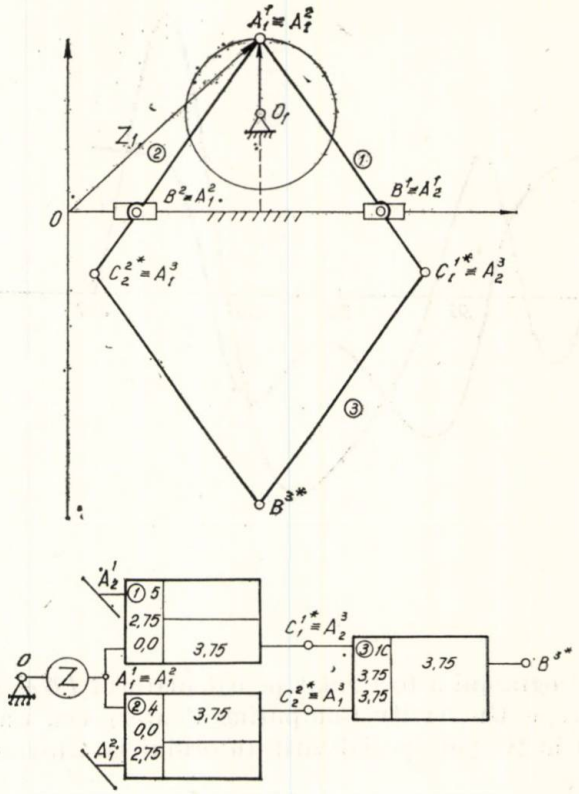

$A_1^1 \equiv A_1^2$
O_1
Z_1
②
①
$B^2 \equiv A_1^2$
$B^1 \equiv A_2^1$
0
$C_2^{2*} \equiv A_1^3$
$C_1^{1*} \equiv A_2^3$
③
B^{3*}
A_2^1
① 5
2,75
0,0
3,75
$C_1^{1*} \equiv A_2^3$
③ 10
3,75
3,75
3,75
B^{3*}
0
Z
$A_1^1 \equiv A_1^2$
$C_2^{2*} \equiv A_1^3$
② 4
0,0
2,75
3,75
A_1^2

Fig. 11

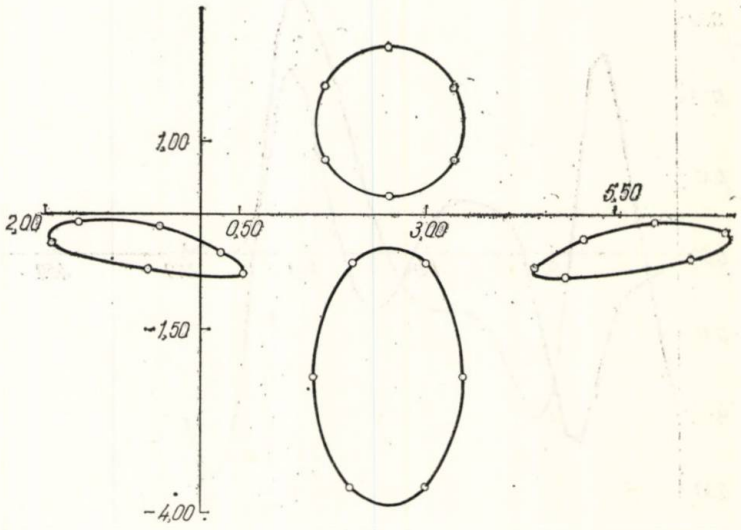

1,00
2,00
0,50
3,00
6,50
-1,50
-4,00

Fig. 12

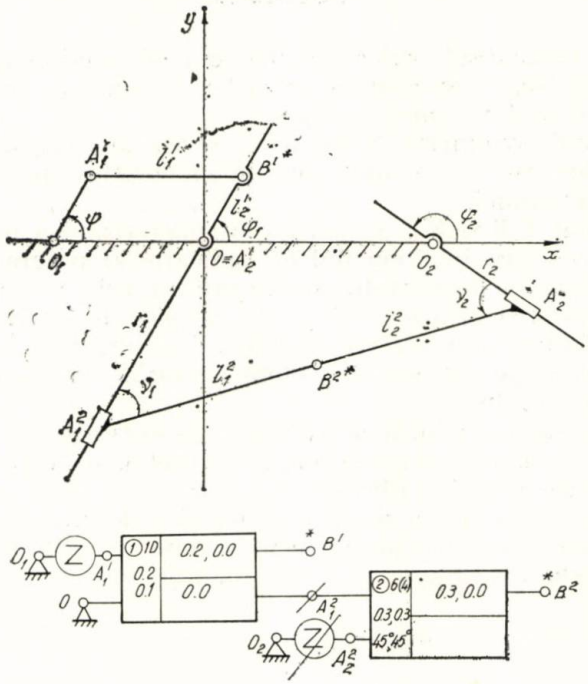

y
x
A_1^1
l_1^1
B^{1*}
l_2^1
φ
φ_1
φ_2
l_0
$0 \equiv A_2^1$
O_2
r_2
ϑ_2
A_2^2
r_1
l_2^2
ϑ_1
l_1^2
B^{2*}
A_1^2
O_1
Z
A_1^1
0
①10
0,2
0,1
0,2, 0,0
0,0
B^{1*}
A_1^2
O_2
A_2^2
②6(4)
0,3, 0,0
0,3 0,3
45°45'
B^{2*}

Fig. 13

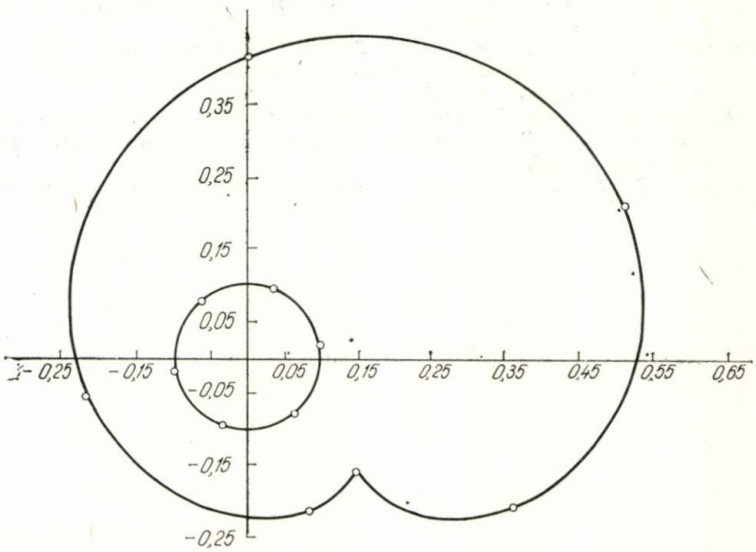

0,35
0,25
0,15
0,05
-0,05
-0,15
-0,25
-0,25
-0,15
0,05
0,15
0,25
0,35
0,45
0,55
0,65

Fig. 14

5. CONCLUZII

Metoda prezentată, valorifică metodele de analiză a mecanismelor, dezvoltate pe baza considerării grupelor structurale assurice, pentru mecanismele complexe (multiconture).

Algoritmul nenumeric, bazat pe tratarea unei organizări sub formă de schemă bloc, realizat pentru analiza cinematică, permite extinderea și la analiza dinamică.

Programul *PMSIMK* constituie o concretizare a metodei. Fiecare caz concret, ce intră în domeniul de aplicație al programului, poate fi rezolvat cu minimum de efort din partea utilizatorului (construcția schemei bloc și interpretarea acesteia sub forma datelor de intrare). Algoritmele folosite pot rămîne transparente pentru utilizator. Terminalul interactiv cu afișare grafică pe tub catodic, oferă condițiile utilizării tuturor posibilităților programului.

Se poate trage concluzia că realizarea de software și limbaje orientate pe problema simulării mecanismelor, oferă metodele teoretice, sub forma unor instrumente comode utilizatorului din construcția de mașini. Trebuie menționat însă că se ridică problema alegerii celei mai eficiente metode, prin considerarea mai multor criterii, înainte de a fi materializată în forma de sistem de programe și/sau limbaj.

Primită la redacție la 27 iulie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. R. C. Bogdan, D. Larionescu, *Analiza armonică complexă și mecano-electrică a mecanismelor plane*, Editura Academiei R.S. România, București, 1968.
2. R. C. Bogdan, N. Manafi, S. Cononovici, *Algoritme și programe de calcul pentru determinarea parametrilor cinematici ai mecanimelor plane articulate*, Simpozionul de Mecanisme și transmisii mecanice, Reșița, 1972.
3. D. Brennan Robert, *Continuous System Modeling Programs State — of-the — Art and Prospectus for Development*, Simulation Programming Languages, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1968.
4. *System/360 Continuous System Modeling Program* (360 A-CX-16 X), *Application Description* (H20—0240), IBM Corporation, Technical Publications Dept., White Plains, New York (1968).
5. Chr. Pelecudi, *Multipoli cinematici cu elemente rigide*, St. cerc. mec. apl., *6* (1968).

EFECTUL NELINIARITĂȚILOR ASUPRA DIAGRAMELOR POLARE ALE RĂSPUNSULUI ÎN FRECVENȚĂ AL STRUCTURILOR

de MIRCEA RADEȘ

Institutul politehnic București

Lucrarea de față este a treia dintr-o serie de articole ce au drept scop prezentarea problemelor ridicate de folosirea diagramelor polare la determinarea experimentală a caracteristicilor dinamice ale materialelor și structurilor. Se studiază răspunsul staționar al sistemului cu un grad de libertate, cu amortizare histeretică și caracteristică elastică cubică, și se arată efectul acestui tip de neliniaritate asupra diagramei polare a răspunsului în frecvență. Pe această bază se propune o nouă metodă de rezonanță pentru studiul dinamic al structurilor slab neliniare.

1. INTRODUCERE

Într-un articol anterior [1] s-a prezentat o sinteză a celor mai utilizate „metode de rezonanță" folosite la determinarea caracteristicilor dinamice ale structurilor deformabile *liniare*. S-a arătat că analiza grafică a diagramelor polare ale răspunsului în frecvență, fundamentată de Kennedy și Pancu [2], permite obținerea rezultatelor cele mai corecte și s-au propus noi metode, bazate pe excitația cu forțe în cvadratură.

Limitele acestora, precum și importanța definirii și determinării corecte a rezonanței și antirezonanței au fost studiate ulterior [3], accentuînd asupra posibilității folosirii diagramelor polare și la sisteme puternic amortizate. Precizia noilor metode propuse a fost confirmată experimental în încercări atît pe sisteme slab amortizate [4], cît și pe materiale cu amortizare mare [5].

În cazul regimurilor de vibrație cu amplitudini relativ mari, diagramele polare înregistrate în timpul acestor încercări au prezentat abateri față de cele rezultate din analiza teoretică a oscilatorului liniar, ce au fost atribuite efectelor neliniarităților.

În acest sens, încă din 1963, de Vries [6] a arătat că anomaliile ce apar în repartiția parametrului frecvență în lungul diagramelor polare ale mobilității, precum și aplatisarea acestora, pot fi explicate prin existența unor neliniarități fie ale caracteristicii elastice, fie ale celei de amortizare.

Neliniaritatea caracteristicii elastice nu afectează forma curbelor de răspuns, producînd doar o „deplasare a frecvențelor" în lungul acestora, cu atît mai accentuată cu cît structura este mai slab amortizată. În

schimb, în cazul sistemului cu un grad de libertate şi caracteristică elastică liniară, Banah şi Perminov [7] au arătat că frecarea coulombiană produce ovalizarea diagramei polare a receptanţei în direcţia semi-axei imaginare negative, iar frecarea proporţională cu pătratul vitezei determină alungirea diagramei în direcţie paralelă cu axa reală (fapt menţionat anterior de Pretlove [8]).

În 1969, Hanna şi Tobias [9] au făcut primul studiu analitic şi experimental mai detaliat asupra influenţei micilor neliniarităţi ale caracteristicii elastice asupra diagramelor polare ale răspunsului, introducînd modelul amortizării histeretice în studiul sistemelor cu caracteristică elastică cubică.

În general se poate admite că neliniarităţile mici nu afectează principiile de bază asupra modurilor de vibraţie şi a suprapunerii lor liniare. În schimb, determinarea frecvenţei de rezonanţă, a rigidităţii dinamice şi a nivelului amortizării, corespunzătoare fiecărui mod de vibraţie, se loveşte de dificultăţi serioase, obişnuitele „criterii de localizare a rezonanţei" devenind inaplicabile.

Se recurge astfel la metoda propusă de Grootenhuis [10] în care se menţine constantă amplitudinea deplasării, variind amplitudinea şi pulsaţia forţei perturbatoare. Rezonanţa este definită prin pulsaţia la care amplitudinea forţei este minimă, iar amortizarea se calculează cu o variantă a metodei „punctelor de putere jumătate" [1]. Trasînd mai multe curbe „de rezonanţă" pentru diferite valori ale amplitudinii deplasării, se apreciază influenţa neliniarităţilor. În lucrarea [1] autorul a propus o altă metodă în care amplitudinea constantă a deplasării se obţine prin folosirea excitaţiei cu forţe în cvadratură.

Dezavantajul acestor metode, însă, constă în faptul că se bazează pe modelul oscilatorului liniar. White [11] a calculat eroarea cu care se determină factorul de amortizare în cazul aplicării cunoscutului criteriu Kennedy-Pancu [2] la analiza diagramei polare a răspunsului unui oscilator cu amortizare vîscoasă liniară şi caracteristică elastică cubică, fără să indice însă existenţa vreunei metode bazate pe analiza răspunsului dinamic al oscilatorului neliniar.

O astfel de metodă este descrisă la sfîrşitul acestei lucrări, după o analiză prealabilă a răspunsului în frecvenţă al unui sistem neliniar cu amortizare histeretică, în care se prezintă efectul unei caracteristici elastice cubice asupra formei diagramelor polare ale răspunsului şi se arată cum apar fenomenele de „salt" pe aceste diagrame. S-a considerat utilă analiza condiţiilor în care apar fenomenele de „salt" mai întîi pe baza diagramelor amplitudine-pulsaţie şi fază-pulsaţie ale răspunsului, folosind în general metodica urmată de Dincă şi Teodosiu [12], trecînd ulterior la descrierea acelorași fenomene pe diagramele polare ale răspunsului.

2. OSCILATORUL CU AMORTIZARE HISTERETICĂ ŞI CARACTERISTICĂ ELASTICĂ CUBICĂ

Oscilatorul cu caracteristică elastică cubică este unul dintre cele mai simple sisteme la care pot fi puse în evidenţă fenomene specifice vibraţiilor neliniare. Se va considera deci o caracteristică elastică de forma

$$F_e(x) = k\,(x + \alpha x^3),$$

unde k este panta în origine, iar α — coeficientul de neliniaritate. Pentru amplitudini mici ale deplasării x, aceasta poate aproxima orice caracteristică elastică dată printr-o funcție analitică impară. White [11] citează o serie de lucrări în care se arată că, atunci cînd sînt solicitate la vibrații cu amplitudini mari, multe structuri cu parametrii distribuiți au o caracteristică elastică de tip „tare", ce poate fi aproximată printr-o funcție $F_e(x)$ în care $\alpha > 0$. Pe de altă parte, într-un studiu consacrat măsurării proprietăților dinamice ale spumelor poliuretanice [13] autorul a arătat că, în domeniul deformațiilor mici, acestea au o caracteristică elastică de tip „moale", ce poate fi aproximată prin funcția $F_e(x)$, în care $\alpha < 0$.

În studiul răspunsului armonic este convenabilă folosirea conceptului de *amortizare histeretică echivalentă* [3], în care coeficientul de amortizare histeretică are o astfel de valoare încît energia disipată într-un ciclu de deplasare armonică, la o anumită amplitudine și frecvență, este aceeași ca cea disipată de sistemul amortizat real, în același ciclu de deplasare. Se va considera deci o caracteristică de amortizare de forma

$$F_d(x) = \frac{h}{\omega}\,\dot{x},$$

unde ω este pulsația perturbatoare, iar h — coeficientul de amortizare histeretică echivalentă. Aceasta indică o forță proporțională cu deplasarea, dar în fază cu viteza, care determină o independență de frecvență a energiei disipate pe ciclu. Folosirea funcției $F_d(x)$ este însă strict limitată la analiza răspunsului armonic staționar.

2.1. ANALIZA RĂSPUNSULUI ÎN FRECVENȚĂ

Ecuația de mișcare a unui oscilator cu amortizare histeretică și cu caracteristică elastică cubică, supus acțiunii unei forțe perturbatoare armonice $F(t) = F_0 \cos\omega t$, se poate scrie

$$m\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\,\dot{x} + k(x + \alpha x^3) = F_0 \cos\omega t, \tag{1}$$

care poate fi considerată drept o formă a ecuației lui Duffing cu amortizare.

În continuare se studiază soluția armonică a ecuației (1) în vecinătatea „rezonanței" principale și fenomenele de salt ce apar în variația amplitudinii și fazei răspunsului atunci cînd F_0 sau ω variază continuu.

Înlocuind în ecuația (1) o soluție staționară aproximativă de forma

$$x = a\cos(\omega t + \varphi), \tag{2}$$

neglijînd armonicele de ordin superior și egalînd coeficienții termenilor în $\cos\omega t$ și $\sin\omega t$ din ambii membri, rezultă

$$\Omega^2 = 1 + \frac{3}{4}\,\alpha a^2 \mp \sqrt{\left(\frac{F_0}{ka}\right)^2 - g^2} \tag{3}$$

şi

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{g}{\Omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\alpha a^2} = \operatorname{arctg} \frac{g}{\mp \sqrt{\left(\frac{F_0}{ka}\right)^2 - g^2}}, \tag{4}$$

unde s-a notat

$$g = \frac{h}{k}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad \Omega = \frac{\omega}{\omega_n}. \tag{5}$$

Ecuaţia curbelor de rezonanţă (3) este reprezentată grafic în figura 1, pentru $g = 0{,}04$ şi diferite valori $\beta = \alpha \frac{F_0^2}{k^2}$. Curba $\beta = 0$ corespunde unui sistem liniar. La sisteme cu caracteristică elastică tare ($\alpha > 0$), pe măsură ce β creşte, curbele de rezonanţă se „apleacă" spre domeniul frecvenţelor înalte. Pentru $\beta = 2{,}5 \cdot 10^{-4}$ alura curbei de răspuns indică apariţia saltului de amplitudine. La sisteme cu caracteristică elastică moale ($\alpha < 0$), curbele de răspuns amplitudine-pulsaţie se „apleacă" spre domeniul frecvenţelor joase. Indiferent însă de valoarea lui α, pentru F_0 şi k date, amplitudinea maximă de vibraţie este aceeaşi, $a_{\max} = \frac{1}{g}\frac{F_0}{k}$. Acest rezultat caracterizează sistemele neliniare cu amortizare histeretică. În cazul sistemelor neliniare cu amortizare vîscoasă liniară (vezi anexa 1), amplitudinea maximă de vibraţie scade cu creşterea neliniarităţii chiar pentru o valoare constantă a factorului de amortizare $\zeta = \frac{c}{2\sqrt{km}}$ (fig. 2).

Pentru determinarea condiţiilor în care apar fenomenele de salt, pe baza ecuaţiilor (3) şi (4) s-au trasat curbele amplitudine-pulsaţie (fig. 3) şi fază-pulsaţie (fig. 4), pentru $g = 0{,}04$, $\alpha = 10^{-4}$ şi diferite valori F_0/k.

Ecuaţia (3) se scrie sub forma

$$\Phi(a, \Omega^2) = \left(\Omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\alpha a^2\right)^2 + g^2 - \frac{F_0^2}{k^2 a^2} = 0 \tag{3a}$$

şi se calculează derivata

$$\frac{da}{d(\Omega^2)} = -\frac{\frac{\partial \Phi}{\partial (\Omega^2)}}{\frac{\partial \Phi}{\partial a}} = \frac{a\left(\Omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\alpha a^2\right)}{\frac{3}{2}\alpha a^2\left(\Omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\alpha a^2\right) - \frac{F_0^2}{k^2 a^2}}. \tag{6}$$

Anulînd numitorul expresiei (6) se obţin abscisele punctelor în care curbele de rezonanţă din figura 3 admit tangentă verticală

$$\Omega^2 = 1 + \frac{3}{4}\alpha a^2 + \frac{2F_0^2}{3k^2 \alpha a^4}. \tag{7}$$

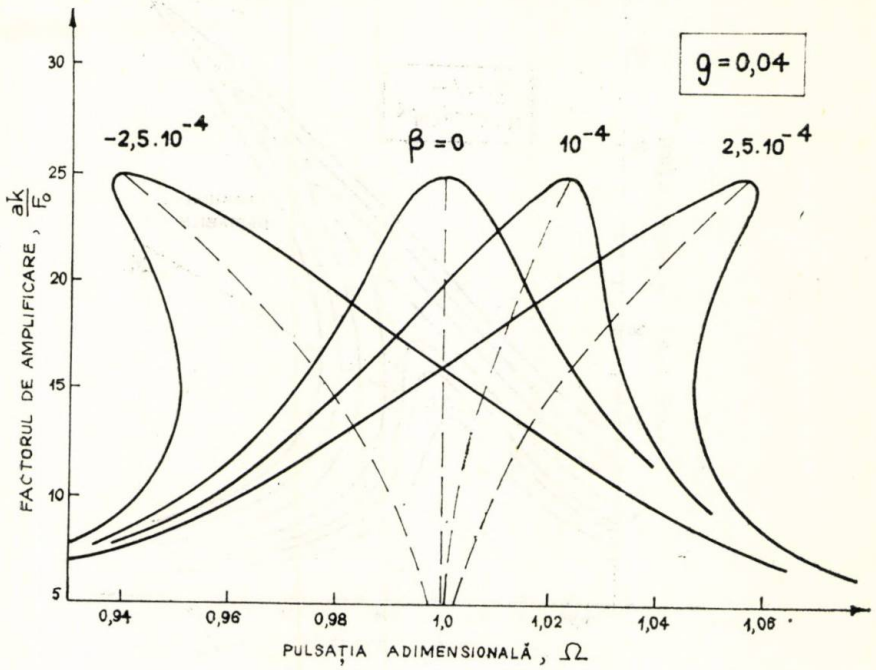

g = 0,04
-2,5.10^-4
β = 0
10^-4
2,5.10^-4
FACTORUL DE AMPLIFICARE, ak/F0
PULSAȚIA ADIMENSIONALĂ, Ω
30
25
20
15
10
5
0,94
0,96
0,98
1,0
1,02
1,04
1,06

Fig. 1

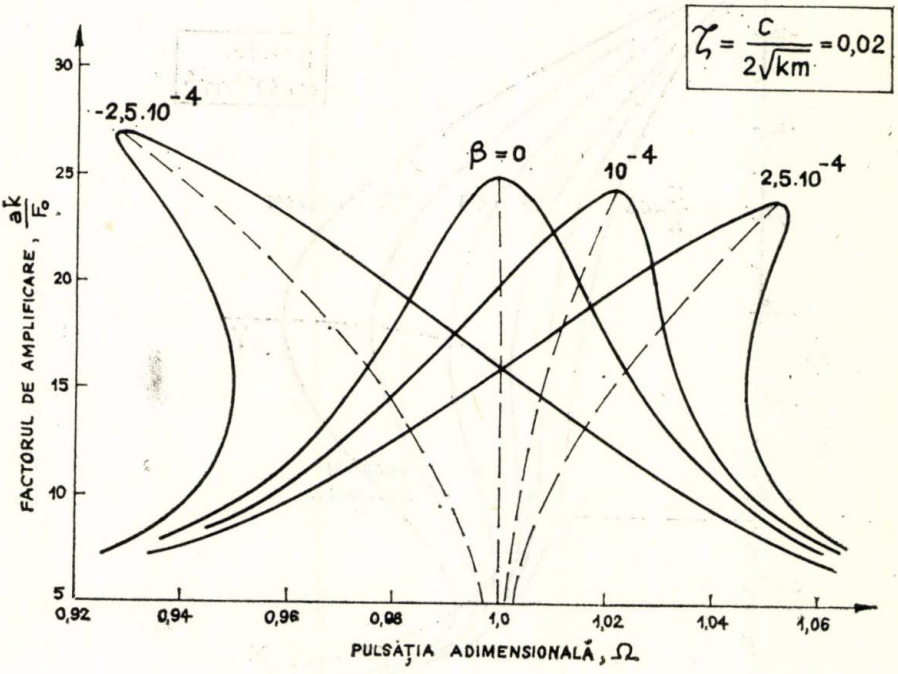

ζ = c / 2√km = 0,02
-2,5.10^-4
β = 0
10^-4
2,5.10^-4
FACTORUL DE AMPLIFICARE, ak/F0
PULSAȚIA ADIMENSIONALĂ, Ω
30
25
20
15
10
5
0,92
0,94
0,96
0,98
1,0
1,02
1,04
1,06

Fig. 2

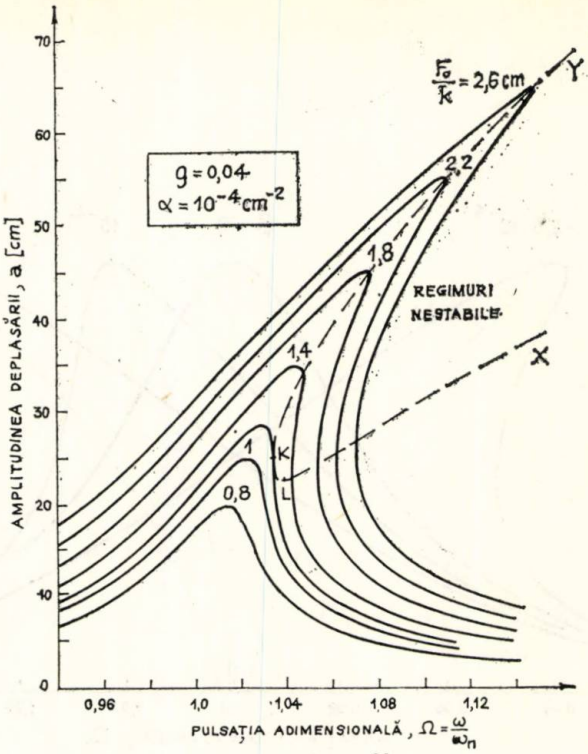

AMPLITUDINEA DEPLASĂRII, a [cm]
PULSAȚIA ADIMENSIONALĂ, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$
$\frac{F_0}{k} = 2,6$ cm
g = 0,04
$\alpha = 10^{-4}$ cm^{-2}
REGIMURI NESTABILE
2,2
1,8
1,4
1
0,8
K
L
X
Y

Fig. 3

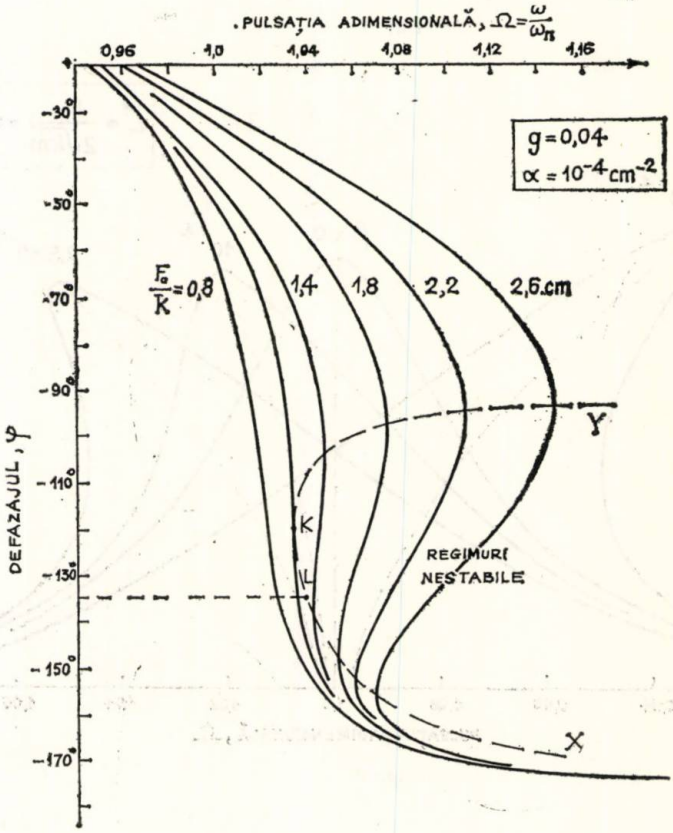

PULSAȚIA ADIMENSIONALĂ, $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$
DEFAZAJUL, φ
g = 0,04
$\alpha = 10^{-4}$ cm^{-2}
$\frac{F_0}{k} = 0,8$
1,4
1,8
2,2
2,6 cm
K
L
REGIMURI NESTABILE
Y
X

Fig. 4

Eliminînd F_0^2 între relațiile (3) și (7) și rezolvînd în raport cu Ω^2, rezultă locul geometric al punctelor cu tangentă verticală

$$\Omega^2 = 1 + \frac{3}{2}\alpha a^2 \pm \sqrt{\frac{9}{16}\alpha^2 a^4 - g^2}, \tag{8}$$

trasat cu linie întreruptă în figura 3. Aceasta reprezintă o „curbă limită", care separă domeniul regimurilor stabile de vibrații, de cel al regimurilor instabile. Punctele ei se află la distanțe egale, măsurate pe orizontală, față de punctele curbei $\Omega = \sqrt{1 + \frac{3}{2}\alpha a^2}$. Cele două curbe se intersectează în punctul L, de amplitudine $a_L = \sqrt{\frac{4g}{3\alpha}}$ și pulsație $\Omega_L = \sqrt{1 + 2g}$. Curba (8) poate exista doar pentru valori nenegative ale expresiei de sub radical, deci pentru $a \geqslant a_L$. Rezultă că L este punctul în care curba (8) admite tangentă orizontală, iar fenomenul de salt poate apare doar pentru amplitudini mai mari ca a_L. În ecuația (8), semnul „plus" corespunde ramurii LX, iar semnul „minus" — ramurii LY.

Un punct interesant pe ramura LY a curbei limită (8) este punctul K, în care curba admite tangentă verticală. Anulînd derivata în raport cu a a mărimii Ω^2 din expresia (8), rezultă ordonata acestui punct $a_K = \sqrt{\frac{8g}{3\sqrt{3}\alpha}}$. Înlocuind această valoare în expresia (8) rezultă abscisa punctului K

$$\Omega_K = \sqrt{1 + \sqrt{3}g}, \tag{9}$$

care indică pulsația minimă la care poate apare fenomenul de salt.

Înlocuind Ω_K în ecuația (3) se obține parametrul curbei de rezonanță care are în K un punct de inflexiune cu tangentă verticală

$$F_0^2 = \frac{32}{9\sqrt{3}} \frac{g^3 k^2}{\alpha}, \tag{10}$$

reprezentînd amplitudinea minimă a forței excitatoare la care poate apare fenomenul de salt (pentru un sistem cu k, α și g date).

O analiză similară se face pe baza curbelor defazajului φ dintre forța perturbatoare și deplasare (fig. 4). Abscisele punctelor cu tangentă verticală se obțin anulînd numitorul derivatei

$$\frac{d\varphi}{d(\Omega^2)} = \frac{g}{\frac{3}{2}\alpha a^2\left(\Omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\alpha a^2\right) - \frac{F_0^2}{k^2 a^2}}, \tag{11}$$

ceea ce conduce la relaţia (7), deci la aceleaşi pulsaţii (8) ca pentru saltul de amplitudine. Înlocuind (8) în (4), rezultă ecuaţia curbei limită din diagrama fază-pulsaţie

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{g}\left(\frac{3}{4}\alpha a^2 \pm \sqrt{\frac{9}{16}\alpha^2 a^4 - g^2}\right) \tag{12}$$

desenată cu linie întreruptă în figura 4 şi în care a este dat de ecuaţia (8).

Punctul L, de pulsaţie $\Omega_L = \sqrt{1 + 2g}$, corespunde unui defazaj $\varphi_L = \operatorname{arctg} 1 = -135°$. Ramura LX a curbei limită corespunde semnului „minus" în ecuaţia (12), iar ramura LY — semnului „plus". Punctul K, de pulsaţie $\Omega_K = \sqrt{1 + \sqrt{3g}}$, în care şi curba (12) admite o tangentă verticală, are ordonata $\varphi_K = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = -120°$.

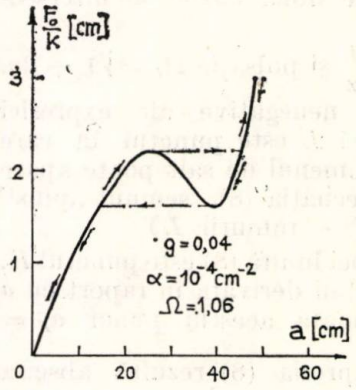


Fig. 5

Fenomenele de salt care apar atunci cînd $\omega = \text{const.}$ şi F_0 variază continuu vor fi prezentate în paragraful următor, folosind reprezentarea prin diagrame polare a răspunsului în frecvenţă, acestea avînd avantajul de a conţine atît informaţia asupra variaţiei amplitudinii, cît şi a defazajului, în raport cu pulsaţia. Pe o diagramă „amplitudinea forţei — amplitudinea deplasării", trasată pentru $\omega = \text{const.}$ (fig. 5), se observă că acest al doilea tip de fenomene de salt este determinat de existenţa porţiunii cu pantă negativă a curbei de răspuns, deci de „rigiditatea dinamică negativă".

2.2. DIAGRAMELE POLARE ALE RĂSPUNSULUI ÎN FRECVENŢĂ

Considerînd o amplitudine complexă a deplasării

$$a^* = a_R + \mathrm{i}a_I = a\cos\varphi + \mathrm{i}a\sin\varphi, \tag{13}$$

componenta reală a_R (în fază cu forţa) şi cea imaginară a_I (în cvadratură cu forţa) au expresiile

$$a_R = \left(1 + \frac{3}{4}\alpha a^2 - \Omega^2\right)\frac{k}{F_0}a^2, \tag{14}$$

$$a_I = -g\frac{k}{F_0}a^2, \tag{15}$$

unde a este dat de relaţia (3).

Eliminînd a și Ω^2 între relațiile (3), (14) și (15) rezultă ecuația unui cerc

$$a_R^2 + \left(a_I + \frac{1}{2g}\frac{F_0}{k}\right)^2 = \left(\frac{1}{2g}\frac{F_0}{k}\right)^2, \tag{16}$$

care reprezintă locul geometric al vîrfului vectorului a^* în planul complex. Ecuația (16) este identică cu cea obținută pentru oscilatorul liniar ($\alpha = 0$);

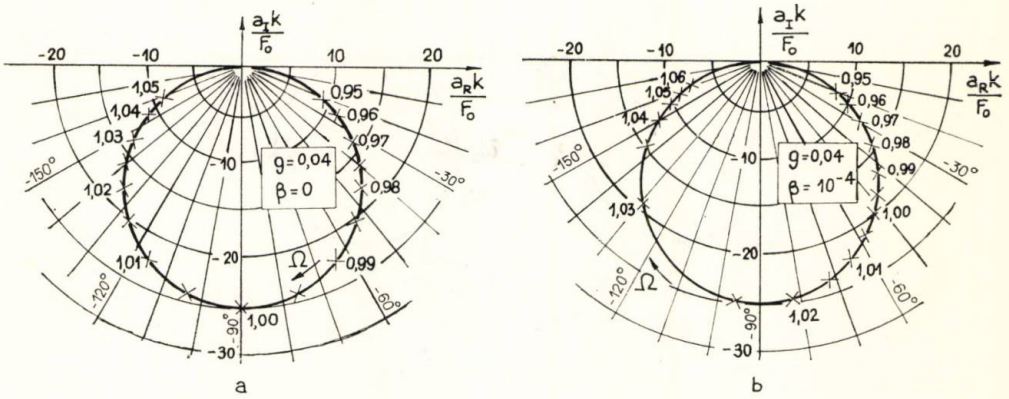


Fig. 6

deci, pentru aceleași valori F_0/k și g, diagramele polare vor avea aceeași formă. În figura 6 se arată, pentru comparație, diagramele polare ale cantității $\frac{a^*k}{F_0}$, pentru $g = 0{,}04$, $\beta = 0$ și $\beta = \alpha\frac{F_0^2}{k^2} = 10^{-4}$, „gradate" cu valorile pulsației adimensionale $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$.

În figura 7 s-au reprezentat punctele semnificative ale celor două diagrame gradate în pulsația ω. Fiecare punct P de pe cerc definește o anumită pulsație ω. Punctul N corespunde valorii $\omega = 0$. Pe măsura creșterii lui ω, punctul P parcurge cercul în sens orar, iar pentru $\omega \to \infty$ el se confundă cu originea 0.

În cazul diagramei sistemului liniar (fig. 7*a*), punctul de intersecție M al cercului cu semi-axa imaginară negativă definește pulsația de rezonanță $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Diametrul AB, perpendicular pe OM, intersectează cercul în punctele de pulsații $\omega_{1,2} = \omega_n\sqrt{1 \mp g}$, la care puterea disipată prin amortizare este jumătate din cea disipată la pulsația de rezonanță.

În cazul diagramelor sistemelor neliniare, pulsația punctului de intersecție M este

$$\omega_r = \omega_n\sqrt{1 + \frac{3}{4}\,\alpha\,\frac{1}{g^2}\frac{F_0^2}{k^2}}\,, \tag{17}$$

diferită de pulsaţia de rezonanţă ω_n a sistemului liniar. De asemenea, pulsaţiile punctelor A şi B (unde $\operatorname{tg}\varphi = \pm 1$)

$$\bar{\omega}_{1,2} = \omega_n \sqrt{1 \mp g + \frac{3}{4}\alpha \bar{a}^2}, \tag{18}$$

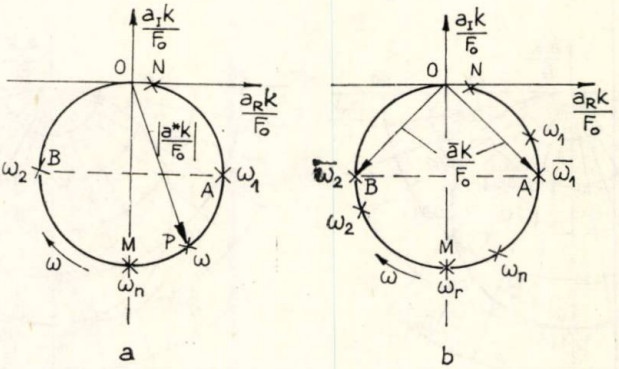


Fig. 7

unde $\frac{\bar{a}k}{F_0} = OA = OB$, diferă de pulsaţiile punctelor de „putere jumătate" de pe diagrama sistemului liniar.

La sistemele cu caracteristică elastică „tare" (fig. 7*b*), $\alpha > 0$, deci $\omega_r > \omega_n$, $\bar{\omega}_1 > \omega_1$, $\bar{\omega}_2 > \omega_2$, astfel că deşi cercurile au acelaşi diametru $\frac{ka_{max}}{F_c} = \frac{1}{g}$, ele diferă prin repartiţia parametrului pulsaţie în lungul lor (vezi şi fig. 6).

La sistemele cu caracteristică elastică „moale", $\alpha < 0$, deci $\omega_r < \omega_n$, $\bar{\omega}_{1,2} < \omega_{1,2}$, iar „deplasarea" pulsaţiilor faţă de cazul liniar se face în sens orar.

„Deplasarea pulsaţiilor" în cazul sistemelor neliniare apare mai sugestiv dacă se trasează mai multe diagrame polare ale deplasării (răspunsului), pentru diferite valori ale amplitudinii forţei perturbatoare, evitînd trasarea diagramelor polare ale receptanţei sau factorului de amplificare complex al sistemului (care pentru g = const. au acelaşi diametru). În figura 8, punctele în care pulsaţia are aceeaşi valoare s-au unit prin linii întrerupte. Se observă că la sisteme liniare (fig. 8*a*) liniile de pulsaţie constantă sînt drepte concurente în origine. La sistemele cu caracteristică elastică „tare" (fig. 8*b*) aceste linii se curbează spre pulsaţiile joase, iar la sistemele cu caracteristică „moale" (fig. 8*c*) — spre pulsaţiile înalte.

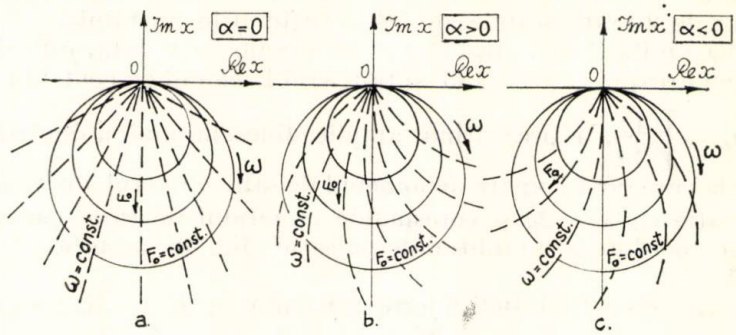


Fig. 8

2.3. FENOMENE DE SALT

Dacă se trasează diagramele polare ale deplasării pentru valori F_0/k din ce în ce mai mari (fig. 9), se observă că liniile de pulsație constantă se curbează atît de mult încît devin tangente la cercurile de răspuns.

Punctele de tangență ale unei diagrame polare cu liniile de pulsație constantă, corespund punctelor în care diagramele amplitudine-pulsație (fig. 3) și fază-pulsație (fig. 4) admit tangente verticale. Și în planul complex, locul geometric al acestor puncte (desenat cu linie groasă),

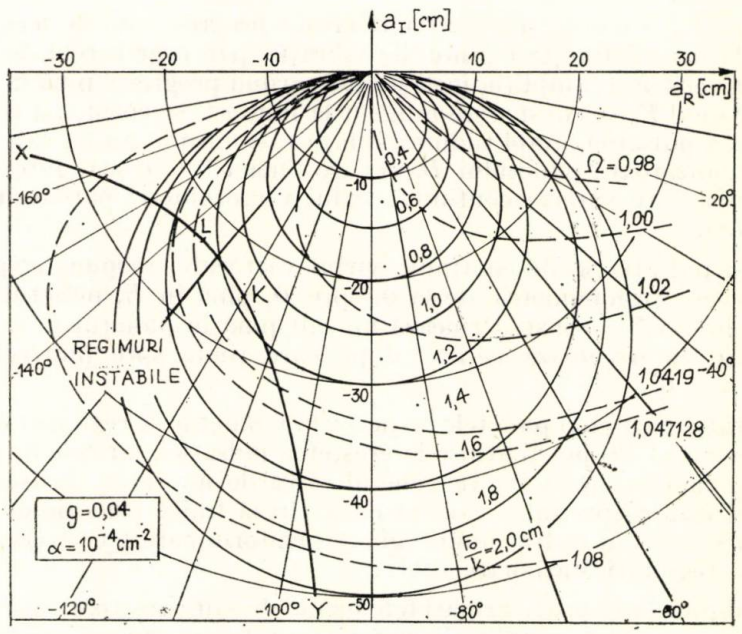


Fig. 9

definit de relaţiile (8) şi (12) este o „curbă limită", separînd domeniul regimurilor de vibraţii stabile, de cel al regimurilor instabile.

Curba limită XLY, trasată pentru o valoare α dată, este simetrică în raport cu dreapta $\varphi = -135°$ şi tangentă la cercul cu centrul în origine şi rază $a_L = \sqrt{\frac{4g}{3\alpha}}$, reprezentînd amplitudinea minimă a deplasării (răspunsului) la care poate apare fenomenul de salt. Punctul de tangenţă L are o pulsaţie $\omega_n\sqrt{1+2g}$ şi corespunde punctului în care curba limită trasată în coordonate amplitudine-pulsaţie (fig. 3) admite o tangentă orizontală.

O astfel de curbă limită este tangentă în K la diagrama polară (a răspunsului) de parametru $\frac{F_0}{k} = \sqrt{\frac{32g^3}{9\sqrt{3}\alpha}}$ şi la curba de pulsaţie constantă $\Omega_K = \sqrt{1+\sqrt{3g}}$. Rezultă că pentru forţe $F_0 < k\sqrt{\frac{32g^3}{9\sqrt{3}\alpha}}$ şi pulsaţii $\omega < \omega_n\sqrt{1+\sqrt{3g}}$ nu apar fenomene de salt. Din contră, pentru forţe sau pulsaţii superioare acestor valori, curba limită intersectează cercurile răspunsului şi curbele de pulsaţie constantă. Punctele situate pe arcele de curbă delimitate de aceste intersecţii, definesc regimuri instabile de vibraţii.

Se pot pune în evidenţă cele două tipuri de discontinuităţi ce apar în variaţia amplitudinii şi fazei vibraţiei armonice atunci cînd variază fie numai pulsaţia ω (la $F_0 = \text{const.}$), fie numai amplitudinea forţei perturbatoare F_0 (la $\omega = \text{const.}$).

Dacă $F_0 = \text{const.}$ şi pulsaţia ω creşte progresiv de la zero, atunci punctul P, care defineşte regimul de vibraţie, parcurge cercul de răspuns (fig. 10) în sens orar, amplitudinea şi faza variind progresiv pînă în punctul C, unde cercul $F_0 = \text{const.}$ este tangent la linia $\omega'' = \text{const.}$ La o creştere ulterioară a pulsaţiei, amplitudinea şi faza răspunsului au un salt la valorile corespunzătoare punctului D, în care linia $\omega'' = \text{const.}$ intersectează cercul, după care variază continuu, vîrful vectorului a^* parcurgînd arcul de cerc DO.

Cînd pulsaţia scade continuu, vîrful vectorului răspuns P parcurge cercul în sens trigonometric de la 0, spre D, pînă în E, punctul de tangenţă cu linia $\omega' = \text{const.}$ Urmează un salt pînă în punctul F, unde linia $\omega' = \text{const.}$ intersectează cercul, după care tinde spre punctul N, de pulsaţie $\omega = 0$.

Rezultă că numai punctele de pe arcul CE definesc regimuri instabile. Cele de pe arcul FC pot fi atinse la creşterea pulsaţiei, iar cele de pe arcul DE — la scăderea acesteia. În general salturile nu se fac brusc; amplitudinea şi faza răspunsului variază cu o viteză finită (funcţie de amortizarea din sistem) în cadrul unui regim tranzitoriu care face trecerea între cele două regimuri staţionare limită.

Pe figura 11 se poate urmări fenomenul de salt care apare atunci cînd, menţinînd $\omega = \text{const.}$, amplitudinea forţei perturbatoare variază continuu. Dacă F_0 creşte progresiv de la zero, vîrful vectorului răspunsului parcurge curba $\omega = \text{const.}$ de la 0, la V, pînă în S, punctul de tangenţă cu cercul

$F_0'' = \text{const.}$ La o creștere ulterioară a forței, amplitudinea și faza răspunsului au salturi la valorile corespunzătoare punctului T, în care cercul $F_0'' = \text{const.}$ intersectează curba $\omega = \text{const.}$, după care variază continuu. La descreșterea forței F_0, vîrful vectorului răspuns parcurge curba $\omega = \text{const.}$ în sens contrar, prin T pînă în U, punctul de tangență cu cercul $F_0' = \text{const.}$ Urmează un salt pînă în punctul V, situat pe același cerc, după care se tinde spre originea 0.

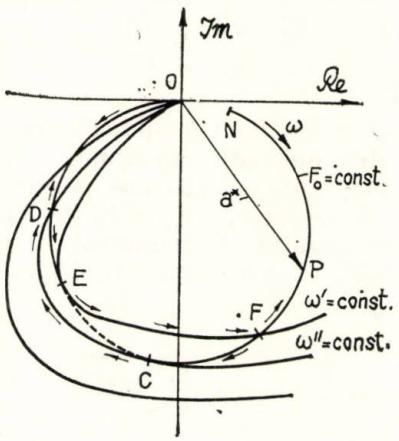


Fig. 10

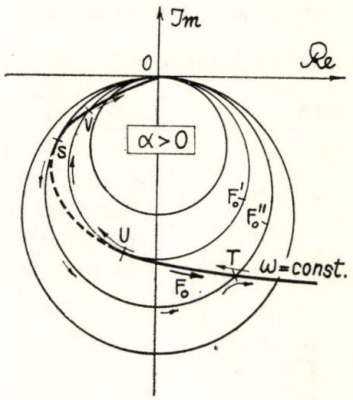


Fig. 11

2.4. IDENTIFICAREA PARAMETRILOR DINAMICI AI SISTEMULUI

Dacă în încercarea la rezonanță a structurilor mecanice se ating amplitudini relativ mari de vibrație, răspunsul prezintă particularitățile unui sistem cu caracteristică elastică neliniară. Considerînd doar sisteme cu frecvențe proprii relativ depărtate, într-o primă aproximație se poate admite că, în vecinătatea „rezonanțelor", răspunsul acestora poate fi descris de ecuația (1), în care m, h, k și α sînt parametri generalizați, corespunzători „modului" de vibrație specificat de coordonata x. Determinarea lor pe baza metodelor elaborate pentru analiza sistemelor liniare duce desigur la valori eronate, fiind necesară o metodă bazată pe analiza răspunsului oscilatorului neliniar, cu un grad de libertate.

Comparînd cercurile din figura 6, pe care au fost marcate puncte corespunzătoare unor creșteri egale ale pulsației excitatoare, se observă că pe diagrama sistemului neliniar (fig. 6*b*) arcul de cerc de lungime maximă dintre două puncte consecutive nu mai apare în zona amplitudinii maxime, ca la sistemul liniar (fig. 6*a*), astfel încît criteriul Kennedy-Pancu de localizare a „rezonanței" nu mai poate fi aplicat. În schimb, pulsația corespunzătoare punctului de amplitudine maximă a răspunsului (diferită de pulsația de rezonanță a sistemului liniar) poate fi determinată, fie la intersecția cu semiaxa imaginară negativă, fie independent de sistemul de axe, folosind excitația cu forțe în cvadratură [13].

În această situaţie, pentru determinarea parametrilor dinamici ai sistemului oscilant se poate folosi următoarea metodă :

Se înregistrează mai multe diagrame polare ale deplasării (răspunsului), pentru diferite valori F_0 ale amplitudinii forţei perturbatoare. Folosind excitaţia cu forţe în cvadratură se determină apoi punctele corespunzătoare amplitudinii maxime a deplasării. În cazul unei izolări perfecte a modului de vibraţie studiat, acestea corespund „rezonanţei de fază", adică unui defazaj $\varphi = -90$. Dacă diagramele pot fi aproximate cu cercuri şi dacă rapoartele amplitudinilor maxime consecutive (calculate ca diametre ale acestor cercuri) sînt egale cu rapoartele amplitudinilor forţelor excitatoare corespunzătoare $\left(\frac{a'_r}{a''_r} = \frac{F'_0}{F''_0}, \frac{a''_r}{a'''_r} = \frac{F''_0}{F'''_0}, \ldots\right)$ modelul amortizării histeretice este valabil.

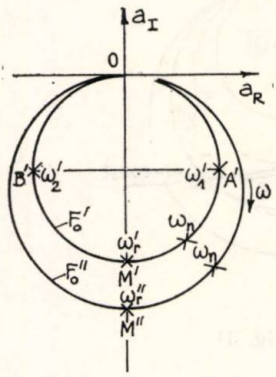


Fig. 12

Fie ω'_r şi ω''_r pulsaţiile corespunzătoare punctelor M' şi M'' de amplitudine maximă a răspunsului, pe două diagrame înregistrate pentru forţe de excitaţie F'_0 şi, respectiv, $F''_0 > F'_0$ (fig. 12). Pe baza relaţiei (18) rezultă că diametrul $A'B'$, perpendicular pe OM', intersectează cercul $F'_0 = \text{const.}$ în punctele de pulsaţii

$$\omega'_1 = \omega_n \sqrt{1 - g + \frac{3}{4}\alpha \overline{OA'}^2}, \tag{18a}$$

$$\omega'_2 = \omega_n \sqrt{1 + g + \frac{3}{4}\alpha \overline{OB'}^2}, \tag{18b}$$

unde $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Deoarece $\overline{OA'} = \overline{OB'}$, se obţine

$$\omega'^2_2 - \omega'^2_1 = 2g\omega_n^2,$$

de unde rezultă factorul de amortizare

$$g = \frac{\omega'^2_2 - \omega'^2_1}{2\omega_n^2}. \tag{19}$$

Dacă se notează

$$OM' = a'_r \text{ şi } OM'' = a''_r,$$

relaţia (17) se scrie

$$\omega'_r = \omega_n \sqrt{1 + \frac{3}{4}\alpha a'^2_r}, \tag{17a}$$

$$\omega''_r = \omega_n \sqrt{1 + \frac{3}{4}\alpha a''^2_r}, \tag{17b}$$

de unde rezultă

$$\omega_n^2 = \frac{\omega_r'^2 - \left(\frac{a_r'}{a_r''}\right)^2 \omega_r''^2}{1 - \left(\frac{a_r'}{a_r''}\right)^2} \tag{20}$$

și coeficientul de neliniaritate

$$\alpha = \frac{4}{3} \frac{1 - \left(\frac{\omega_r'}{\omega_r''}\right)^2}{\left(\frac{\omega_r'}{\omega_r''}\right)^2 a_r''^2 - a_r'^2}. \tag{21}$$

Înlocuind expresia (20) în relația (19) se obține factorul de amortizare g.

Panta caracteristicii elastice în origine este

$$k = \frac{1}{g} \frac{F_0'}{a_r'} = \frac{1}{g} \frac{F_0''}{a_r''}; \tag{22}$$

Masa echivalentă și coeficientul de amortizare histeretică echivalentă se calculează apoi cu relațiile (5)

$$m = \frac{k}{\omega_n^2}, \quad h = gk. \tag{5a}$$

3. ÎNCERCAREA UNUI MATERIAL NELINIAR

Pentru ilustrarea aplicării metodei descrise mai sus, la determinarea caracteristicilor dinamice ale spumelor poliuretanice, în figura 13 se prezintă montajul experimental și schema-bloc a aparaturii folosite. S-au utilizat probe de 80 × 80 × 50 mm, lipite între o bază „rigidă" și un disc de oțel supus la oscilații de translație verticală cu ajutorul unui vibrator electromagnetic, prin intermediul unui captor de forțe piezoelectric. Oscilațiile de rotație în jurul unei axe orizontale au fost anulate prin realizarea unei alinieri corecte în cadrul montajului și prin folosirea a două accelerometre dispuse simetric față de mijlocul discului, unul jucînd rolul de masă de echilibrare.

Menținînd constantă amplitudinea forței excitatoare (fără a efectua însă corecția pentru masa dispusă între cristalul piezoelectric al captorului de forțe și discul de oțel) s-au trasat diagrame polare ale deplasării discului. În figura 14 se prezintă diagramele înregistrate la trei valori ale forței de excitație, pentru o spumă poliuretanică pe bază de poliester, avînd masa specifică 0,03 g/cm³. Gradarea axelor s-a făcut pe baza unei etalonări

prealabile, măsurînd răspunsul unor mase cunoscute, ataşate de excitator prin intermediul captorului de forţe [14].

Folosind excitaţia cu forţe în cvadratură s-au determinat punctele corespunzătoare amplitudinilor maxime de vibraţie şi s-au trasat cercurile

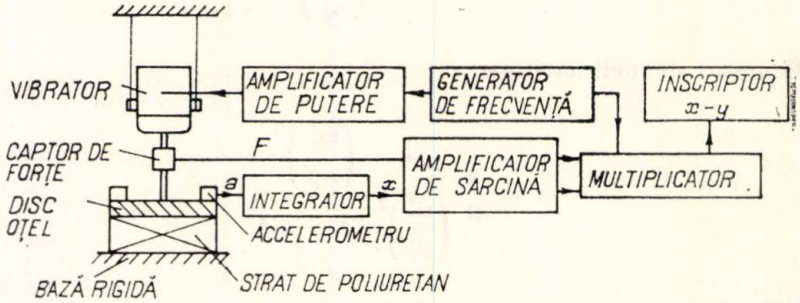


Fig. 13

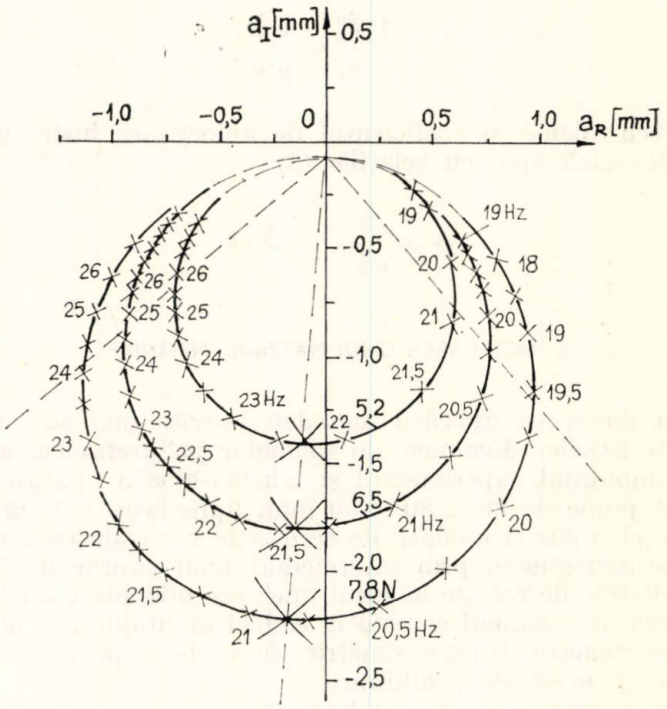


Fig. 14

ce aproximează cel mai bine diagramele polare în vecinătatea acestor puncte, măsurîndu-se apoi diametrele acestor cercuri. Din „originea deplasată" a cercurilor s-au trasat raze vectoare la unghiuri de $\pm 45°$

față de diametrul care trece prin punctul de amplitudine maximă, determinînd frecvențele punctelor de intersecție cu cercurile. Pe baza relațiilor (19)—(23) s-au calculat apoi următoarele caracteristici dinamice ale modelului cu parametri concentrați echivalent (propagarea de unde fiind neglijabilă la frecvențele joase folosite):

$$f_n = 22{,}44 \text{ Hz}, \; g = 0{,}215, \; k = 164 \text{ N/cm}, \; \alpha = -3{,}78 \times 10^{-4} \text{ cm}^{-2},$$

$$m = 0{,}82 \text{ kg}.$$

Prin modificarea masei discului de oțel s-a pus în evidență variația cu frecvența a acestor mărimi. Valorile factorului de amortizare g, calculate folosind în mod eronat relațiile stabilite pentru sisteme liniare [1], sînt cu atît mai mari față de cele stabilite cu relația (19) cu cît F_0 crește; pentru $F_0 = 7{,}8$N eroarea este de 15,4%.

4. CONCLUZII

Dacă se admite aproximarea prin prima armonică a răspunsului unei structuri neliniare la o excitație armonică, se poate defini o funcție de răspuns în frecvență, analogă funcției de transfer a sistemelor liniare, care însă depinde atît de frecvența cît și de amplitudinea excitației.

Ca urmare, răspunsul unei structuri neliniare nu mai poate fi descris de o singură diagramă polară „gradată" în frecvență, ci de o familie de diagrame, trasate pentru diferite valori ale amplitudinii forței excitatoare. Forma acestor diagrame este determinată de caracteristica de amortizare a sistemului, în timp ce curbura liniilor de frecvență constantă, trasate în planul complex, indică natura caracteristicii elastice neliniare.

Conținînd concentrate informațiile referitoare la variația cu frecvența atît a amplitudinii, cît și a fazei răspunsului, diagramele polare permit o descriere mai completă a fenomenelor de „salt" ce apar atunci cînd frecvența sau amplitudinea excitației variază continuu.

Efectul neliniarităților asupra diagramelor polare ale răspunsului în frecvență, prezentat pe larg în lucrare, trebuie avut în vedere la măsurarea caracteristicilor dinamice ale materialelor și structurilor, în încercări la amplitudini mari de vibrație. Metoda propusă în lucrare pentru „identificarea" sistemelor neliniare cu frecvențe proprii relativ depărtate, se bazează pe analiza dinamică a modelului oscilatorului cu un grad de libertate, cu amortizare histeretică liniară și caracteristică elastică cubică, care se dovedește o bună aproximație pentru descrierea răspunsului unei structuri neliniare, în vecinătatea unei „rezonanțe" principale izolate.

ANEXA 1

Răspunsul armonic staționar al oscilatorului cu amortizare vîscoasă liniară și caracteristică elastică cubică

Dacă se consideră o ecuație de mișcare de forma

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + k(x + \alpha x^3) = F_0 \cos\omega t$$

şi o soluţie armonică staţionară aproximativă

$$x = a\cos(\omega t + \varphi),$$

se obţine [7], [11], [12]

$$\left(1 + \frac{3}{4}\,\alpha a^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\zeta^2\Omega^2 = \frac{F_0^2}{k^2 a^2}$$

sau

$$\Omega^2 = \left(1 + \frac{3}{4}\,\alpha a^2 - 2\zeta^2\right) \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(1 + \frac{3}{4}\,\alpha a^2 - 2\zeta^2\right)^2 - \left(1 + \frac{3}{4}\,\alpha a^2 - \frac{F_0^2}{k^2 a^2}\right)}$$

şi

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{2\zeta\Omega}{\Omega^2 - 1 - \frac{3}{4}\,\alpha a^2},$$

unde s-a notat

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}, \quad \omega_n^2 = \frac{k}{m}, \quad \zeta = \frac{c}{2m\omega_n}.$$

Primită la redacţie la 17 iunie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. M. Radeş, *Metode de rezonanţă pentru studiul dinamic al structurilor deformabile*, St. cerc. mec. apl., **32**, 607–633 (1973).
2. C. C. Kennedy şi C. D. P. Pancu, *Use of vectors in vibration measurement and analysis*, J. aeronaut. Sci., **14**, 603–625 (1947).
3. M. Radeş, *Metode de analiză grafică a răspunsului dinamic al sistemelor mecanice*, St. cerc. mec. apl., **33**, 75–103 (1974).
4. E. Mihăilescu şi M. Radeş, *Dynamic structural measurement using the method of forces in quadrature*, Symp. "Experimental Technique in Applied Mechanics", Bucharest, 21–34 (1972).
5. M Radeş, *A technique for the dynamic analysis of anti-vibration mountings*, Proc. of the 44th Euromech Colloquium "Dynamics of Machine Foundations", Bucharest, 29–31 Oct., 363–378 (1973).
6. G. de Vries, *Remarks on the analysis of the admittance curves of a mechanical structure*, La Recherche Aerospatiale, **95**, 49–55 (1963).
7. L. Ia. Banah şi M. D. Perminov, *Issledovanie dinamiceskih svoistv rezonansnîh vibromaşin s pomosciu amplitudno-fazovîh ciastotnîh harakteristik*, Sbornik „*Nelineinie kolebania i perehodnie protesi v maşinah*", Izdat. Nauka, Moskva, 1972, p. 209–216.

8. A. J. PRETLOVE, *Some current methods in vibration measurement*, Symp. "Vibration in Civil Engineering", London, Butterworths, 95–110 (1966).
9. N. H. HANNS și S. A. TOBIAS, *The non-linear dynamic behaviour of a machine-tool structure*, Int. J. Mach. Tool Des. Res., **9**, 293–307 (1969).
10. P. GROOTENHUIS, *Measurement of the dynamic properties of damping materials*, Proc. Int. Symp. on the Damping of Vibrations of Plates by Means of Layers, Leuven, Sept. 1967.
11. R. G. WHITE, *Effects of non-linearity due to large deflections in the resonance testing of structures*, J. Sound Vib., **16**, 255–267 (1971).
12. F. DINCĂ și C. TEODOSIU, *Vibrații neliniare și aleatoare*, Editura Acad. R.S. România, București, 1969.
13. M. RADEȘ, *A technique for measuring the dynamic properties of polyurethane foam layers*, Al 2-lea Simp. Int. RILEM „Noi dezvoltări în încercarea nedistructivă a materialelor nemetalice", Mamaia, 4–7 Sept. 1974.
14. M. RADEȘ, *Vibrațiile verticale axial-simetrice ale unui corp rigid rezemat pe o fundație inerțială de tip Pasternak*, St. cerc. mec. apl., **32**, 231–253 (1973).

CALCULUL RIGIDITĂȚILOR DIAFRAGMELOR PLINE ȘI CU GOLURI LA CLĂDIRI ETAJATE. II

de RADU AGENT
TUDOR POSTELNICU
Institutul de construcții București

VOICU MAGER,
EMIL LERNER
I.S.L.G.C. București

3. ALCĂTUIREA TABELELOR

3.1. COEFICIENȚII DAȚI ÎN TABELE

În tabelele II—X se dau valorile coeficienților μ_v și μ_s, cu care

$$I_{ev} = \mu_v I_0, \qquad I_{es} = \mu_s I_0. \tag{13}$$

Tabelele sînt alcătuite pentru următorul domeniu de variație a parametrilor considerați:

— numărul de niveluri $n = 3 \ldots 11$;

— raportul de rigidități $\lambda = K_r/K_m = 0{,}00 \ldots 5{,}00$;

— coeficientul $\gamma = 1{,}02 \ldots 1{,}50$.

Cazul extrem $\gamma = 1{,}00$ (montanți indeformabili axial) nu a putut fi încadrat în aceeași formă de întabulare, deoarece ar fi corespuns la $I_0 = \infty$. De aceea, pentru acest caz s-a dat separat tabela XI, în care coeficienții μ_v, μ_s sînt astfel transformați încît formulele (13) să se utilizeze sub forma

$$I_{ev} = \mu_v I_m, \qquad I_{es} = \mu_s I_m. \tag{13'}$$

În tabela I se dau valorile coeficienților:

$$\nu_v = \frac{\beta_v}{0{,}425\ \alpha_v}, \qquad \nu_s = \frac{\beta_s}{0{,}425\ \alpha_s}; \tag{14}$$

Notă: bibliografia a fost dată în partea I a articolului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 35, NR. 1, 1976, P. 93—111

Cu ajutorul acestora, formulele (10) se aplică în final sub forma simplificată :

$$\bar{I}_{ev} = \frac{\mu_v I_0}{1 + \nu_v \dfrac{\mu_v I_0}{2\, A_{mt}\, H^2}},$$

$$\bar{I}_{es} = \frac{\mu_s I_0}{1 + \nu_s \dfrac{\mu_s I_0}{2\, A_{mt}\, H^2}}.$$

În cazul special cînd se utilizează tabela XI (montanţi indeformabili axial), în (15) se introduce I_m în loc de I_0.

Cu privire la domeniul de utilizare a coeficienţilor daţi în tabelele II—XI sînt de remarcat următoarele :

— gama de rapoarte K_r/K_m între rigidităţile riglelor şi ale montanţilor acoperă atît domeniul diafragmelor cu goluri mijlocii şi mari, cît şi cel al cadrelor obişnuite etajate (dacă structura acestora pe verticală este monotonă) ;

— rubrica K_r/K_m poate servi şi pentru diafragmele pline, în care caz cei doi montanţi se reduc la unul singur şi deci $I_0 = I_m$, iar în formulele (15) dispare în consecinţă coeficientul 2 de la numitor.

3.2. TABELE

Tabela I

Coeficienţii ν_v, ν_s pentru n = 3 — 11 niveluri

n	nivelul caracteristic (cel mai apropiat de 0,8 n)	ν_v	ν_s
3	2	12,92	11,52
4	3	11,90	10,59
5	4	11,37	10,23
6	5	10,98	9,96
7	6	10,71	9,72
8	6	12,50	11,22
9	7	12,10	10,82
10	8	11,80	10,72
11	9	11,52	10,48

Tabela II

Coeficienții μ_v, μ_s pentru 3 niveluri

γ	1,02		1,05		1,10		1,15		1,20		1,50	
λ	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s
0,00	0,020	0,020	0,047	0,047	0,091	0,091	0,131	0,131	0,167	0,167	0,333	0,333
0,05	0,024	0,024	0,057	0,057	0,109	0,109	0,156	0,156	0,198	0,199	0,392	0,394
0,10	0,027	0,027	0,065	0,066	0,124	0,125	0,177	0,178	0,225	0,227	0,438	0,442
0,20	0,033	0,034	0,080	0,082	0,151	0,153	0,214	0,217	0,270	0,274	0,507	0,513
0,40	0,044	0,046	0,105	0,108	0,194	0,199	0,269	0,276	0,335	0,342	0,578	0,586
0,60	0,053	0,055	0,125	0,129	0,227	0,234	0,311	0,320	0,381	0,391	0,637	0,647
0,80	0,061	0,064	0,142	0,148	0,254	0,263	0,344	0,355	0,416	0,427	0,674	0,686
1,00	0,069	0,072	0,157	0,164	0,277	0,287	0,372	0,384	0,445	0,457	0,690	0,702
1,20	0,075	0,079	0,171	0,178	0,297	0,309	0,395	0,408	0,469	0,483	0,709	0,721
1,60	0,087	0,091	0,194	0,203	0,331	0,344	0,431	0,446	0,507	0,523	0,738	0,750
2,00	0,097	0,102	0,214	0,224	0,358	0,373	0,461	0,477	0,537	0,554	0,759	0,771
3,00	0,118	0,125	0,252	0,266	0,409	0,427	0,514	0,532	0,589	0,607	0,791	0,803
5,00	0,147	0,157	0,303	0,321	0,471	0,491	0,576	0,596	0,647	0,666	0,843	0,855

Tabela III

Coeficienții μ_v, μ_s pentru 4 niveluri

γ	1,02		1,05		1,10		1,15		1,20		1,50	
λ	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s
0,00	0,020	0,020	0,047	0,047	0,091	0,091	0,131	0,131	0,167	0,167	0,333	0,333
0,05	0,026	0,026	0,064	0,064	0,121	0,121	0,172	0,173	0,219	0,220	0,428	0,431
0,10	0,032	0,033	0,077	0,078	0,146	0,147	0,206	0,208	0,261	0,264	0,495	0,499
0,20	0,043	0,044	0,101	0,103	0,188	0,191	0,262	0,267	0,326	0,332	0,572	0,578
0,40	0,060	0,062	0,140	0,144	0,251	0,257	0,340	0,349	0,415	0,424	0,672	0,682
0,60	0,075	0,079	0,171	0,176	0,298	0,307	0,396	0,407	0,471	0,482	0,715	0,724
0,80	0,088	0,092	0,197	0,205	0,336	0,347	0,437	0,450	0,515	0,527	0,748	0,758
1,00	0,100	0,104	0,220	0,229	0,368	0,380	0,471	0,485	0,549	0,563	0,771	0,781
1,20	0,110	0,116	0,240	0,250	0,395	0,408	0,500	0,514	0,577	0,591	0,789	0,799
1,60	0,129	0,136	0,274	0,287	0,439	0,454	0,545	0,561	0,620	0,635	0,814	0,823
2,00	0,146	0,154	0,303	0,317	0,474	0,491	0,579	0,595	0,652	0,667	0,850	0,860
3,00	0,180	0,191	0,359	0,375	0,534	0,552	0,638	0,655	0,705	0,720	0,881	0,890
5,00	0,228	0,242	0,429	0,449	0,606	0,625	0,701	0,718	0,759	0,774	0,910	0,917

Tabela IV

Coeficienții μ_v, μ_s pentru 5 niveluri

γ	1,02		1,05		1,10		1,15		1,20		1,50	
λ	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s
0,00	0,020	0,020	0,047	0,047	0,091	0,091	0,131	0,131	0,167	0,167	0,333	0,333
0,05	0,029	0,030	0,071	0,072	0,135	0,136	0,192	0,193	0,243	0,245	0,468	0,471
0,10	0,038	0,039	0,092	0,093	0,171	0,173	0,240	0,243	0,301	0,305	0,544	0,549
0,20	0,053	0,055	0,126	0,129	0,228	0,233	0,313	0,319	0,385	0,391	0,643	0,650
0,40	0,079	0,082	0,179	0,185	0,310	0,319	0,411	0,421	0,487	0,497	0,729	0,737
0,60	0,100	0,104	0,221	0,229	0,370	0,381	0,474	0,486	0,552	0,564	0,776	0,784
0,80	0,119	0,124	0,256	0,266	0,416	0,426	0,522	0,535	0,599	0,612	0,805	0,813
1,00	0,135	0,142	0,286	0,297	0,454	0,468	0,560	0,574	0,635	0,648	0,825	0,832
1,20	0,151	0,158	0,312	0,325	0,485	0,500	0,591	0,605	0,663	0,676	0,859	0,867
1,60	0,178	0,187	0,356	0,371	0,533	0,548	0,637	0,652	0,705	0,718	0,883	0,890
2,00	0,201	0,212	0,392	0,402	0,570	0,586	0,671	0,686	0,735	0,748	0,899	0,906
3,00	0,249	0,262	0,458	0,476	0,634	0,651	0,727	0,741	0,782	0,794	0,923	0,929
5,00	0,313	0,330	0,537	0,556	0,703	0,720	0,783	0,796	0,828	0,839	0,945	0,950

Tabela V

Coeficienţii μ_v, μ_s pentru 6 niveluri

γ	1,02		1,05		1,10		1,15		1,20		1,50	
λ	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s
0,00	0,020	0,020	0,047	0,047	0,091	0,091	0,131	0,131	0,167	0,167	0,333	0,333
0,05	0,034	0,035	0,080	0,081	0,151	0,153	0,214	0,216	0,270	0,273	0,509	0,513
0,10	0,045	0,046	0,108	0,110	0,198	0,202	0,276	0,280	0,343	0,348	0,591	0,597
0,20	0,066	0,068	0,153	0,157	0,271	0,277	0,365	0,372	0,442	0,450	0,700	0,707
0,40	0,100	0,104	0,221	0,228	0,370	0,380	0,475	0,486	0,553	0,564	0,777	0,785
0,60	0,128	0,134	0,273	0,283	0,438	0,451	0,546	0,558	0,621	0,633	0,819	0,826
0,80	0,153	0,160	0,316	0,328	0,490	0,504	0,596	0,609	0,668	0,680	0,863	0,870
1,00	0,175	0,184	0,352	0,365	0,529	0,543	0,634	0,648	0,703	0,715	0,883	0,890
1,20	0,195	0,205	0,383	0,397	0,562	0,577	0,664	0,678	0,729	0,741	0,897	0,904
1,60	0,230	0,242	0,433	0,449	0,612	0,627	0,709	0,722	0,767	0,779	0,917	0,923
2,00	0,260	0,273	0,473	0,490	0,649	0,665	0,740	0,753	0,794	0,804	0,930	0,935
3,00	0,318	0,334	0,544	0,562	0,710	0,725	0,790	0,802	0,834	0,844	0,949	0,953
5,00	0,394	0,413	0,624	0,642	0,772	0,785	0,838	0,847	0,872	0,880	0,963	0,967

Tabela VI

Coeficienţii μ_v, μ_s pentru 7 niveluri

γ	1,02		1,05		1,10		1,15		1,20		1,50	
λ	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s
0,00	0,020	0,020	0,047	0,047	0,091	0,091	0,131	0,131	0,167	0,167	0,333	0,333
0,05	0,038	0,038	0,091	0,092	0,170	0,172	0,239	0,241	0,299	0,302	0,534	0,547
0,10	0,054	0,055	0,126	0,128	0,228	0,232	0,313	0,318	0,385	0,391	0,644	0,650
0,20	0,080	0,083	0,182	0,187	0,315	0,322	0,416	0,425	0,492	0,501	0,735	0,742
0,40	0,123	0,128	0,264	0,273	0,427	0,439	0,535	0,546	0,611	0,622	0,814	0,821
0,60	0,159	0,166	0,326	0,338	0,502	0,515	0,607	0,620	0,679	0,690	0,870	0,876
0,80	0,190	0,199	0,375	0,388	0,554	0,568	0,657	0,670	0,723	0,735	0,895	0,901
1,00	0,217	0,228	0,416	0,430	0,595	0,609	0,694	0,707	0,755	0,766	0,912	0,917
1,20	0,242	0,253	0,449	0,465	0,628	0,642	0,722	0,735	0,779	0,790	0,923	0,929
1,60	0,284	0,297	0,504	0,520	0,677	0,691	0,763	0,775	0,813	0,823	0,939	0,944
2,00	0,319	0,334	0,545	0,562	0,712	0,725	0,791	0,802	0,835	0,844	0,950	0,954
3,00	0,386	0,403	0,616	0,634	0,767	0,780	0,834	0,844	0,870	0,877	0,964	0,968
5,00	0,468	0,488	0,693	0,708	0,821	0,831	0,875	0,881	0,899	0,906	0,976	0,979

Tabela VII

Coeficienţii μ_v, μ_s pentru 8 niveluri

γ	1,02		1,05		1,10		1,15		1,20		1,50	
λ	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s
0,00	0,020	0,020	0,047	0,047	0,091	0,091	0,131	0,131	0,167	0,167	0,333	0,333
0,05	0,041	0,042	0,098	0,100	0,183	0,186	0,256	0,260	0,319	0,324	0,565	0,571
0,10	0,059	0,060	0,137	0,141	0,246	0,252	0,335	0,342	0,409	0,417	0,668	0,676
0,20	0,088	0,091	0,197	0,204	0,336	0,346	0,437	0,449	0,516	0,527	0,752	0,761
0,40	0,134	0,140	0,283	0,295	0,451	0,466	0,558	0,573	0,633	0,647	0,826	0,834
0,60	0,172	0,182	0,347	0,363	0,524	0,540	0,630	0,645	0,699	0,713	0,881	0,889
0,80	0,205	0,217	0,398	0,415	0,577	0,595	0,678	0,694	0,742	0,755	0,905	0,912
1,00	0,234	0,248	0,439	0,457	0,618	0,634	0,714	0,729	0,772	0,785	0,920	0,926
1,20	0,260	0,275	0,474	0,493	0,650	0,667	0,741	0,755	0,795	0,806	0,932	0,937
1,60	0,305	0,322	0,529	0,548	0,698	0,715	0,781	0,794	0,827	0,837	0,946	0,950
2,00	0,341	0,360	0,570	0,590	0,732	0,748	0,807	0,819	0,848	0,857	0,956	0,960
3,00	0,410	0,431	0,640	0,660	0,785	0,800	0,848	0,858	0,881	0,888	0,970	0,973
5,00	0,495	0,518	0,715	0,733	0,836	0,847	0,884	0,893	0,908	0,915	0,980	0,983

Tabela VIII

Coeficienții μ_v, μ_s pentru 9 niveluri

γ	1,02		1,05		1,10		1,15		1,20		1,50	
λ	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s
0,00	0,020	0,020	0,047	0,047	0,091	0,091	0,131	0,131	0,167	0,167	0,333	0,333
0,05	0,047	0,048	0,110	0,112	0,203	0,206	0,281	0,286	0,349	0,354	0,597	0,604
0,10	0,068	0,070	0,156	0,161	0,277	0,284	0,372	0,380	0,446	0,455	0,707	0,717
0,20	0,103	0,107	0,227	0,235	0,378	0,389	0,483	0,495	0,561	0,574	0,783	0,792
0,40	0,159	0,167	0,326	0,339	0,502	0,517	0,608	0,622	0,679	0,692	0,870	0,878
0,60	0,205	0,216	0,397	0,413	0,577	0,593	0,678	0,693	0,742	0,754	0,905	0,912
0,80	0,244	0,257	0,452	0,470	0,631	0,647	0,725	0,739	0,782	0,793	0,925	0,931
1,00	0,277	0,292	0,496	0,514	0,670	0,686	0,758	0,771	0,809	0,820	0,939	0,944
1,20	0,307	0,323	0,532	0,551	0,701	0,717	0,783	0,796	0,830	0,839	0,948	0,952
1,60	0,357	0,375	0,587	0,606	0,746	0,760	0,818	0,829	0,857	0,866	0,959	0,963
2,00	0,397	0,417	0,628	0,647	0,776	0,790	0,841	0,852	0,875	0,883	0,967	0,971
3,00	0,471	0,492	0,695	0,713	0,824	0,835	0,877	0,885	0,903	0,908	0,979	0,981
5,00	0,558	0,579	0,763	0,779	0,867	0,877	0,907	0,914	0,925	0,931	0,987	0,990

Tabela IX

Coeficienții μ_v, μ_s pentru 10 niveluri

γ	1,02		1,05		1,10		1,15		1,20		1,50	
λ	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s
0,00	0,020	0,020	0,047	0,047	0,091	0,091	0,131	0,131	0,167	0,167	0,333	0,333
0,05	0,058	0,060	0,136	0,139	0,245	0,250	0,334	0,340	0,408	0,415	0,668	0,675
0,10	0,078	0,080	0,177	0,182	0,307	0,315	0,408	0,416	0,483	0,492	0,728	0,766
0,20	0,119	0,124	0,257	0,266	0,418	0,429	0,525	0,538	0,602	0,614	0,808	0,816
0,40	0,186	0,194	0,368	0,382	0,547	0,561	0,650	0,664	0,718	0,729	0,891	0,898
0,60	0,239	0,250	0,445	0,461	0,624	0,639	0,719	0,732	0,777	0,787	0,922	0,928
0,80	0,283	0,297	0,502	0,519	0,676	0,690	0,763	0,774	0,813	0,823	0,940	0,945
1,00	0,320	0,336	0,547	0,565	0,714	0,728	0,793	0,803	0,837	0,846	0,951	0,955
1,20	0,353	0,370	0,583	0,601	0,743	0,756	0,816	0,826	0,855	0,863	0,958	0,962
1,60	0,407	0,425	0,638	0,655	0,784	0,796	0,846	0,856	0,879	0,887	0,968	0,972
2,00	0,450	0,469	0,677	0,694	0,812	0,823	0,867	0,876	0,894	0,901	0,975	0,978
3,00	0,526	0,546	0,740	0,755	0,853	0,862	0,897	0,904	0,917	0,923	0,984	0,987
5,00	0,612	0,632	0,802	0,815	0,889	0,898	0,923	0,929	0,936	0,941	0,991	0,994

Tabela X

Coeficienții μ_v, μ_s pentru 11 niveluri

γ	1,02		1,05		1,10		1,15		1,20		1,50	
λ	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_v	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s	μ_v	μ_s
0,00	0,020	0,020	0,047	0,047	0,091	0,091	0,131	0,131	0,167	0,167	0,333	0,333
0,05	0,052	0,053	0,123	0,125	0,224	0,228	0,308	0,313	0,379	0,385	0,637	0,644
0,10	0,088	0,101	0,198	0,223	0,338	0,373	0,443	0,482	0,519	0,558	0,755	0,785
0,20	0,136	0,162	0,288	0,331	0,457	0,509	0,564	0,614	0,640	0,686	0,831	0,857
0,40	0,213	0,256	0,409	0,469	0,589	0,647	0,689	0,739	0,751	0,794	0,910	0,932
0,60	0,273	0,327	0,490	0,555	0,666	0,721	0,755	0,799	0,807	0,843	0,938	0,955
0,80	0,322	0,383	0,549	0,614	0,716	0,767	0,795	0,835	0,839	0,871	0,953	0,967
1,00	0,363	0,428	0,594	0,658	0,751	0,799	0,823	0,859	0,861	0,890	0,963	0,975
1,20	0,398	0,466	0,629	0,692	0,778	0,822	0,843	0,876	0,877	0,903	0,970	0,980
1,60	0,454	0,526	0,681	0,741	0,815	0,854	0,871	0,899	0,899	0,920	0,978	0,986
2,00	0,498	0,571	0,719	0,774	0,840	0,875	0,889	0,914	0,912	0,931	0,984	0,990
3,00	0,574	0,646	0,777	0,825	0,877	0,905	0,914	0,931	0,936	0,947	0,992	0,997
5,00	0,659	0,724	0,833	0,872	0,909	0,931	0,937	0,952	0,948	0,958	0,998	0,999

Tabela XI

Coeficienții μ_v, μ_s pentru cadre sau diafragme cu 3–11 niveluri, cu montanți axial indeformabili ($\gamma = 1$)

$I_{ev} = \mu_v I_m$; $I_{es} = \mu_s I_m$

λ	Coeficienții μ_v pentru $n =$								
	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
0,05	2,40	2,68	3,03	3,44	3,91	4,28	4,84	5,46	6,13
0,10	2,77	3,30	3,95	4,72	5,60	6,18	7,20	8,32	9,54
0,20	3,44	4,42	5,61	7,00	8,60	9,48	11,3	13,4	15,6
0,40	4,60	6,34	8,46	11,0	13,9	15,2	18,6	22,4	26,6
0,60	5,59	8,01	11,0	14,5	18,6	20,5	25,4	30,8	36,9
0,80	6,48	9,52	13,3	17,8	23,1	25,4	31,7	38,8	46,6
1,00	7,28	10,9	15,5	21,0	27,4	30,1	37,8	46,4	55,9
1,20	8,02	12,2	17,5	23,9	31,4	34,6	43,6	53,7	64,9
1,60	9,37	14,7	21,4	29,5	39,4	43,1	54,6	67,5	81,9
2,00	10,6	16,9	24,9	34,7	46,2	51,0	64,9	80,4	97,7
3,00	13,1	21,7	32,7	46,1	61,9	68,6	87,7	109,2	133,1
5,00	17,0	29,2	45,0	64,3	87,1	96,8	124,5	155,7	190,4

λ	Coefieienții μ_s pentru $n =$								
	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00	2,00
0,05	2,41	2,70	3,05	3,47	3,96	4,36	4,94	5,58	6,28
0,10	2,79	3,34	4,01	4,80	5,71	6,37	7,44	8,61	9,89
0,20	3,50	4,51	5,75	7,20	8,88	9,91	11,9	14,0	16,4
0,40	4,73	6,55	8,78	11,4	14,5	16,2	19,8	23,8	28,3
0,60	5,80	8,34	11,5	15,2	19,6	21,9	27,1	32,9	39,4
0,80	6,76	9,98	14,0	18,8	24,4	27,3	34,0	41,6	50,0
1,00	7,63	11,5	16,3	22,2	29,0	32,4	40,6	49,9	60,2
1,20	8,45	12,9	18,6	25,4	33,4	37,3	47,0	57,9	69,9
1,60	9,93	15,6	22,7	31,4	41,7	46,7	59,1	73,0	88,5
2,00	11,3	18,0	26,6	37,0	49,4	55,4	70,3	87,1	105,8
3,00	14,1	23,3	35,1	49,5	66,5	74,8	95,5	118,8	144,7
5,00	18,4	31,6	48,6	69,4	94,1	106,1	136,2	170,1	207,8

3.3. EXEMPLU DE CALCUL. DIAFRAGMĂ SIMETRICĂ, CU UN SINGUR ȘIR DE GOLURI

Pentru diafragma simetrică, cu un singur șir de goluri, a unei clădiri cu 7 niveluri, reprezentată în figura 6, se cere determinarea momentelor de inerție, echivalente, $\bar{I}_{ev}$ și $\bar{I}_{es}$.

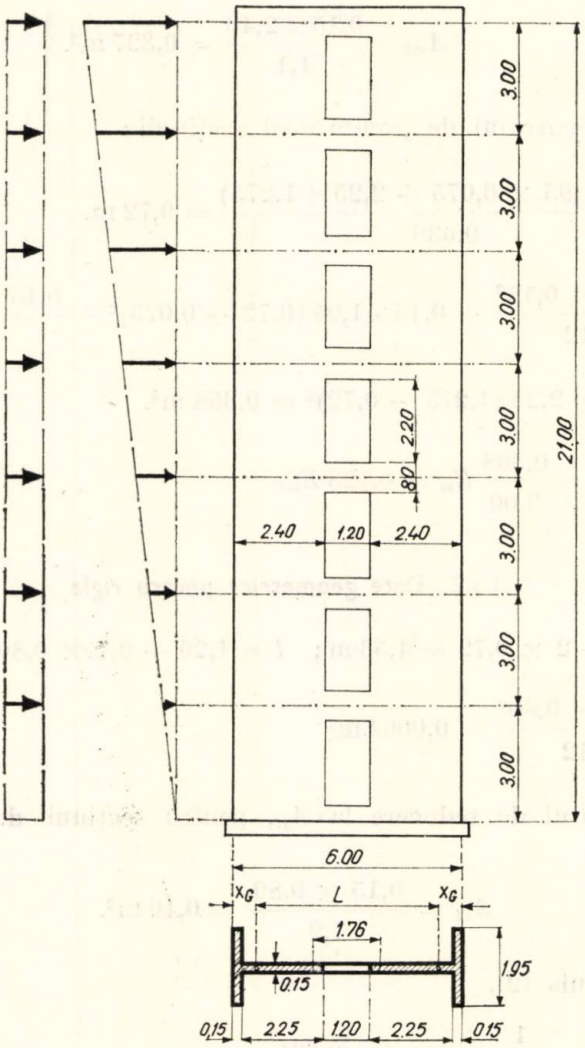


Fig. 6

Planșeele clădirii se execută din dale prefabricate, de a căror conlucrare cu riglele nu se ține seama în calcul. Modulul de elasticitate convențional pentru rigle este $E_r = 0{,}6\ E_m$.

3.3.1. Date geometrice pentru montanţi

$$A_m = 0{,}15\ (1{,}95 + 2{,}25) = 0{,}630\ \text{m}^2.$$

La secţiunea activă, la forţă tăietoară A_{mt} se aplică, conform [21], coeficientul de reducere 1,1, valabil pentru secţiuni în formă de I.

$$A_{mt} = \frac{0{,}15 \times 2{,}40}{1{,}1} = 0{,}327\ \text{m}^2.$$

Poziţia centrului de greutate al secţiunii :

$$x_G = \frac{0{,}15\ (1{,}95 \times 0{,}075 + 2{,}25 \times 1{,}275)}{0{,}630} = 0{,}72\ \text{m}.$$

$$I_m = \frac{1{,}95 \times 0{,}15^3}{12} + 0{,}15 \times 1{,}95\ (0{,}72 - 0{,}075)^2 + \frac{0{,}15 \times 2{,}25^3}{12} +$$

$$+ 0{,}15 \times 2{,}25\ (1{,}275 - 0{,}72)^2 = 0{,}368\ \text{m}^4.$$

$$K_m = \frac{E_m I_m}{h} = \frac{0{,}368}{3{,}00} E_m = 0{,}123\, E_m.$$

3.3.2. Date geometrice pentru rigle

$$L = 6{,}00 - 2 \times 0{,}72 = 4{,}56\ \text{m}; \quad l = 1{,}20 + 0{,}7 \times 0{,}80 = 1{,}76\ \text{m}.$$

$$I_r = \frac{0{,}15 \times 0{,}80^3}{12} = 0{,}0064\ \text{m}^4.$$

Coeficientul de reducere la A_{rt}, pentru secţiuni dreptunghiulare, este 1,2.

$$A_{rt} = \frac{0{,}15 \times 0{,}80}{1{,}2} = 0{,}10\ \text{m}^2.$$

Cu formula (2),

$$\mu_r = \frac{1}{1 + 28{,}2 \dfrac{0{,}0064}{0{,}10 \times 1{,}76^2}} = 0{,}631,$$

$$K_r = \mu_r \frac{6 E_r I_r}{L} \left(\frac{L}{l}\right)^3 = 0{,}631 \frac{6 \times 0{,}6\, E_m \times 0{,}0064}{4{,}56} \left(\frac{4{,}56}{1{,}76}\right)^3 = 0{,}0554\, E_m.$$

3.3.3. Momentele de inerție echivalente

$$\gamma = 1 + \frac{4I_m}{A_m L^2} = 1 + \frac{4 \times 0{,}368}{0{,}630 \times 4{,}56^2} = 1{,}11.$$

$$\lambda = \frac{K_r}{K_m} = \frac{0{,}0554}{0{,}123} = 0{,}45.$$

Din tabela VI, pentru $\lambda = 0{,}45$ și $\gamma = 1{,}11$, se găsește : $\mu_v = 0{,}467$ și $\mu_s = 0{,}479$. Din tabela I, pentru $n = 7$, se găsește : $\nu_v = 10{,}71$ și $\nu_s = 9{,}72$.

$$I_0 = 2I_m + 2A_m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 2 \times 0{,}368 + 2 \times 0{,}630\left(\frac{4{,}56}{2}\right)^2 = 7{,}286\,\text{m}^2.$$

Cu formulele (15),

$$\bar{I}_{ev} = \frac{0{,}467 \times 7{,}286}{1 + 10{,}71\dfrac{0{,}467 \times 7{,}286}{2 \times 0{,}327 \times 21^2}} = 2{,}69\,\text{m}^4,$$

$$\bar{I}_{es} = \frac{0{,}479 \times 7{,}286}{1 + 9{,}72\dfrac{0{,}479 \times 7{,}286}{2 \times 0{,}327 \times 21^2}} = 3{,}13\,\text{m}^4.$$

4. CONSIDERAȚII PRIVIND INFLUENȚA DIFERITELOR TIPURI DE DEFORMAȚII ASUPRA RIGIDITĂȚILOR DIAFRAGMELOR CU GOLURI

În comparație cu cadrele etajate obișnuite, formate din grinzi și stîlpi, aspectul specific care apare în cazul diafragmelor cu goluri, datorită caracterului masiv al montanților, îl constituie influența mai importantă pe care o capătă deformațiile produse de forțele tăietoare și de eforturile axiale din montanți, care la cadrele obișnuite este de regulă neglijabilă.

În figurile 7—10 s-a reprezentat variația săgeții la vîrf sub acțiunea unei încărcări orizontale uniform distribuite pe verticală (vînt), pentru cîteva tipuri de diafragme cu goluri, în funcție de raportul de rigidități λ și anume :

— o diafragmă cu 3 niveluri, cu $\gamma = 1{,}05$ (fig. 7) și cu $\gamma = 1{,}20$ (fig. 8) ;

— o diafragmă cu 11 niveluri, cu $\gamma = 1{,}05$ (fig. 9) și cu $\gamma = 1{,}20$ (fig. 10).

Săgeata totală la vîrf f s-a reprezentat defalcată în :
— săgeata produsă de momentele încovoietoare (f_M),
— săgeata produsă de eforturile axiale (f_N),
— săgeata produsă de forţele tăietoare (f_T).

După cum se vede din figurile 7 şi 8, în cazul diafragmelor cu 3 niveluri, la care lăţimile montanţilor sînt mari în raport cu înălţimea totală, săgeţile produse de forţele tăietoare sînt predominante, ajungînd să reprezintă 70—80% din săgeţile totale. La diafragmele cu 11 niveluri

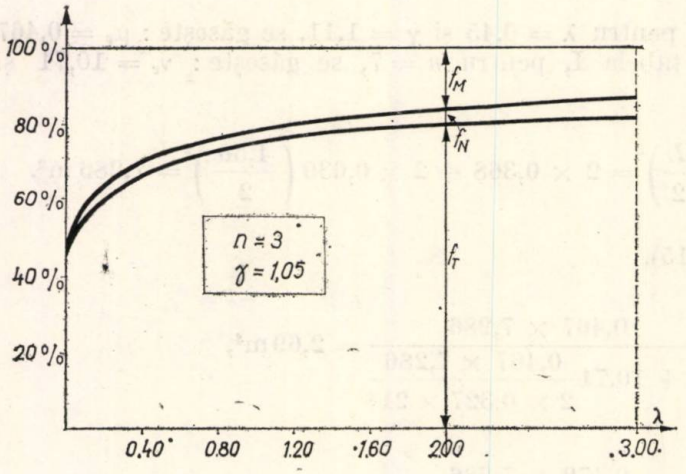


Fig. 7

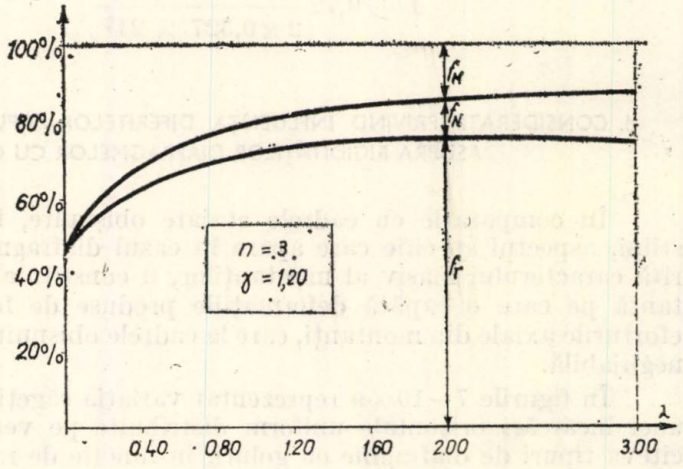
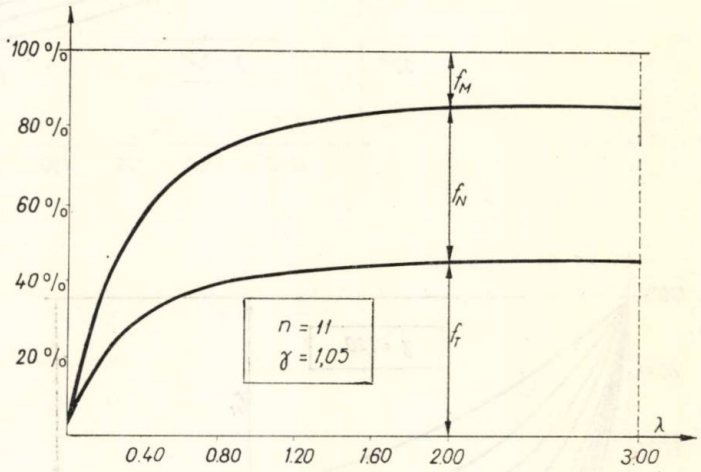


Fig. 8

(fig. 9 şi 10), efectul deformaţiilor produse de forţele tăietoare se reduce, rămînînd în limitele a 20—40% din săgeţile totale. În schimb, influenţa deformaţiilor axiale ale montanţilor, care este foarte mică la diafragmele cu 3 niveluri, devine importantă şi chiar predominantă la cele cu 11 ni-

veluri, fiind cu atît mai mare cu cît coeficientul γ are valori mai mari și cu cît riglele sînt mai rigide în raport cu montanții (cu cît λ este mai mare). În cazul extrem din figura 10 ($n = 11$, $\gamma = 1{,}20$), f_N ajunge să reprezinte circa 70% din săgeata totală. Deci, în asemenea cazuri, săgețile calculate neglijînd influența deformabilității axiale a montanților, ca la cadrele obișnuite, sînt cu totul nesemnificative, fiind cu mult mai mici decît cele reale.

Fig. 9



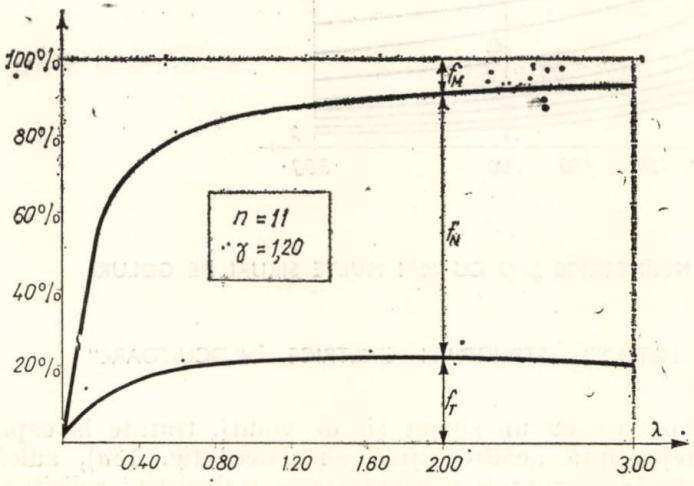


Fig. 10

În figurile 11 și 12 s-a arătat, într-un alt mod de reprezentare, numai influența relativă a termenilor f_M și f_N, în % față de suma $f_M + f_N$, pentru $n = 3 \ldots 11$ niveluri și $\gamma = 1{,}05$ și 1,20. Și din aceste reprezentări, se vede cum influența termenului f_N crește cu γ, n și λ.

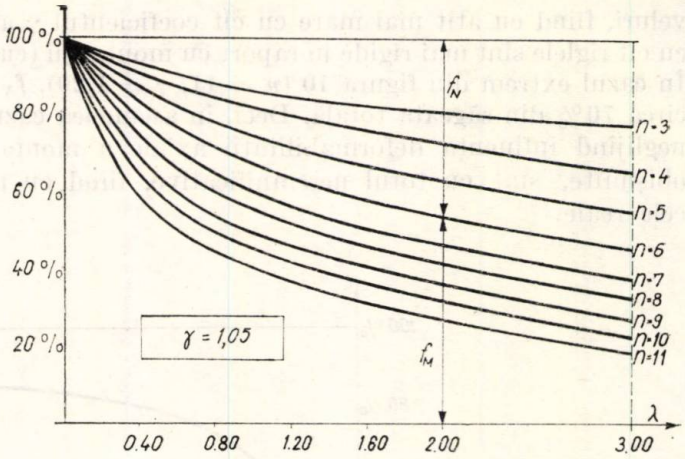


Fig. 11

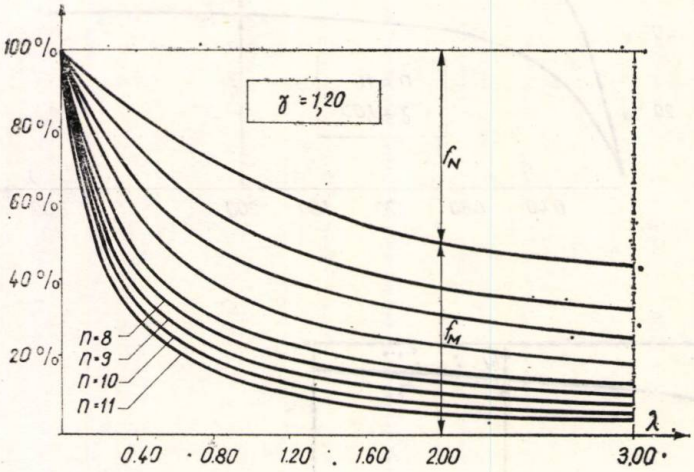


Fig. 12

5. DIAFRAGME NESIMETRICE SAU CU MAI MULTE ȘIRURI DE GOLURI

5.1. APLICAREA METODEI „STRUCTURII SIMETRICE ÎNLOCUITOARE"

Diafragmele simetrice cu un singur șir de goluri, tratate la capitolele precedente, reprezintă „cadre-scară" simetrice (fig. 13*a*), adică structuri care la încărcări orizontale concentrate la noduri sînt solicitate antisimetric, rotirile celor două noduri de la nivelul aceleiași rigle rezultînd egale. După cum este știut, în acest caz particular rotirile de noduri se pot reduce la „distorsiuni pure" [3], astfel încît calculul prin metoda distorsiunilor capătă o formă foarte simplă. Pe baza unui asemenea calcul sînt întocmite tabelele de la capitolul 3.

Același procedeu de calcul și utilizarea acelorași tabele pot fi extinse la cazul mai general al diafragmelor nesimetrice sau cu mai multe șiruri de goluri, dacă se introduce aproximația cunoscută de a se admite că la nivelul fiecărei rigle rotirile tuturor nodurilor sînt egale (fig. 13*b*). Aceasta

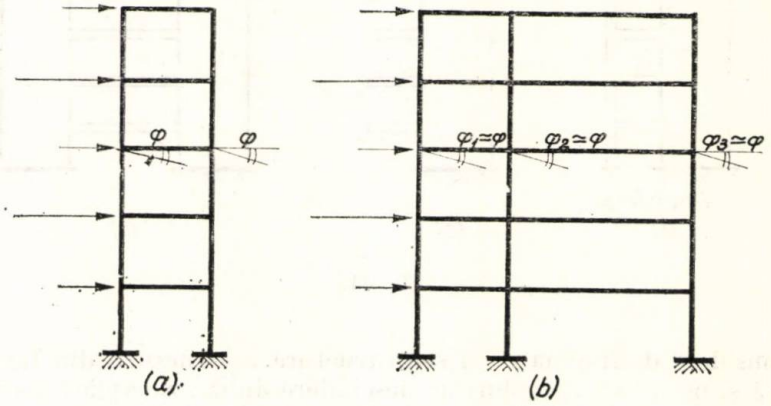


Fig. 13

permite ca în locul structurii reale să se considere în calcul o „structură simetrică înlocuitoare", cu o singură deschidere. La cadrele etajate obișnuite, procedeul este curent utilizat, iar o prezentare detaliată, însoțită de un exemplu numeric, este cuprinsă în [3], § 23.4.2.

Este de remarcat că și în procedeele de tip „structură continuă echivalentă", folosite în calculul diafragmelor cu goluri, cum sînt cele date de *Albigès* și *Goulet* [5], [11], [32], *Beck* [8], [9] și *Rosman* [34], [35] se aplică în cazul diafragmelor nesimetrice sau cu mai multe șiruri de goluri aceeași aproximație. Nu totdeauna aceasta rezultă în mod explicit din prezentarea metodelor respective de către autorii lor, dar este ușor de identificat din structura formulelor de calcul.

Metoda structurii simetrice înlocuitoare dă în unele cazuri erori locale mai mari la calculul momentelor în montanți și în rigle (neînchideri ale momentelor în jurul nodurilor), însă la valoarea momentului de inerție echivalent al diafragmei în ansamblu, erorile sînt mult mai mici [23], [24].

Mai dificil este de înscris în această metodă aproximativă modul de luare în considerare a deformabilității axiale a montanților. La diafragmele lungi, cu mai multe șiruri de goluri, cum sînt cele longitudinale ale clădirilor de tip „bară", ele pot fi neglijate. La cele scurte (transversale), se poate admite să se țină seama în calcul numai de deformabilitatea axială a montanților extremi (primul și ultimul), avînd în vedere că cei intermediari sînt situați în apropierea axei neutre a ansamblului diafragmei și ca atare deformațiile lor axiale sînt de importanță redusă.

În cazul special al diafragmelor cu un singur șir de goluri în poziție pronunțat disimetrică (fig. 14*a*), la care unul din cei doi montanți ajunge să aibă o rigiditate neglijabilă în raport cu cel de-al doilea, se recomandă ca riglele să se considere articulate la capătul respectiv (fig. 14*b*), adică

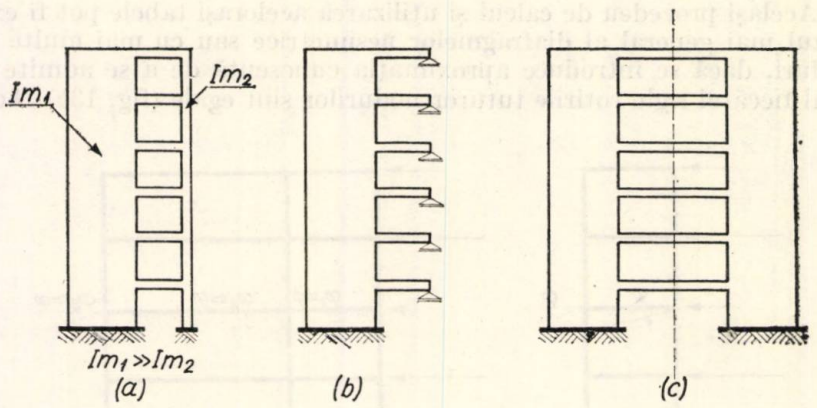


Fig. 14

să se considere diafragma ca o semistructură a structurii din figura 14*c* simetrică şi cu un şir de goluri de deschidere dublă. Se aplică deci pentru calculul momentului de inerţie echivalent relaţiile de la capitolul 3, luînd pentru diafragma reală jumătate din valoarea momentului de inerţie echivalent astfel calculat.

5.2. NOTAŢII SUPLIMENTARE

Notaţiile date la § 2.1 şi în figura 4 necesită, în cazul diafragmelor nesimetrice sau cu mai multe şiruri de goluri, următoarele transformări şi completări (fig. 15) :

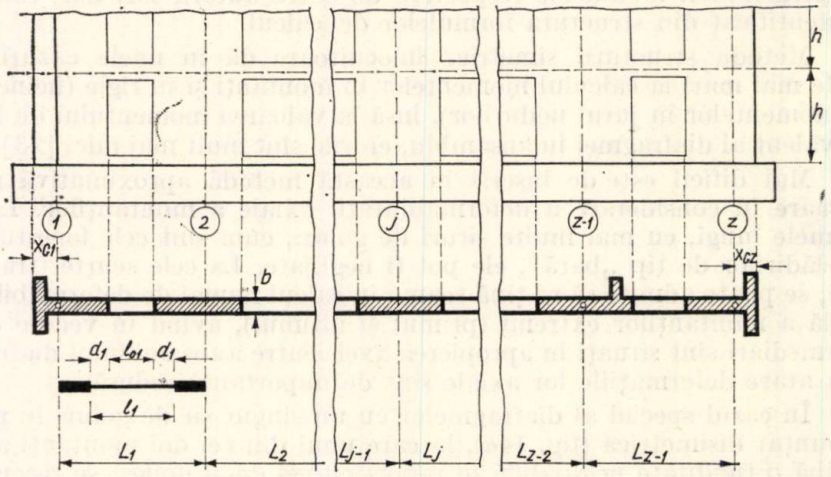


Fig. 15

z = numărul de montanți ai diafragmei;

j = $1 \ldots z$ = indicele montantului curent;

A_{mj} = aria secțiunii montantului (j);

A_{mtj} = aria secțiunii montantului (j) la acțiunea forțelor tăietoare;

I_{mj} = momentul de inerție al secțiunii montantului (j);

$K_{mj} = \frac{E_m I_{mj}}{h}$ = rigiditatea la distorsiune a montantului (j);

L_j, l_j = deschiderile teoretice ale riglei (j) [riglei între montantul (j) și montantul ($j+1$)];

$L = \sum_{1}^{z-1} L_j$ = suma deschiderilor teoretice ale riglelor (distanța între axele primului și ultimului montant);

I_{rj} = momentul de inerție al riglei (j);

A_{rtj} = aria secțiunii riglei (j) la acțiunea forțelor tăietoare;

K_{rj} = rigiditatea la distorsiune a riglei (j), care se calculează cu relația (1), introducînd notațiile de mai sus;

$I_{med} = \frac{\sum_{1}^{z} I_{mj}}{2}$ = semisuma momentelor de inerție ale montanților la un nivel;

$\lambda = \frac{2\sum_{1}^{z-1} K_{rj}}{\sum_{1}^{z} K_{mj}}$ = raportul între suma rigidităților K_{rj} ale celor $(z-1)$ rigle și suma rigidităților K_{mj} ale celor z montanți (la numărător apare și coeficientul 2 deoarece fiecare riglă intervine cu ambele capete);

$$\gamma = 1 + \frac{2I_{med}}{L^2}\left(\frac{1}{A_{m1}} + \frac{1}{A_{mz}}\right) \tag{16}$$

(considerînd numai deformabilitatea axială a montanților extremi 1 și z, așa cum s-a arătat mai înainte).

$$I_0 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} I_{med}. \tag{17}$$

În cazul particular al diafragmelor nesimetrice, cu un singur șir de goluri, deci cu doi montanți inegali ($z = 2$), formulele de mai sus capătă forma simplificată:

$$\gamma = 1 + \frac{I_{m1} + I_{m2}}{L^2}\left(\frac{1}{A_{m1}} + \frac{1}{A_{m2}}\right), \tag{18}$$

$$I_0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1}(I_{m1} + I_{m2}), \tag{19}$$

$$\lambda = \frac{2K_r}{K_{m1} + K_{m2}}. \tag{20}$$

5.3. UTILIZAREA TABELELOR

Cu λ, γ şi I_0 determinate conform § 5.2, momentul de inerţie echivalent al diafragmei se calculează la fel ca pentru o diafragmă simetrică cu un singur şir de goluri, cu formula (15) şi cu coeficienţii din tabelele de la § 3.2.

5.4. EXEMPLU DE CALCUL. 2 – DIAFRAGMA CU MAI MULTE ŞIRURI DE GOLURI

Se cere determinarea momentelor de inerţie echivalente $\bar{I}_{ev}$ şi $\bar{I}_{es}$ pentru diafragma cu două şiruri de goluri din figura 16, a unei clădiri cu 6 niveluri.

Planşeele se execută din dale prefabricate, de a căror conlucrare cu riglele nu se ţine seama în calcul. Modulul de elasticitate convenţional pentru rigle este $E_r = 0{,}6\ E_m$.

5.4.1. Date geometrice pentru montanţi

$$A_{m1} = 0{,}15\,(2{,}50 + 1{,}95) = 0{,}67\ \text{m}^2; \quad A_{mt1} = \frac{0{,}15 \times 2{,}65}{1{,}1} = 0{,}36\ \text{m}^2,$$

$$x_{G1} = \frac{0{,}15\,(1{,}95 \times 0{,}075 + 2{,}50 \times 1{,}40)}{0{,}67} = 0{,}82\ \text{m},$$

$$I_{m1} = \frac{1{,}95 \times 0{,}15^3}{12} + 1{,}95 \times 0{,}15\,(0{,}82 - 0{,}075)^2 +$$

$$+ \frac{0{,}15}{3}(0{,}67^3 + 1{,}83^3) = 0{,}485\ \text{m}^4.$$

$$A_{m2} = 0{,}15 \times 3{,}00 = 0{,}45\ \text{m}^2; \quad A_{mt2} = \frac{0{,}45}{1{,}2} = 0{,}38\ \text{m}^2,$$

$$I_{m2} = \frac{0{,}15 \times 3{,}00^3}{12} = 0{,}338\ \text{m}^4,$$

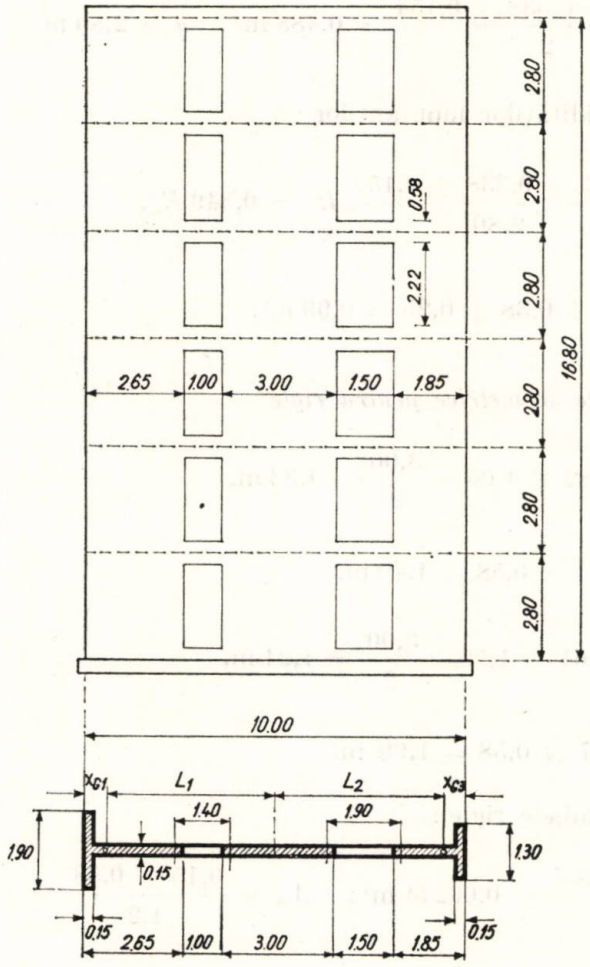


Fig. 16

$$A_{m3} = 0{,}15\,(1{,}70 + 1{,}30) = 0{,}45\ \text{m}^2; \quad A_{mt3} = \frac{0{,}15 \times 1{,}85}{1{,}1} = 0{,}25\ \text{m}^2,$$

$$x_{G3} = \frac{0{,}15\,(1{,}30 \times 0{,}075 + 1{,}70 \times 1{,}00)}{0{,}45} = 0{,}61\ \text{m},$$

$$I_{m3} = \frac{1{,}30 \times 0{,}15^3}{12} + 1{,}30 \times 0{,}15\,(0{,}61 - 0{,}075)^2 +$$

$$+ \frac{0{,}15}{3}\,(0{,}46^3 + 1{,}24^3) = 0{,}154\ \text{m}^4.$$

$$I_{med} = \frac{0{,}485 + 0{,}338 + 0{,}154}{2} = 0{,}488\ \text{m}^4; \quad h = 2{,}80\ \text{m}.$$

Suma rigidităţilor montanţilor :

$$\sum_1^z K_{mj} = \frac{0{,}485 + 0{,}338 + 0{,}154}{2{,}80} E_m = 0{,}349\, E_m,$$

$$\sum_1^z A_{mtj} = 0{,}36 + 0{,}38 + 0{,}25 = 0{,}99\ \text{m}^2.$$

5.4.2. *Date geometrice pentru rigle*

$$L_1 = 2{,}65 - 0{,}82 + 1{,}00 + \frac{3{,}00}{2} = 4{,}33\ \text{m},$$

$$l_1 = 1{,}00 + 0{,}7 \times 0{,}58 = 1{,}40\ \text{m},$$

$$L_2 = 1{,}85 - 0{,}61 + 1{,}50 + \frac{3{,}00}{2} = 4{,}24\ \text{m},$$

$$l_2 = 1{,}50 + 0{,}7 \times 0{,}58 = 1{,}90\ \text{m},$$

Pentru ambele rigle :

$$I_r = \frac{0{,}15 \times 0{,}58^3}{12} = 0{,}00244\ \text{m}^4; \quad A_{rt} = \frac{0{,}15 \times 0{,}58}{1{,}2} = 0{,}0725\ \text{m}^2,$$

$$\mu_{r1} = \frac{1}{1 + 28{,}2 \dfrac{0{,}00244}{0{,}0725 \times 1{,}40^2}} = 0{,}675,$$

$$\mu_{r2} = \frac{1}{1 + 28{,}2 \dfrac{0{,}00244}{0{,}0725 \times 1{,}90^2}} = 0{,}792,$$

$$K_{r1} = \frac{6 I_{r1} E_r}{L_{12}} \left(\frac{L_{12}}{l_{12}}\right)^2 \mu_{r1} = \frac{6 \times 0{,}00244\, E_r}{4{,}33} \left(\frac{4{,}33}{1{,}40}\right)^3 \times 0{,}675 = 0{,}0674\, E_r,$$

$$K_{r2} = \frac{6 \times 0{,}00244\, E_r}{4{,}24} \left(\frac{4{,}24}{1{,}90}\right)^3 \times 0{,}792 = 0{,}0303\, E_r.$$

Suma rigidităților riglelor :

$$\sum_{1}^{s-1} K_{rj} = K_{r1} + K_{r2} = (0{,}0674 + 0{,}0303)\, E_r = 0{,}0977 \times 0{,}6\, E_m = 0{,}0586\, E_m.$$

$$L = L_1 + L_2 = 4{,}33 + 4{,}24 = 8{,}57 \text{ m}.$$

5.4.3. Momente de inerție echivalente

$$\lambda = \frac{2\Sigma K_{rj}}{\Sigma K_{mj}} = \frac{2 \times 0{,}0586}{0{,}349} = 0{,}337,$$

$$\gamma = 1 + \frac{2 \times 0{,}488}{(8{,}57)^2}\left(\frac{1}{0{,}67} + \frac{1}{0{,}45}\right) = 1{,}05,$$

$$I_0 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1} I_{\text{med}} = \frac{2 \times 1{,}05}{1{,}05 - 1} 0{,}488 = 20{,}5 \text{ m}^4.$$

Din tabela V, pentru $\lambda = 0{,}337$ și $\gamma = 1{,}05$, se găsește : $\mu_v = 0{,}200$ și $\mu_s = 0{,}206$. Din tabela I, pentru $n = 6$ niveluri se găsește : $\nu_v = 10{,}98$ și $\nu_s = 9{,}96$.

$$\bar{I}_{ev} = \frac{\mu_v I_0}{1 + \nu_v \dfrac{\mu_v I_0}{(\Sigma A_{mtj}) H^2}} = \frac{0{,}200 \times 20{,}5}{1 + 10{,}98 \dfrac{0{,}200 \times 20{,}5}{0{,}99 \times 16{,}80^2}} = 3{,}53 \text{ m}^4,$$

$$\bar{I}_{es} = \frac{0{,}206 \times 20{,}5}{1 + 9{,}96 \dfrac{0{,}206 \times 20{,}5}{0{,}99 \times 16{,}80^2}} = 3{,}68 \text{ m}^2.$$

Primită la redacție la 23 mai 1974

INFLUENȚA FORȚEI AXIALE ASUPRA DEPLASĂRILOR GRINZII DE FUNDARE PE MEDIU ELASTIC

de VIOREL POP, AUGUSTIN POPA, VLADIMIR FOSTI

Institutul politehnic Cluj–Napoca

Prezenta lucrare se ocupă cu studiul influenței forței axiale asupra deplasărilor grinzii de fundare pe mediu elastic. Soluțiile și rezultatele numerice sînt date pentru grinzile de fundare libere, articulate și încastrate la capete. Pentru rezolvarea ecuației diferențiale se folosește o metodă numerică, metoda diferențelor finite.

1. Teoria grinzilor de fundare pe mediu elastic incluzînd și influența forței axiale, a fost tratată de M. Hetényi [1], care rezolvă ecuația diferențială exprimînd soluții în funcții hiperbolice. Alte rezolvări ale problemei grinzilor pe mediu elastic au fost date în lucrările [2], [3].

Prezenta lucrare își propune să trateze o rezolvare mai simplă a ecuației diferențiale de ordinul patru, care exprimă axa deformată a grinzii pe mediu elastic solicitată la încovoiere și forță axială. Rezolvarea problemei s-a făcut prin aplicarea metodei diferențelor finite [4], [5], admițînd ipoteza lui Winkler și a contactului permanent dintre elementul solicitat și teren.

2. Se consideră o grindă de fundare rezemată pe mediu elastic (fig. 1). Asupra acesteia acționează forțe concentrate P, presiuni distribuite q, momente încovoietoare concentrate M și forțe axiale N.

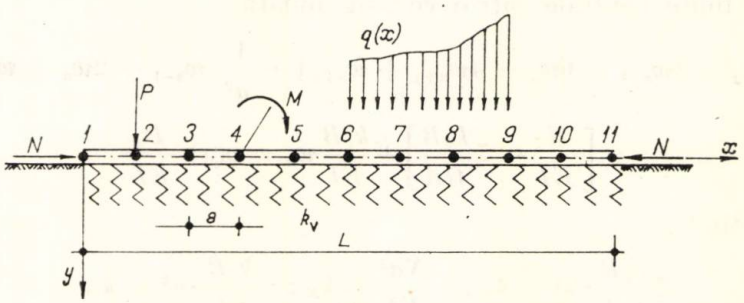


Fig. 1

Plecînd de la ecuația diferențială a axei deformate a grinzii de fundare pe mediu elastic solicitată la încovoiere,

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} + \frac{k_v B}{EI} w = \frac{q(x)}{EI}, \tag{1}$$

luînd în considerare influenţa forţei tăietoare şi a forţei axiale, se obţine următoarea ecuaţie diferenţială de ordinul patru :

$$\frac{d^4w}{dx^4} + \frac{d^2w}{dx^2}\left[\frac{N}{EI} - \zeta\frac{k_v B}{GA}\right] + \frac{k_v B}{EI}w = q(x)\frac{B}{EI}, \tag{2}$$

în care

k_v reprezintă coeficientul de rigiditate (coeficient de pat), $F \cdot L^{-3}$,

$$\zeta = \frac{A}{I^2}\iint_{(A)}\frac{S_z^2(y)}{b^2(y)}\,dy\,dz, \tag{3}$$

coeficient ce depinde de forma secţiunii transversale a grinzii şi a cărui expresie poate fi luată [5], în cazul secţiunilor dreptunghiulare,

$$\zeta = 23 \cdot k_i \cdot \left(\frac{h}{L}\right)^2 = 23 \cdot k_i \cdot \beta^2, \tag{4}$$

EI — rigiditatea grinzii la încovoiere ;
GA — rigiditatea grinzii la forţă tăietoare ;
$q(x)$ — intensitatea încărcărilor exterioare în secţiunea x ;
B — lăţimea fundaţiei ;
h — înălţimea grinzii de fundare ;
L — lungimea totală a grinzii ;
w — deplasarea pe verticală a grinzii.

Considerînd grinda de fundare împărţită în 10 segmente de lungime $a = \frac{L}{10}$, ecuaţia diferenţială (2) poate fi transformată cu ajutorul diferenţelor finite centrale într-o ecuaţie liniară.

$$\frac{1}{a^4}[w_{n-2} - 4w_{n-1} + 6w_n - 4w_{n+1} + w_{n+2}] + \frac{1}{a^2}[w_{n-1} - 2w_n + w_{n+1}] \times$$

$$\times\left[\frac{N}{EI} - \zeta\frac{k_v B}{GA}\right] + \frac{k_v B}{EI}w_n = q(x)\frac{B}{EI}. \tag{5}$$

Notînd

$$\zeta\frac{k_v B}{GA}\cdot a^2 = k_T\,; \quad \frac{Na^2}{EI} = k_N\,; \quad \frac{k_v B}{EI}\cdot a^4 = k_i, \tag{6}$$

şi ordonînd termenii din ecuaţia (5), obţinem ecuaţia

$$w_{n-2} + (-4 - k_T + k_N)\,w_{n-1} + [6 + 2k_T - 2k_N + k_i]\,w_n + (-4 - $$

$$- k_T + k_N)\,w_{n+1} + w_{n+2} = q(x)\cdot\frac{B\,a^4}{EI}. \tag{7}$$

Pentru $k_T = 0$ se ia în considerare numai influența forței axiale, iar pentru $k_N = 0$ se ia în considerare numai influența forței tăietoare.

Ecuația liniară (7) poate fi scrisă pentru fiecare punct considerat, obținînd un sistem de ecuații liniare cu atîtea necunoscute cîte puncte am considerat pe grindă.

Pentru scrierea ecuației (7) în punctele marginale este necesară introducerea a două segmente fictive pentru grinda liberă la capete și cîte un segment la grinzile articulate sau încastrate la capete (fig. 2). Determinarea deplasărilor introduse se face prin condițiile de rezemare (tabela 1).

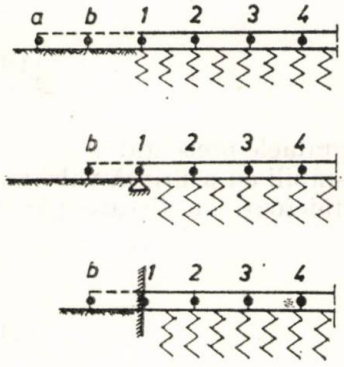


Fig. 2

CONDIȚII DE REZEMARE ȘI DEPLASĂRI LA MARGINILE GRINZII.

Reazem	Condiții de rezemare	Deplasări marginale
Articulat	$W=0$ $W''=0$	$W_1=0$ $W_b=-W_2$
Încastrat	$W=0$ $W'=0$	$W_1=0$ $W_b=W_2$
Liber	$W''=0$ $W'''=0$	$W_b=2W_1-W_2$ $W_a=4W_1-4W_2+W_3$

Tabela 1

Introducînd deplasările punctelor fictive, în primele și ultimele ecuații de forma (7), obținem un sistem de ecuații liniare de forma

$$A \cdot W = C, \tag{8}$$

avînd toate ecuațiile egale cu 0 cu excepția ecuației i pentru care termenul liber poate fi pus sub forma

$$\frac{q(x) \cdot a^4 \cdot B}{EI} = \frac{P_i \cdot B \cdot a^3}{EI}; \tag{9}$$

Matricea coeficienților necunoscutelor pentru grinda liberă va fi de forma

În mod similar pot fi scrie matricele pentru grinzile articulate şi încastrate.

Pentru o valoare unitară a termenului liber, $\frac{1}{B} = \frac{P_i \cdot a^3}{EI}$, soluţiile sistemului de ecuaţii liniare, reprezintă tocmai coeficienţii liniei de influenţă pentru săgeţi (fig. 4).

Rezolvarea sistemului de ecuaţii liniare s-a făcut cu ajutorul calculatorului *FELIX C — 256* (*IRIS* 50), folosind un program *FORTRAN* IV.

Valoarea deplasărilor grinzii, pentru o forţă oarecare P, se determină cu formula

$$w_i = \alpha_i \frac{Pa^3}{EI}, \tag{10}$$

valorile coeficientului α_i putîndu-se lua din diagramele prezentate.

Cunoscînd valorile deplasărilor, se poate stabili cu uşurinţă valoarea reacţiunii, momentului încovoietor şi forţei tăietoare în fiecare punct

$$p_i = k_v \cdot w_i,$$

$$M_i = P\,(2w_i - w_{i-1} - w_{i+1}), \tag{11}$$

$$Q_i = \frac{1}{2} P\,(w_{i-2} - 2w_{i-1} + 2w_{i+1} - w_{i+2}).$$

CONCLUZII

1. Se poate determina o sarcină axială critică care limitează domeniul de stabilitate al grinzilor acţionate axial (fig. 3), în funcţie de rigiditatea şi de modul de fixare a grinzilor la capăt. Aceste valori sînt determinate în tabela 2.

Tabela 2

k_i	$k_{N\,cr}$		
	grinda liberă	grinda artic.	grinda încastr.
0 — 0,01	0,1	0,05	0,1
0,01 — 0,1	0,5	0,1	0,5
0,1 — 1,0	0,5	0,5	1,0

Sarcina axială critică poate fi determinată cu relaţia

$$N_{cr} = k_{N\,cr} \cdot \frac{EI}{a^2}. \tag{12}$$

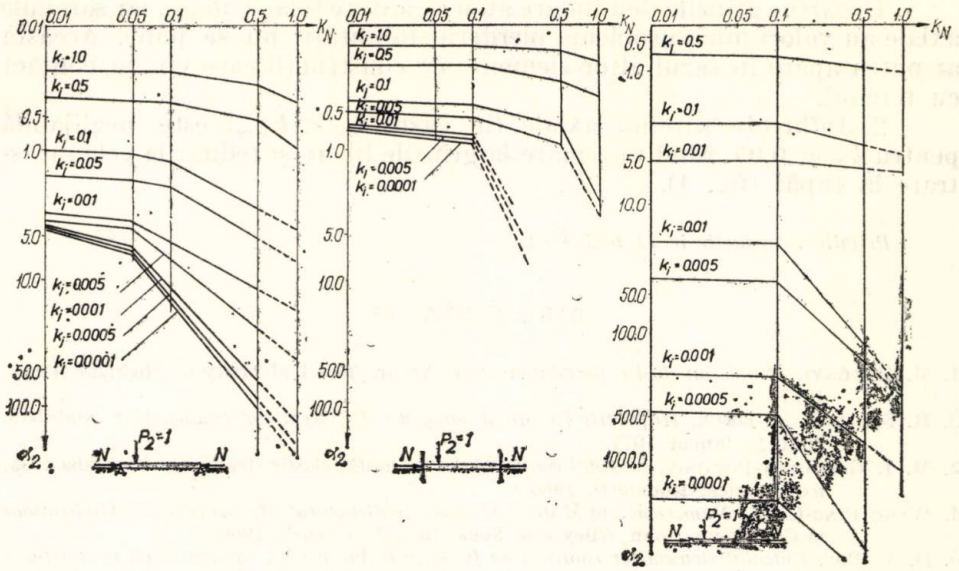

0.01
0.05
0.1
0.5
1.0
K_N
k_1=1.0
k_1=0.5
k_1=0.1
k_1=0.05
k_1=0.01
k_1=0.005
k_1=0.001
k_1=0.0005
k_1=0.0001
0.5
1.0
5.0
10.0
50.0
100.0
500.0
1000.0
σ'_2
N
P_2=1
N

Fig. 3

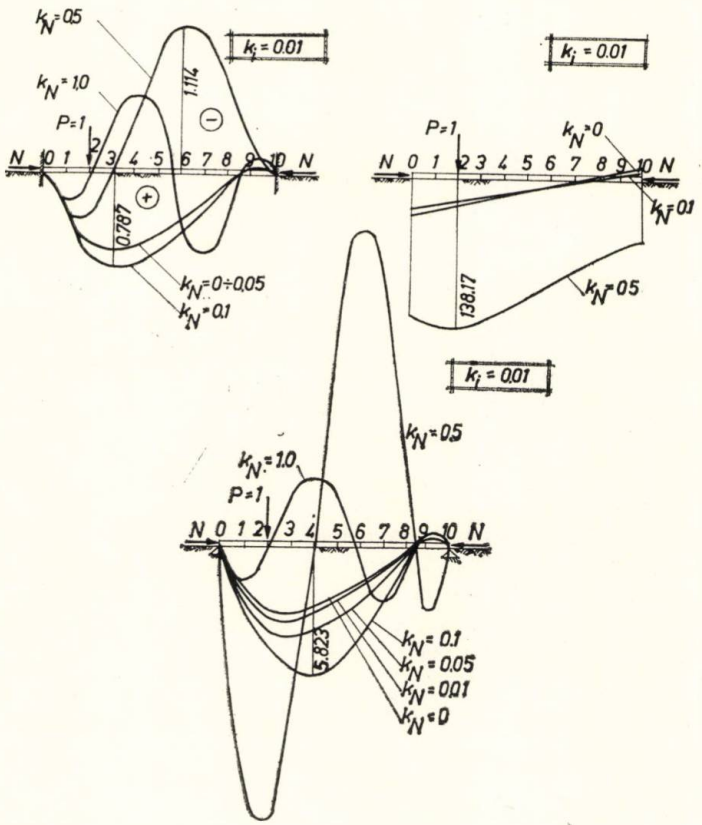

k_N=0.5
k_N=1.0
P=1
k_1 = 0.01
1.114
0.787
k_N=0÷0.05
k_N=0.1
N 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 N
k_1 = 0.01
P=1
k_N=0
k_N=0.1
k_N=0.5
138.17
k_1 = 0.01
k_N=0.5
k_N=1.0
P=1
N 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 N
5.823
k_N= 0.1
k_N= 0.05
k_N= 0.01
k_N= 0

Fig. 4

Deoarece grinzile de fundare au o rigiditate relativ mare, iar sarcinile axiale au valori mici, problema pierderii stabilităţii nu se pune. Aceasta ar putea apare în cazul altor elemente de construcţii care vin în contact cu terenul.

2. Influenţa sarcinii axiale (în cazul $k_N < k_{N\,cr}$) este neglijabilă pentru $k_N < 0{,}05$, fiind mai mare la grinzile libere şi redusă la cele încastrate la capăt (fig. 4).

Primită la redacţie la 11 mai 1974

BIBLIOGRAFIE

1. M. Hetényi, *Beams on elastic foundation*, Ann Arbor, The University of Michigan Press, 1967.
2. R. Schardt, H. Okur, *Hilfswerte für die Lösung der Differentialgleichung*, Der Stahlbau, Heft *1*, Januar 1971.
3. M. I. Gorbunov-Posadov, *Calculul construcţiilor pe mediu elastic* (traducere din limba rusă) Ed. tehnică, Bucureşti, 1960.
4. Wang Ping-Chan, *Numerical and Matrix Methods in Structural Mechanics with Applications to Computers*, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.
5. D. V. Pop, *Calculul elementelor continui de fundare la încovoiere, încovoiere cu considerarea efectului forţei tăietoare şi la torsiune în modelul Winkler*, Teză de doctorat, Institutul politehnic Cluj, 1971.

DETERMINAREA MOMENTULUI OPTIM DE ÎNȘURUBARE A RACORDURILOR SPECIALE

de VLAD ULMANU, DUMITRU RAȘEEV

Institutul de petrol și gaze Ploiești

În lucrare se analizează solicitările la tracțiune și încovoiere ale îmbinării filetate conice prestrînse, stabilindu-se limitele de solicitare ale îmbinării filetate. Acestea corespund următoarelor situații : atingerea limitei de curgere în cep, deschiderea umerilor îmbinării și ruperea la oboseală.

Pe această bază se calculează o valoare maximă și una minimă pentru momentul de înșurubare, recomandînd apoi un criteriu de calcul a valorilor optime ale momentului de înșurubare.

Calculele sînt finalizate în tabele și diagrame pentru determinarea combinațiilor de solicitări pentru care se atinge starea limită și în nomograme de calcul a valorilor recomandate pentru momentul de înșurubare.

În urma înșurubării cu forță de prestrîngere, în îmbinarea conică a filetului special al racordului se dezvoltă o stare spațială de eforturi conducînd la întinderea cepului și comprimarea mufei, respectiv a umerilor îmbinării cu valoarea forței de prestrîngere P_0.

În cursul forajului, îmbinarea înșurubată cu forța de prestrîngere este solicitată la tracțiune datorită greutății proprii a coloanei de prăjini de foraj, la încovoiere după un ciclu alternant simetric în special datorită devierilor găurii de sondă cît și la torsiune. Deoarece solicitarea la torsiune a racordurilor speciale este inferioară momentului de înșurubare a acestora, ea nu conduce la modificarea stării de eforturi. În consecință, ne vom referi numai la solicitările de înșurubare, tracțiune și încovoiere.

1. ÎNȘURUBAREA ÎMBINĂRII CU FORȚĂ DE PRESTRÎNGERE

Îmbinarea cepului cu mufa se realizează prin înșurubare cu un moment care să producă în cep și mufă o forță de prestrîngere P_0. Expresia momentului de înșurubare M_{ts}, prin analogie cu filetele cilindrice, este [1] :

$$M_{ts} = P_0 \left[\frac{d_m}{2} \operatorname{tg}(\alpha_m + \varphi') + \frac{1}{3} \mu \cdot d_r \right] = P_0 \cdot c, \qquad (1)$$

unde

d_m reprezintă diametrul mediu al filetului, calculat ca medie aritmetică a diametrelor medii maxim și minim ale filetului conic;

α_m — unghiul mediu al elicei filetului;

$d_r = \frac{d_1^3 + d_4^3}{d_1^2 - d_4^2}$ — diametrul raportat al umerilor (d_1, d_4 conform STAS 325—67).

Valoarea utilizată în mod curent pentru coeficientul de frecare [1], [4], [5], [10], [15], [16] este 0,08, adoptată și în prezenta lucrare. Ca urmare s-au calculat valorile parantezei mari, notată c în relația 1, prezentate în tabela 1.

Tabela 1

Tipul racordului special	Valoarea parantezei c,mm	Tipul racordului special	Valoarea parantezei c,mm
$2\frac{3''}{8}$ N	6,291		
$2\frac{7''}{8}$ N	7,159		
$3\frac{1''}{2}$ N	8,229	$3\frac{1''}{2}$ L	8,822
		4'' L	10,434
$4\frac{1''}{2}$ N	10,719	$4\frac{1''}{2}$ L	11,047
$5\frac{1''}{2}$ N	13,064	$5\frac{1''}{2}$ L	13,875
$6\frac{5''}{8}$ N	14,599	$6\frac{5''}{8}$ L	16,021

2. SOLICITAREA LA TRACȚIUNE

Forța de tracțiune exercitată asupra racordului special este preluată de cep și mufă într-o proporție relativă determinată de caracteristicile lor elastice.

Solicitarea îmbinării filetate prestrînse se poate analiza folosind diagrama forță-deformație [1], denumită și triunghiul filetului (fig. 1).

Conform [1], forța adițională P_a are expresia

$$P_a = \frac{c_c}{c_c + c_m} P = k_0 \cdot P, \qquad (2$$

unde

c_c, c_m reprezintă coeficienții de rigiditate ai cepului și mufei;

$k_0 = \dfrac{c_c}{c_c + c_m}$ — coeficient de sarcină.

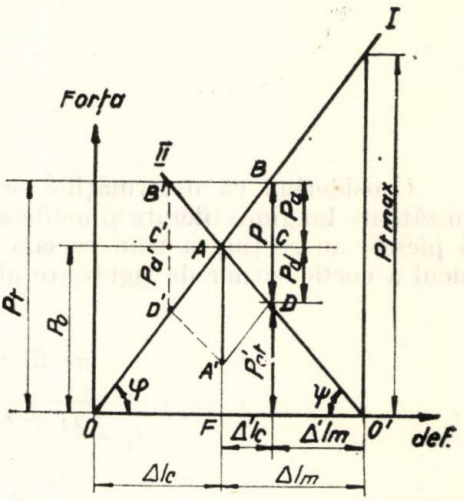


Fig. 1. — Diagrama forță-deformație a asamblării cu strîngere cep-mufă; linia I reprezintă caracteristica cepului, iar linia II caracteristica mufei.

Rezultă că celor două situații de solicitare expuse, le corespund următoarele eforturi unitare de tracțiune în cep:

cînd $P \leqslant P_{t,\max}$ $\sigma_{tc} = \dfrac{P_0 + k_0 P}{A_c}$, (3)

cînd $P > P_{t,\max}$ $\sigma_{tc} = \dfrac{P}{A_c}$, (4)

A_c — aria transversală a cepului în dreptul primei spire. Se demonstrează că valoarea forței de exploatare la care apare deschiderea îmbinării are expresia

$$P_{t,\max} = \frac{P_0}{1 - k_0}. \tag{5}$$

Pentru determinarea solicitării de tracțiune a cepului, ținînd seama că îmbinarea este prestrînsă, rezultă că este necesară determinarea coeficienților de rigiditate ai cepului și mufei.

2.1. DETERMINAREA ANALITICĂ A COEFICIENŢILOR DE RIGIDITATE AI CEPULUI ŞI MUFEI

Prin definiţie, coeficientul de rigiditate reprezintă forţa necesară pentru a produce unitatea de deformaţie [1], rezultînd pentru cep şi mufă :

$$c_c = \frac{P_0}{\Delta l_c}, \tag{6}$$

$$c_m = \frac{P_0}{\Delta l_m}. \tag{7}$$

Considerînd că deformaţiile se compun din două elemente corespunzătoare lungimii filetate şi nefiletate a cepului şi mufei şi ţinînd seama că piesele au secţiunea transversală variabilă, s-au elaborat relaţiile de calcul a coeficienţilor de rigiditate ai cepului şi mufei [3] :

$$c_c = \frac{\pi \cdot E_c \cdot d_2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{l_1 - \frac{r_4 + r_2}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \ln \frac{l_1 - \frac{r_4 - r_2}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}}{\frac{r_4 + r_2}{r_4 - r_2}}}, \tag{8}$$

$$c_m = \frac{\pi \cdot E_m \cdot d_1 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{-l_1 + \frac{r_1 + r_{10}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \ln \frac{l_1 + \frac{r_1 - r_{10}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}}{\frac{r_1 + r_{10}}{r_1 - r_{10}}}}, \tag{9}$$

unde

l_1 reprezintă lungimea cepului ;
E_c, E_m — modulul de elasticitate al cepului, respectiv mufei ;
γ — unghiul la vîrf al conului ;
d_4 — diametrul bazei cepului ;
d_1, d_2 — diametrul exterior respectiv interior al racordului ;
d_{10} — diametrul degajării la faţa frontală a mufei.

Expresiile (8) și (9) s-au utilizat pentru determinarea atît a coeficienților de rigiditate ai cepului și mufei, cît și a coeficienților de sarcină k_0, prezentați pentru racordurile speciale de tip „Larg" în tabela 2.

Tabela 2

Tipul R.S.	c_c [kgf/mm]	c_m [kgf/mm]	$k_0 = \frac{c_c}{c_c + c_m}$
$3\frac{1''}{2}$ L	$67 \cdot 10^4$	$90 \cdot 10^4$	0,427
4″ L	$46 \cdot 10^4$	$119{,}2 \cdot 10^4$	0,278
$4\frac{1''}{2}$ L	$92{,}5 \cdot 10^4$	$139{,}2 \cdot 10^4$	0,400
$5\frac{1''}{2}$ L	$82{,}2 \cdot 10^4$	$119 \cdot 10^4$	0,315
$6\frac{5''}{8}$ L	$92{,}8 \cdot 10^4$	$160{,}7 \cdot 10^4$	0,366

2.2. EFORTURILE UNITARE DE TRACȚIUNE ÎN CEP

Pe baza relațiilor prezentate anterior se calculează eforturile unitare de tracțiune în cep în funcție de valoarea forței de prestrîngere și de forța de tracțiune de exploatare. Efortul unitar s-a calculat pentru secțiunea transversală corespunzătoare golului primei spire a cepului, deoarece, conform cercetărilor experimentale [19], aici se dezvoltă eforturile maxime. Variația efortului unitar axial în cep cu sarcina de exploatare, pentru

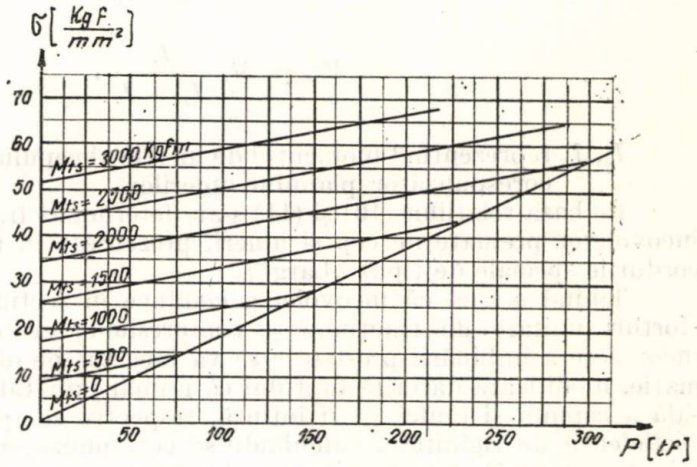


Fig. 2. — Variația efortului unitar axial în cep cu sarcina axială, pentru diferite valori ale momentului de înșurubare la racordul $4\frac{1''}{2}$ L.

diferite valori ale momentului de înșurubare la racordul $4\frac{1''}{2}$ *L*, este prezentată în figura 2.

Se observă avantajul pretensionării prin aceea că panta dreptelor pentru care $M_{ts} \neq 0$ este mai mică decît cea corespunzătoare neprestrîngerii îmbinării ($M_{ts} = 0$).

3. SOLICITAREA LA ÎNCOVOIERE

Dacă umerii filetului special ai cepului şi mufei nu sînt în contact, momentul încovoietor se transmite integral prin intermediul cepului.

În practică, datorită contactului umerilor, o parte din momentul încovoietor este preluată de umeri şi o parte de cepul filetat.

Ca şi în cazul tracţiunii, se deosebesc două situaţii de solicitare în funcţie de valoarea momentului de înşurubare :

a) pentru situaţiile de solicitare care nu conduc la deschiderea umerilor, se consideră, pentru calculul modulului de rezistenţă, întreaga secţiune compusă a îmbinării (cep şi mufă) ;

b) pentru situaţii de solicitare, la care are loc deschiderea umerilor, momentul încovoietor este transmis integral de cepul filetat.

În condiţii normale, sitúaţia curentă este cea de la punctul a. În acest caz, pentru determinarea solicitării cepului este necesar să se stabilească proporţia în care momentul încovoietor se transmite prin umeri şi prin cepul filetat.

Se notează :

M_{ic}, M_{iu} — fracţiunea din momentul încovoietor transmisă prin cep respectiv prin umeri.

Făcînd ipoteza că sub acţiunea încovoierii planul umerilor se roteşte cu unghiul φ, se obţine

$$M_{iu} = M_i \frac{I_u}{I_u + I_c}, \tag{10}$$

$$M_{ic} = M_i \frac{I_c}{I_u + I_c}, \tag{11}$$

I_c, I_u reprezentînd momentul de inerţie al cepului, respectiv umerilor corespunzător planului umerilor.

Pe baza relaţiilor (10) şi (11) s-au determinat fracţiunile de moment încovoietor preluate de cep şi umeri, prezentate în tabela 3, pentru racordurile speciale de tipul „Larg".

Ţinînd seama că încovoierea conduce în secţiunea transversală la eforturi unitare de tracţiune şi compresiune, cercetarea solicitării la încovoiere a îmbinării prestrînse se va face tot pe diagrama forţă-deformaţie, modificată datorită faptului că numai jumătate din aria transversală a cepului şi mufei va fi întinsă, respectiv comprimată. Ca urmare, coeficienţii de rigiditate, calculîndu-se corespunzător unei jumătăţi din aria transversală, vor fi reduşi la jumătate :

$$C_c' = \frac{C_c}{2} \text{ şi } C_m' = \frac{C_m}{2}. \tag{12}$$

Tabela 3

Tipul R.S.	I_u [cm⁴]	I_c [cm⁴]	$f' = \frac{I_u}{I_u + I_c} \cdot 100$ [%]	$f = \frac{I_c}{I_u + I_c} 100$ [%]
$3\frac{1''}{2}$ L	280	447	38,5	61,5
4″ L	645	558	53,5	46,5
$4\frac{1''}{2}$ L	840	911	48	52
$5\frac{1''}{2}$ L	1 800	1 825	49,6	50,4
$6\frac{5''}{8}$ L	2 800	2 950	48,7	51,3

Ținînd seama că panta dreptelor I și II în diagrama forță-deformație din figura 1 este proporțională cu coeficienții de rigiditate conform relațiilor,

$$C_c = \operatorname{tg}\varphi \text{ și } C_m = \operatorname{tg}\psi,$$

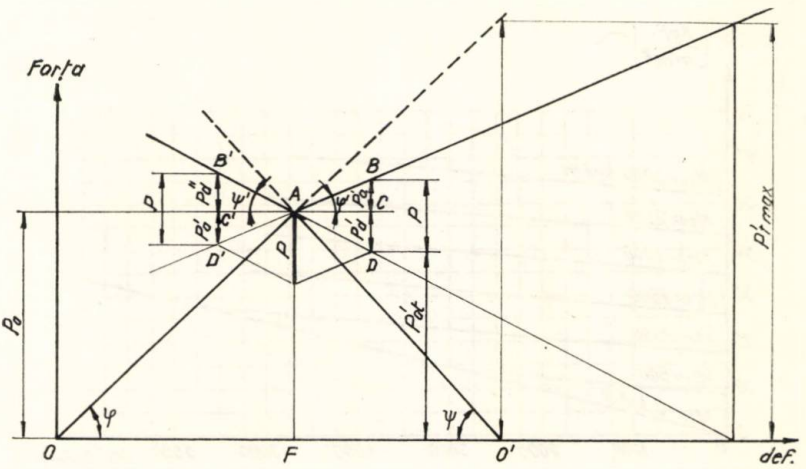


Fig. 3. — Diagrama forță-deformație a asamblării cu strîngere cep-mufă, pentru solicitarea la încovoiere.

pentru cercetarea solicitării la încovoiere a îmbinării prestrînse se va modifica diagrama forță-deformație pentru eforturi peste valoarea forței de prestrîngere conform figurii 3, reducînd la jumătate panta dreptelor.

Eforturile unitare de tracţiune datorate încovoierii în cep se suprapun peste eforturile unitare datorate prestrîngerii. Folosind figura 3 se demonstrează că forţa adiţională de tracţiune datorită încovoierii, P'_a, are expresia

$$P'_a = k_0 \cdot P', \tag{13}$$

P' fiind forţa de tracţiune în secţiunea transversală a cepului, datorată încovoierii.

Aceleaşi consideraţii sînt valabile şi pentru partea comprimată din secţiunea transversală a mufei.

Pe baza considerentelor expuse, se determină momentul încovoietor la care apare „deschiderea umerilor", $M_{i,\max}$, astfel:

— pentru jumătatea întinsă a cepului, admiţînd efortul unitar, într-o primă aproximaţie, uniform distribuit, se poate scrie:

$$\frac{P_{t,\max}}{2} = \frac{P_0}{2(1-k_0)} = \sigma_i \cdot \frac{A_c}{2} = \frac{M_{ic}}{W_c} \cdot \frac{A_c}{2} = \frac{f \cdot M_{i,\max}}{W_c} \cdot \frac{A_c}{2},$$

de aici

$$M_{i,\max} = \frac{W_c}{A_c \cdot (1-k_0) \cdot f} P_0, \tag{14}$$

W_c fiind modulul de rezistenţă axial al cepului.

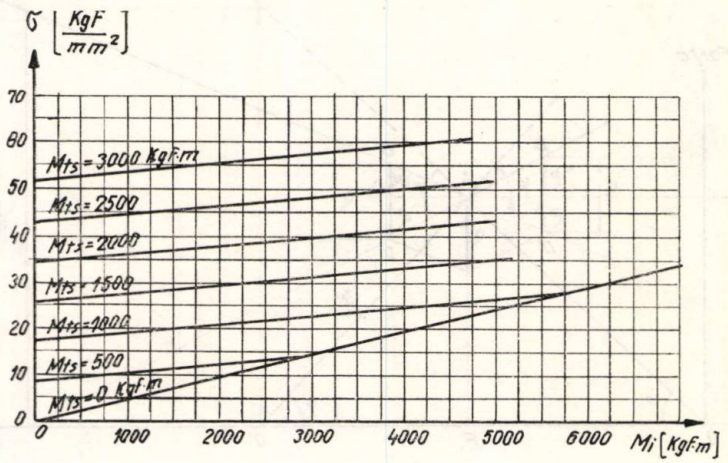


Fig. 4. — Variaţia efortului unitar axial de tracţiune în cep cu momentul încovoietor, pentru diferite valori ale momentului de înşurubare.

În mod similar cu solicitarea la tracţiune, se calculează efortul unitar maxim de tracţiune în cep sub efectul prestrîngerii şi încovoierii, valorile fiind reprezentate în diagrama din figura 4.

Se remarcă avantajul pretensionării prin aceea că panta dreptelor, reprezentînd solicitarea cepului cînd $M_{ts} \neq 0$, este mai mică decît în cazul absenței pretensionării.

Ca urmare a cercetărilor experimentale privind durabilitatea filetului racordurilor speciale pentru diferite valori ale momentului de prestrîngere [20], s-a constatat că în urma prestrîngerii amplitudinea efortului unitar variabil se reduce, valorile fiind prezentate pentru racorduri din oțel 33 MoC11 în tabela 4.

Tabela 4

σ_{0t} $\left[\frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}\right]$	$\frac{\sigma_{0t}}{\sigma_c} 100$ [%]	σ_v $\left[\frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}\right]$	$\frac{\sigma_v, \text{ cu prestrîngere}}{\sigma_v, \text{ fără prestrîngere}}$
0	0	8,85	1
17,4	26,8	8,85	0,93
26,1	40,2	8,76	0,99
36,1	55,5	6,55	0,74
43,5	67,0	6,55	0,74

σ_{0t} — efortul unitar de prestrîngere.

O prestrîngere de circa $0{,}7 \cdot \sigma_c$ reduce efortul variabil al ciclului de solicitare, σ_v, cu 25...30%, prestrîngerea dovedindu-se astfel cel mai important factor tehnologic de influență a durabilității racordurilor speciale.

4. LIMITELE DE SOLICITARE ALE ÎMBINĂRII FILETATE

În stabilirea corectă a unui criteriu de calcul a valorii momentului de înșurubare, se vor analiza combinațiile de solicitări care conduc la o situație critică în exploatarea îmbinării. Se apreciază că solicitarea este critică în următoarele situații:

a) atingerea limitei de curgere în secțiunea cea mai solicitată a cepului;

b) deschiderea umerilor îmbinării (pierderea pretensionării), care conduce la pierderea etanșeității garniturii;

c) ruperea la oboseală a racordului special.

Înșurubarea racordului special trebuie să satisfacă, în orice situație, cea mai restrictivă dintre condițiile care rezultă din stările limită expuse.

Solicitarea limită este în funcție și de calitatea materialului și tratamentului termic. Se vor admite cifrele de rezistență standardizate.

4.1. SOLICITAREA LIMITĂ CARE CONDUCE LA ATINGEREA ÎN CEP A EFORTULUI LIMITĂ DE CURGERE

Pentru determinarea valorilor solicitărilor date de forța axială, momentul încovoietor și momentul de înșurubare, care conduc la dezvoltarea în cep a efortului limită de curgere, se construiește nomograma din

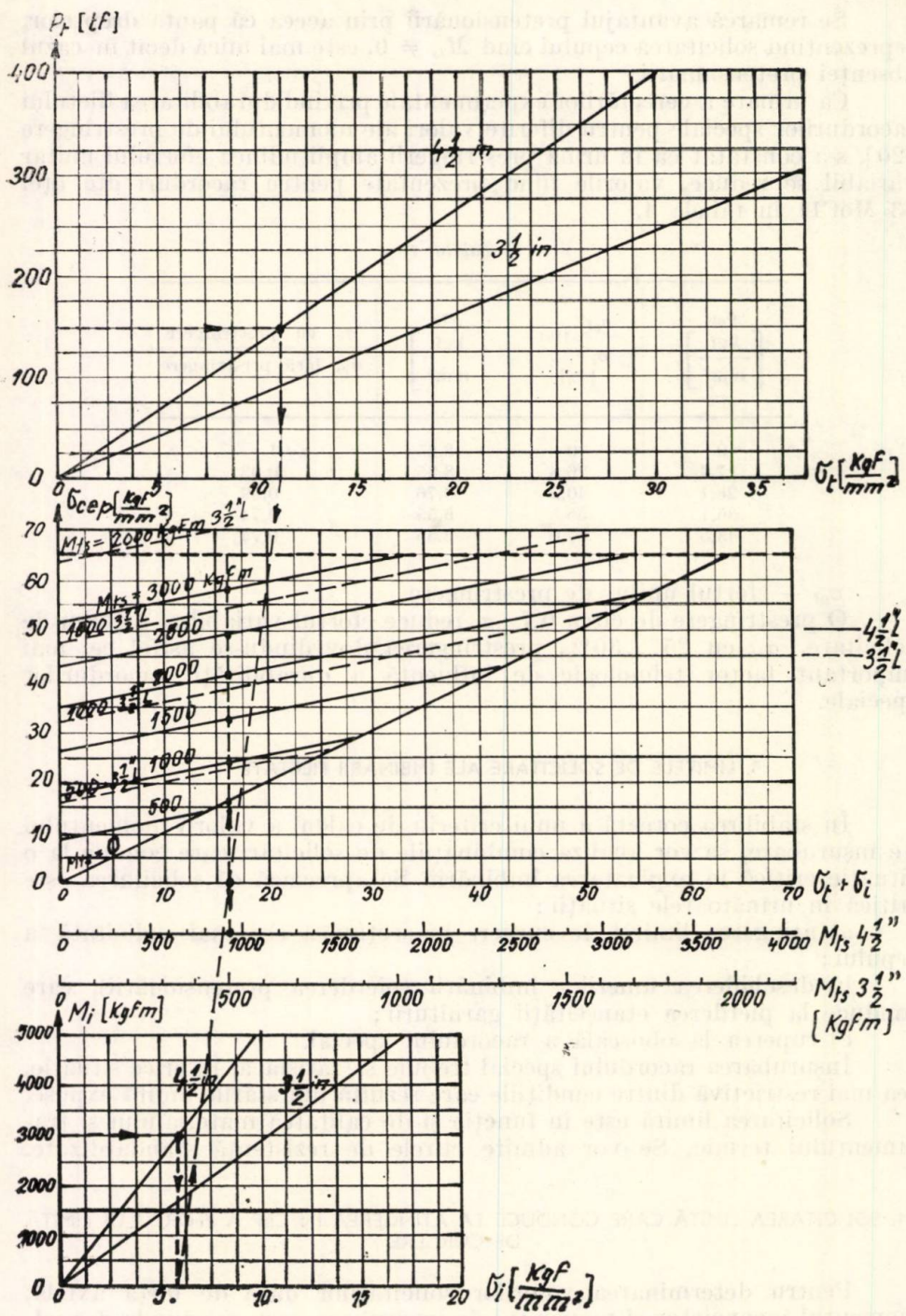


Fig. 5. — Nomogramă pentru determinarea com înaţiilor de solicitări care conduc la atingerea limitei de curgere în cep.

figura 5, pe baza considerațiilor expuse asupra tracțiunii și încovoierii îmbinării.

Nomograma este construită pentru racordurile speciale de dimensiunile $4\frac{1''}{2}$ L (linie plină) și $3\frac{1''}{2}$ L (linie întreruptă).

În diagrama de sus se determină efortul unitar de tracțiune, σ_t, corespunzător forței de tracțiune P_t. În diagrama de jos se determină efortul unitar de încovoiere, σ_i, corespunzător momentului încovoietor M_i. Însumarea eforturilor unitare de tracțiune și încovoiere se realizează prin unirea punctelor reprezentative și intersectarea acestei drepte cu axa $\sigma_t + \sigma_i$. Aceasta permite ca în diagrama din centrul nomogramei să se determine efortul unitar total în cep, σ_{cep}, în funcție de efortul unitar axial datorat tracțiunii și încovoierii, $\sigma_t + \sigma_i$, pentru diferite valori ale momentului de înșurubare, M_{ts}.

Pentru a determina solicitările date de forța de tracțiune, momentul încovoietor și momentul de înșurubare care conduc la atingerea limitei de curgere în cep, se construiește în diagrama din centrul nomogramei o orizontală corespunzătoare limitei de curgere a materialului, admisă 65 kgf/mm². Punctele de intersecție ale acestei orizontale cu dreptele care reprezintă variația efortului unitar în cep în funcție de efortul axial $\sigma_t + \sigma_i$, ne conduc la perechi de valori M_{ts}, $\sigma_t + \sigma_i$, care, reprezentate în figura 6, formează diagrama ce înglobează toate combinațiile de solicitare de înșurubare, tracțiune și încovoiere care conduc în secțiunea cepului la atingere a limitei de curgere. În figura 6 se observă că pentru momente de înșurubare sub 2 250 kgfm întîi are loc deschiderea umerilor, iar apoi se atinge limita de curgere în cep.

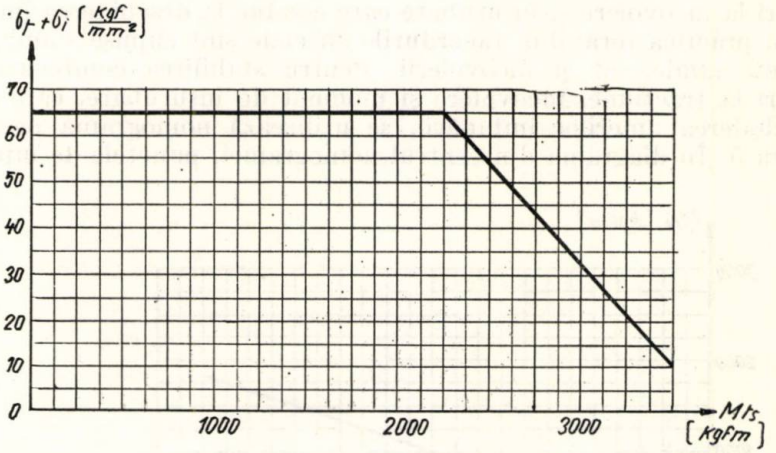


Fig. 6. — Combinațiile între momentul de înșurubare și efortul unitar provenit din solicitarea exterioară, care conduc la atingerea limitei de curgere în cep la R.S. $4\frac{1''}{2}$ L.

Rezultă că dacă se cunosc solicitările exterioare, forța axială și momentul încovoietor, se poate determina momentul de înșurubare care să conducă în cep la un efort axial total inferior limitei de curgere.

4.2. SOLICITAREA LIMITĂ CARE CONDUCE LA DESCHIDEREA UMERILOR ÎMBINĂRII

Combinațiile de solicitări pentru care are loc deschiderea umerilor sînt reprezentate în figurile 2 și 4 de punctele de intersecție ale dreptelor construite pentru moment de înșurubare nul cu dreptele reprezentînd variația efortului unitar în cep cu sarcina axială, respectiv cu momentul încovoietor. Cu perechile de valori corespunzătoare punctelor de intersecție, se trasează diagrama din figura 7, care reprezintă toate combinațiile de

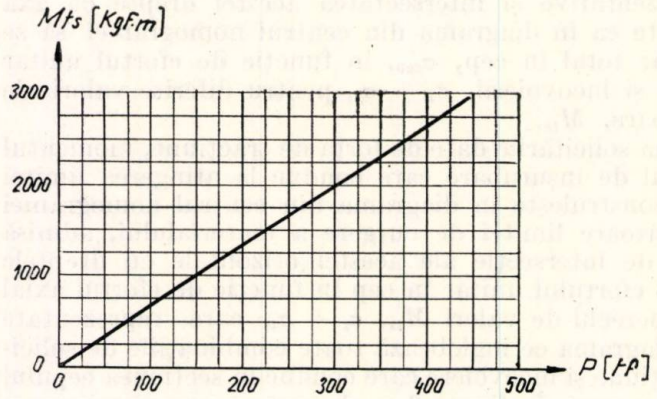


Fig. 7. — Combinațiile între forța de tracțiune și momentul de înșurubare, care conduc la deschiderea umeri lor îmbinării $4\frac{1''}{2}$ L.

solicitări la tracțiune și înșurubare, care conduc la deschiderea îmbinării, respectiv diagrama din figura 8 care reprezintă toate combinațiile de solicitări la încovoiere și înșurubare care conduc la deschiderea îmbinării.

În practica forajului, racordurile speciale sînt supuse simultan atît tracțiunii axiale, cît și încovoierii. Pentru stabilirea combinațiilor de solicitări la tracțiune, încovoiere și moment de înșurubare, care conduc la deschiderea umerilor îmbinării, se utilizează nomograma prezentată în figura 5. În diagrama din centrul nomogramei, punctele de intersecție

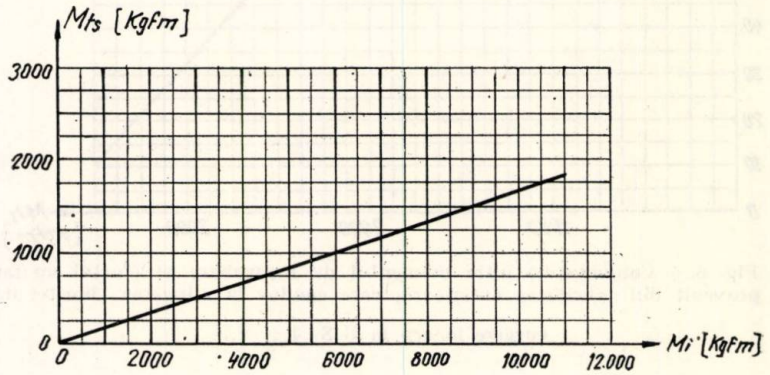


Fig. 8. — Combinațiile între momentul încovoietor și momentul de înșurubare care conduc la deschiderea umerilor îmbinării $4\frac{1''}{2}$ L.

între drepte care reprezintă variația efortului unitar în cep cu efortul de exploatare, $\sigma_t + \sigma_i$, pentru momentul de înșurubare nul și între dreptele construite pentru diferite valori ale momentului de înșurubare reprezintă combinațiile de solicitări pentru care are loc deschiderea umerilor îmbinării. De exemplu, la un racord special $4\frac{1''}{2}$ L prestrîns cu 1 500 kgfm, deschiderea umerilor are loc cînd efortul unitar din tracțiune și încovoiere $\sigma_t + \sigma_i$, are valoarea 42,5 $\frac{\text{kgf}}{\text{mm}^2}$.

Reprezentînd perechile de valori $\sigma_t + \sigma_i$ și M_{ts}, pentru care are loc deschiderea îmbinării, se obține diagrama din figura 9 pentru racordul de tip $4\frac{1''}{2}$ L. Corespunzător efortului sumă $\sigma_t + \sigma_i$ se determină din diagramă momentul de înșurubare la care umerii se deschid.

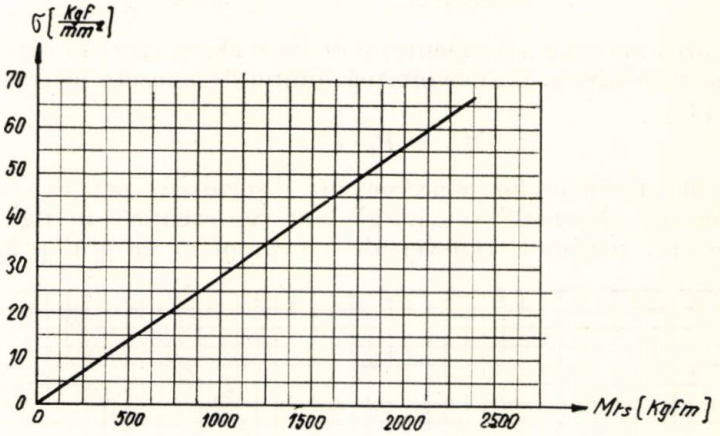


Fig. 9. — Diagrama combinațiilor moment de înșurubare-efort unitar de exploatare, care conduc la deschiderea umerilor îmbinării $4\frac{1''}{2}$ L.

4.3. SOLICITAREA LIMITĂ CARE CONDUCE LA RUPEREA LA OBOSEALĂ A CEPULUI RACORDULUI SPECIAL

Cercetările experimentale la oboseală, efectuate de autori la încovoierea alternant simetrică a racordurilor speciale în absența tracțiunii, [20], au arătat că amplitudinea maximă a efortului unitar se realizează în situația racordurilor neprestrînse, tabela 4.

În realitate, racordurile speciale sînt întotdeauna supuse tracțiunii axiale, a cărei valoare depinde de poziția racordului special în garnitura de foraj, fiind mai mare în partea superioară a garniturii. Pentru racordurile speciale, înșurubate insuficient, datorită forței axiale, umerii se vor îndepărta, iar momentul încovoietor se va transmite integral cepului, ne mai intervenind aportul favorabil al umerilor.

5. CALCULUL MOMENTULUI DE ÎNȘURUBARE

Din cele expuse, rezultă că îmbinarea trebuie prestrînsă cu un moment de înșurubare care să evite deschiderea umerilor cînd asupra îmbinării acționează sarcinile de exploatare, atît din considerente de etanșeitate, cît și de oboseală. Valoarea momentului de înșurubare este dependentă de sarcinile de exploatare.

În același timp, efortul unitar în cep datorat înșurubării și solicitărilor din foraj trebuie să fie inferior limitei de curgere.

Se observă că pentru aceeași valoare a solicitărilor exterioare se pot calcula două valori ale momentului de înșurubare :

– o valoare maximă, care conduce la atingerea în cep a limitei de curgere;

– o valoare minimă, rezultînd din compararea momentelor calculate din condiția evitării deschiderii umerilor și din condiția rezistenței maxime la oboseală.

5.1. MOMENTUL MAXIM DE ÎNȘURUBARE

Valoarea maximă a momentului de înșurubare este cea care conduce, chiar de la înșurubare, la dezvoltarea limitei de curgere în cep, conform relației (1) :

$$M_{ts} = P_0 \cdot c = A_c \cdot \sigma_c \cdot c$$

Valorile momentelor maxime de înșurubare pentru racordurile speciale de tip „Normal" și „Larg" sînt reprezentate în figura 10 în funcție de aria secțiunii transversale a cepului în dreptul primei spire.

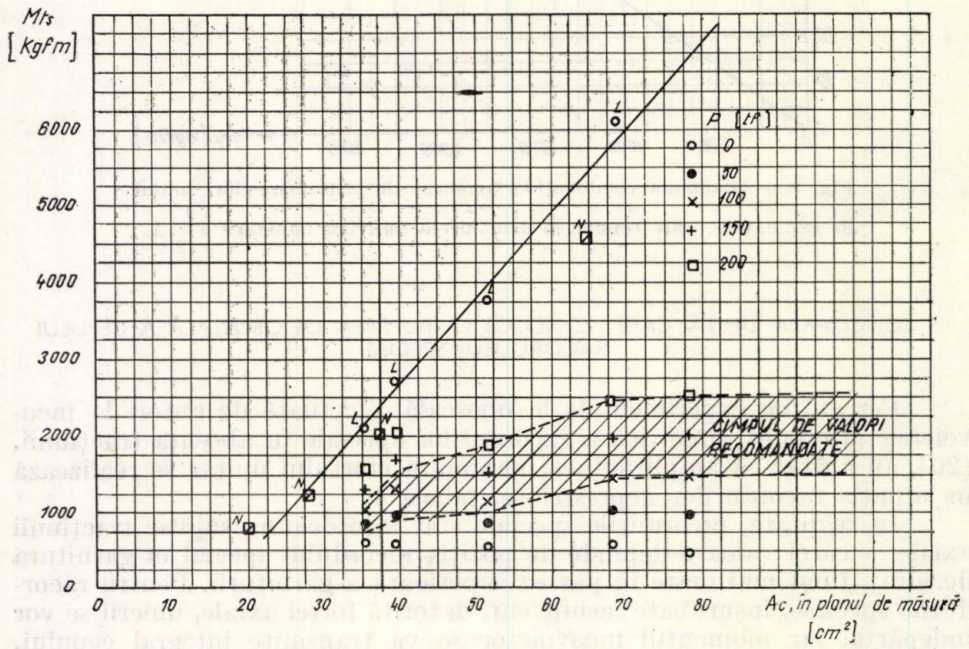


Fig. 10. — Diagrama valorilor momentelor de înșurubare.

5.2. MOMENTUL DE ÎNȘURUBARE DETERMINAT DIN CONDIȚIA NEDESCHIDERII UMERILOR

Valoarea momentului de înșurubare necesar pentru evitarea deschiderii umerilor depinde de valoarea solicitărilor exterioare, tracțiune și încovoiere. Momentul de înșurubare minim necesar se va calcula egalînd efortul în mufă datorită încovoierii și forței axiale de tracțiune cu cel introdus de înșurubare, respectiv punem condiția ca sub acțiunea sarcinilor de exploatare, forța remanentă de compresiune a umerilor, notată P'_{0t}, să fie pozitivă.

Considerînd, pentru început, numai solicitarea la tracțiune, rezultă, conform figurii 1,

$$P'_{0t} = P_0 - P_d = P_0 - (1 - k_0) P > 0 \text{ sau}$$

$$P_0 > (1 - k_0) P = (1 - k_0) \cdot A_c \cdot \sigma_t.$$

Ținînd seama și de efectul încovoierii asupra deschiderii umerilor, rezultă în final expresia forței de prestrîngere:

$$P_0 > (1 - k_0) . A_c \cdot (\sigma_t + \sigma_{i,\max}). \tag{15}$$

Cu această valoare, expresia momentului de înșurubare devine:

$$M_{ts} = (1 - k_0) \cdot P \cdot c + (1 - k_0) \cdot A_c \cdot \sigma_{i,\max} \cdot c = U + V, \tag{16}$$

unde

$$\sigma_{i,\max} = \frac{f \cdot M_i}{W_c}. \tag{17}$$

Punînd condiția ca umerii să nu se deschidă nici pentru cea mai mare valoare a momentului încovoietor, $M_{i,\max}$, rezultă că în membrul drept al relației (16) primul termen, U, este variabil cu forța de tracțiune, iar al doilea, V, este constant. Conform [3], valoarea momentului încovoietor cu cea mai mare frecvență este 1 720 kgfm, iar valorile mai mari de 3 000 kgfm au o frecvență foarte mică. Admițînd $M_{i,\max} = 3\,000$ kgfm, valorile momentului de înșurubare minim din condiția nedeschiderii umerilor, calculate în tabela 5, sînt prezentate în figura 10 în funcție de valorile posibile ale sarcinii de tracțiune în exploatare, P.

5.3. MOMENTUL DE ÎNȘURUBARE DETERMINAT DIN CONDIȚIA DURABILITĂȚII MAXIME

Pe baza considerentelor expuse privind durabilitatea racordurilor speciale, din condiția asigurării durabilității maxime a acestora e necesară înșurubarea lor cu un moment care să conducă la o forță de prestrîngere a umerilor egală cu forța axială de tracțiune a îmbinării, respectiv

$$M_{ts} = (1 - k_0) \cdot P \cdot c. \tag{18}$$

Tabela 5

Tip R.S.	W_c [cm³]	A_c [cm²]	$\sigma_{i,max}$ [kgf/mm²]	V [kgfm]	U [kgfm]								
					P [tf]								
					0	25	50	75	100	125	150	175	200
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$3\frac{1''}{2}$ L	59,2	35,65	31,2	565	565	126,2	252,4	379	505	631	758	885	1 010
4'' L	73,8	39,15	18,9	578	578	188,7	377	565	754	944	1 130	1 320	1 510
$4\frac{1''}{2}$ L	108	52,50	14,48	504	504	165,8	331	497	662	828	995	1 160	1 328
$5\frac{1''}{2}$ L	180,2	68,03	8,37	540	540	237,5	475	712	948	1 188	1 423	1 660	1 900
$6\frac{5''}{8}$ L	254,5	77,80	6,05	478	478	254	508	762	1 018	1 270	1 530	1 782	2 038

Ținînd seama de necesitatea asigurării etanșeității garniturii, rezultă că valoarea minimă a momentului de înșurubare admisibilă în foraj va corespunde condiției de nedeschidere a umerilor, deoarece condiția durabilității maxime conduce la valori mai mici ale momentului de înșurubare.

Determinarea valorii momentului de înșurubare pentru fiecare racord special din garnitura de foraj impune calculul ținînd seama de forța axială de tracțiune. Acest lucru nu e aplicabil în practică, de aceea o soluție suficient de exactă este de a împărți garnitura de foraj în tronsoane asupra cărora acționează forțe de tracțiune de 0, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175 și 200 tf.

În momentul proiectării alcătuirii garniturii de foraj se pot prescrie și valorile momentelor de înșurubare.

Admițînd, de exemplu, că racordurile speciale $3\frac{1''}{2}$ L pot fi solicitate la tracțiune cu forțe variind între 25 tf și 100 tf, rezultă că momentul de înșurubare va fi cuprins între 692 și 1070 kgfm. În tabela 6 se prezintă orientativ determinarea limitelor de variație a momentelor de înșurubare pentru racordurile de tip „Larg", calculate pe baza datelor din tabela 5.

Tabela 6

Tip R.S.	Interval admis pentru P [tf]	M_{ts} [kgfm]
$3\frac{1''}{2}$ L	25...100	691...1 070
4'' L	50...125	955...1 522
$4\frac{1''}{2}$ L	75...200	1 000...1 832
$5\frac{1''}{2}$ L	100...200	1 488...2 440
$6\frac{5''}{8}$ L	100...200	1 496...2 516

CONCLUZII

1. Valoarea momentului de înșurubare este esențială pentru realizarea performanțelor maxime ale racordurilor speciale, impunînd introducerea obligatorie în practica forajului a prescrierii și controlului acestuia.

2. Valoarea momentului optim de înșurubare depinde de valoarea solicitărilor exterioare. Deși momentul încovoietor se poate aprecia statistic la o valoare constantă, valoarea momentului de înșurubare este dependentă de solicitarea la tracțiune, respectiv de poziția racordului special în garnitura de foraj.

3. Momentul de înşurubare s-a determinat din condiţia evitării solicitărilor limită care conduc la atingerea limitei de curgere în cep, deschiderea umerilor sau ruperea la oboseală a racordului special.

4. Valorile determinate pentru momentul de înşurubare sînt inferioare valorilor recomandate de diverse firme, [11], [14], în special pentru racordurile speciale de dimensiuni mari. Aceasta se datoreşte faptului că s-a avut în vedere asigurarea durabilităţii maxime la oboseală a racordurilor speciale.

Primită la redacţie la 3 iulie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Manea, *Organe de maşini*, Ed. tehnică, Bucureşti, 1972.
2. V. Hauk, H. Koehler, *Untersuchungen an Gestängeverbindern.* $3\frac{1''}{2}$ — IF — *Gestänge unter statischer überlagerter Torsions und Zugbeanspruchung*, Erdoel-Z. **78**. Jg., Oktober (1962).
3. V. Ulmanu, *Contribuţii la studiul racordurilor speciale sudate pentru forajul de mare adîncime*, Teză de doctorat. Institutul de petrol şi gaze Ploieşti, 1974.
4. P. D. Weiner, M. E. True, *Tests confirm formula for optimum drill-collar makeup torque*, The Oil and Gas J. Nov. **19** (1973).
5. A. P. Farr, *Makeup torque control cuts cost of improper tonging*, Drilling vol. 18, oct. 1957.
6. J. F. Gormley, *Experimental stress analysis of Tooljoints*, J. Petroleum Techn., **13** (1961).
7. V. Hauk, H. Koehler, *Untersuchungen an Gestängeverbindern*, Verschraubversuche mit verschiedenen Konstructionen. Erdoel-Z. **78** Jg. Juli (1962).
8. V. Hauk, H. Koehler, *Untersuchungen an Gestängeverbindern. Einfluss der Biegung auf die Belastbarkeit von Bohrgestänge und normierte Darstellung des Belastungsdiagramms der Tooljoints mit API-IF Gewinde*, Erdoel-Z. **80** (1964).
9. A. Hosang, *Die Belastbarkeit von Tiefbohrgestängen*, Erdoel Z. **77** (1961).
10. I.C.F.E. Cîmpina, Acţiunea 18, **11**, *1* (1967).
11. * * * *Formulaire du foreur*, Mai 1966. Les Impresions Aldines. 92. France.
12. F. Mansholt, *Teoretische Überlegungen über den Einsatzbereich von API — Tooljoints*, Erdoel-Z. **79**, Jg., september (1963).
13. Moore Stanley, *Is Improper Makeup Torque costing you Money, Trouble?* Drilling, **18**, *12* (1957).
14. — Reed General Catalog 1968—69 G. W. Murphy Industries.
15. A. E. Saroian, *K opredeleniiu velicin krutiascih momentov neobhodimth dlia zatiajki zamkovth soedinenii burilinih trub*, Az. Neft. Hoz., *5* (1957).
16. I. D. Scerbiuk, *Krutiaşcii moment svincivaniia zamkovih rezibovih soedinenii*, Neft. Hoz., *3* (1970).
17. v.d. H. T. Wissel, *Schraubmomente für API-Verbinder*, Erdoel-Z, **77** (1961).
18. Z. I. Fedorenko, *Uproscennaia formula dlia opredeleniia krutiaşcih momentov pri navincivanii muft na obsadnie trubi*, Neft. Hoz., *11* (1966).
19. V. Ulmanu, D. Raşeev, T. Huidu, *Cercetări experimentale privind starea de eforturi în filetele racordurilor speciale*, St. cerc. mec. apl., *1* (1975).
20. D. Raşeev, V. Ulmanu, *Contribuţii la determinarea rezistenţei la oboseală a racordurilor speciale*, St. cerc. mec. apl., *4* (1974).

CONTRIBUȚII LA STABILIREA ȘI REZOLVAREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE NELINIARE A SISTEMELOR HIDRAULICE DE COPIAT FOLOSIND CALCULATORUL NUMERIC

de HO DINH TUNG

doctorand la catedra de Mașini-unelte din I.P.B.

În această lucrare sînt prezentate metoda de stabilire a ecuațiilor sistemului hidraulic de copiat și rezolvarea acestora cu ajutorul calculatorului numeric.

Folosirea sistemelor de acționare hidraulică s-a extins din ce în ce mai mult în construcția de mașini în ultimii ani, datorită calităților și avantajelor remarcabile pe care acestea le prezintă în comparație cu alte sisteme de acționare. Una din utilizările de maximă eficiență a acestor sisteme de acționare este la mașinile-unelte de copiat.

Avînd în vedere că sistemele hidraulice de copiat de la mașinile-unelte sînt sisteme de reglare automată, cu funcționare aproape permanentă în regim tranzitoriu, una din problemele importante este analiza performanțelor dinamice și mai ales a stabilității dinamice a acestor sisteme, analiză care se face pe baza unor ecuații diferențiale neliniare care descriu procesul de funcționare al sistemului.

În prezent există două metode de rezolvare a unor astfel de ecuații.

a) Metoda analitică (E. P. Popov, B. A. Lescenko, Kamenir), care este destul de complicată și laborioasă. Pentru simplificare, s-au utilizat diverse metode de liniarizare, care însă introduc unele erori destul de mari, mai ales în cazuri de saturație, prezenței histerezisului, zonelor de insensibilitate etc. Astfel de metode, deși nu dau o soluție generală, prezintă totuși unele avantaje, printre care acelea că folosind transformarea Laplace și aplicînd apoi un anumit criteriu de stabilitate (Nyquist sau Routh-Hurwitz), permit analizarea stabilității sistemului fără rezolvarea completa a ecuațiilor diferențiale.

b) Folosirea calculatoarelor analogice, care în ultimii ani au devenit un instrument deosebit de important în rezolvarea problemelor legate de sistemele automate. Deși calculatoarele analogice ușurează substanțial calculul și proiectarea sistemelor hidraulice și permit a se realiza alegerea celor mai optime regimuri și scheme structurale, nici acestea nu dau so-

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 35, NR. 1, 1976, P. 137–146

luții generale privind criteriile de stabilitate, sau rădăcinile ecuației diferențiale. Ele dau rezultate numai după calculul prealabil al tuturor valorilor coeficienților ecuației diferențiale.

În lucrarea de față, spre deosebire de cele două metode utilizate pînă acum, se prezintă o metodică de stabilire a ecuației diferențiale neliniare a sistemelor hidraulice de copiat, precum și rezolvarea acesteia cu ajutorul calculatorului numeric.

I. STABILIREA ECUAȚIILOR

Pe baza analizelor și concluziilor obținute pînă în prezent de unii cercetători, s-a ales pentru studiu un sistem cu traductor cu 4 muchii active, pentru că el are cea mai mare precizie de prelucrare, deși este complicat din punct de vedere constructiv. Caracteristicile dinamice ale sale sînt și cele mai complicate.

În figura 1 este prezentat principiul de lucru al unui sistem de copiat hidraulic cu traductor cu 4 muchii active, în care, cu *1* s-a notat traductorul, *2* și *3* — conductele (dintre traductor și cilindru), *4* — cilindrul activ, *5* — legătura elastică dintre cilindrul și organul de lucru, *6* — organul

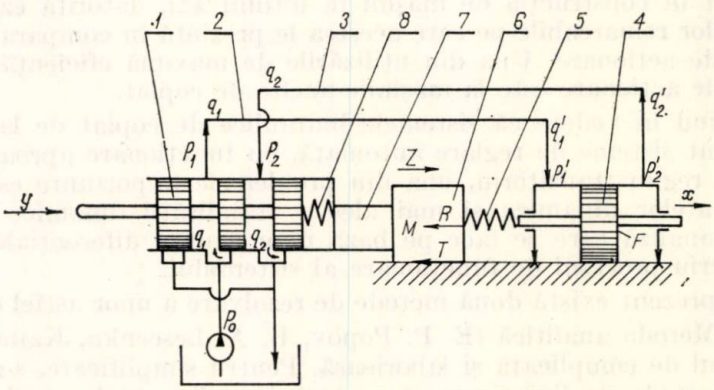


Fig. 1

de lucru, *7* — legătura de reacție, *8* — arcul de poziționare. În cele ce urmează vor fi determinate ecuațiile de mișcare ale fiecărui element.

I.1. ECUAȚIA CARACTERISTICĂ A TRADUCTORULUI

Ținînd cont de neliniaritatea relației dintre căderea de presiune în cilindru și deplasarea sertărașului traductorului și avînd în vedere figura 1 se poate scrie ecuația neliniară a traductorului sub forma [7]:

$$\Delta p = p_n \cdot \mathrm{th} K_1 \left[(y - z) - \frac{q}{A \cdot p_n^{0.5} \cdot b} \right], \qquad \mathrm{daN/cm^2}, \qquad (1)$$

unde $\Delta p = p_1 - p_2$,

$p_n = p_1 + p_2$,

K_1 — un coeficient (în general $K_1 = 220$ cm^{-1}),

A — un coeficient, funcție de lungimea efectivă a perimetrului traductorului (b),

cînd $b \geqslant 5$ cm, atunci $A = 1100$ cm^2/s. kg^{0,5},

$b < 5$ cm, atunci $A = 1200$ cm^2/s. kg^{0,5},

q — debitul de intrare în cilindru, kg/min,

y — deplasarea sertărașului,

z — deplasarea organului de lucru.

I.2. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ DE MIȘCARE A PISTONULUI

Avînd în vedere pierderile volumice și de compresibilitatea lichidului în cilindru, se poate scrie ecuația diferențială de mișcare a pistonului sub forma

$$q' = F\dot{x} + q_{ym} + \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}, \tag{2}$$

unde q_{ym} este pierderea volumică în unitatea de timp în cilindru,

$q_{ym} = C\,\frac{R}{F}$, în care R — forța care acționează pe piston,

F — suprafața pistonului,

C — coeficient de proporționalitate dintre pierderile volumice și căderea de presiune în cilindru (adică pierderea volumică pentru unitatea de cădere a presiunii),

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = k_y \cdot \frac{\dot{R}}{2F},$$

în care k_y — coeficientul de elasticitate totală al cilindrului și lichidului cînd pistonul se află în regim staționar la mijlocul cursei, V — volumul cilindrului.

Prin înlocuirile de mai sus, ecuația (2) devine:

$$q_1' = q_2' = q' = F\dot{x} + \frac{C}{F}\,R + \frac{k_y}{2F}\,\dot{R} \tag{3}$$

I.3. ECUAȚIA DE VARIAȚIE A PRESIUNII ÎN CONDUCTELE DINTRE TRADUCTOR ȘI CILINDRU

Avînd în vedere inerția lichidului și căderea presiunii în conductă (cînd $p_1 \neq p_1'$, $p_2 \neq p_2'$), se poate scrie

$$\Delta p = \Delta p' + 2\Delta p_{1pm},$$

unde

$$\Delta p' = p_1' - p_2' = \frac{R}{F},$$

$\Delta p_{1mp} = p_1 - p_1'$ — pierderea în conducte,
Neglijînd pierderea în conducte, se obține

$$\Delta p = \Delta p' = \frac{R}{F}. \tag{4}$$

I.4. ECUAȚIA DE LEGĂTURĂ DINTRE PISTON ȘI ORGANUL DE LUCRU M

Ținînd cont că legătura aceasta nu este absolută rigidă, se obține

$$x - z = k_{cb} \cdot R. \tag{5}$$

I.5. ECUAȚIA DIFERENȚIALĂ A ORGANULUI DE LUCRU CU MASA M

Ținînd cont de frecare uscată, se poate scrie sub forma:

$$R = M\ddot{z} + T_c \cdot \operatorname{sign} \dot{x} + S, \tag{6}$$

unde S este forța exterioară, constantă.

Cînd mărimea de intrare este egală cu zero (sertărașul staționează) $y = 0$ și $S = 0$, atunci

$$\delta = y - z; \qquad z = -\delta. \tag{7}$$

Grupa de ecuații (1), (3), (4), (5), (6) exprimă legea de mișcare a sistemului. Pentru a simplifica, presupunem că $C = k_{cb} = 0$, se obține grupa de ecuații simple:

$$\Delta p = C_1 \cdot \operatorname{th}\left[K_1\left(\delta - \frac{q}{C_2}\right)\right], \tag{8}$$

$$q = C_3\dot{x} + C_4\dot{R}, \tag{9}$$

$$\Delta p = C_5 R, \tag{10}$$

$$x = -\delta, \tag{11}$$

$$R = -C_6 \cdot \ddot{\delta} - C_7 \cdot \operatorname{sign} \dot{\delta}. \tag{12}$$

În ecuațiile (8) — (12) s-au notat :

$$C_1 = p_n; \quad C_2 = A \cdot p_n^{0,5} \cdot b; \quad C_3 = F; \quad C_4 = \frac{k_v}{2F},$$

$$C_5 = 1/F; \quad C_6 = M; \quad C_7 = T_c.$$

Din cele prezentate mai sus rezultă că ecuațiile (8) și (12) sînt neliniare. Pentru liniarizare, se poate folosi metoda de echilibru a variației sinusoidale.

În ecuația (8) se înlocuiește

$$K_1\left(\delta - \frac{q}{C_2}\right) = \operatorname{Arcth}\frac{\Delta p}{C_1}.$$

Prin dezvoltarea aproximativă în serie Fourier, se obține

$$q = C_2\delta - \frac{C_2}{K_1}\cdot\frac{\Delta p}{C_1} - \frac{C_2}{K_1}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{\Delta p}{C_1}\right)^3. \tag{13}$$

Sistemul studiat este în vibrație neamortizată. Toate cercetările experimentale au arătat că atunci cînd sistemul este în autovibrație, variațiile deplasării și căderii presiunii sînt aproape sinusoidale. De aceea, se poate presupune că

$$\delta = a_\delta \cdot \sin wt, \tag{14}$$

$$\Delta p = a_p \cdot \sin(wt + \varphi),$$

unde a_δ și a_p reprezintă amplitudinile lui δ și Δp în autovibrație

φ — fazele lui δ și Δp în autovibrație.

Înlocuind (14) în (13), prin dezvoltarea în serie Fourier, se obține

$$q = \left(C_2 a_\delta - \frac{C_2}{K_1 C_1}\, a_p \cos\varphi - \frac{1}{4}\,\frac{C_2}{K_1 C_1^3}\, a_p^3 \cos\varphi\right)\sin\omega t +$$

$$+\left(-\frac{C_2}{K_1 C_1}\, a_p \sin\varphi - \frac{1}{4}\,\frac{C_2}{K_1 C_1^3}\, a_p^3 \sin\varphi\right)\cos\omega t. \tag{15}$$

Cu aceeași metodă, se liniarizează relația (12), prin dezvoltarea aproximativă în serie Fourier, se obține

$$\frac{a_p}{C_5}\cos\varphi \cdot \sin wt + \frac{a_p}{C_5}\sin\varphi\cos wt = C_6 \cdot a_\delta \cdot w^2 \sin wt - C_7\frac{4}{\pi}\cos wt. \tag{16}$$

În continuare, în cadrul sistemului de ecuații diferențiale liniarizate (9), (10), (11), (15) și (16), se fac următoarele substituții :

— se înlocuiește (10) și (11) în (9), obținîndu-se

$$q = -C_3\dot{\delta} + C_4\left(\frac{\Delta\dot{p}}{C_5}\right), \tag{17}$$

— se introduce (14) în (17), obţinîndu-se

$$q = -C_3 \cdot a_\delta \cdot w \cdot \cos wt + \frac{C_4}{C_5} a_p w \cdot \cos(wt + \varphi). \tag{18}$$

Operînd în relaţiile (15), (16) şi (18) eliminarea lui q, φ şi a_p (prin metoda de comparaţie a coeficienţilor), se obţine

$$\left.\begin{aligned} A a_\delta^3 w^6 + B a_\delta w^2 + C a_\delta + D w = 0, \\ E a_\delta^2 w^4 + F a_\delta w^3 + G a_\delta w + H = 0, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

unde

$$A = \frac{1}{4} \cdot \frac{C_6^3 C_5^3 C_2}{K_1 C_1^3}; \qquad B = \frac{C_6 C_5 C_2}{K_1 C_1} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{C_2 C_5^3 C_6 C_7}{K_1 C_1^3},$$

$$D = \frac{4}{\pi} C_4 C_7; \qquad C = -C_2; \qquad E = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{C_2 C_5^3 C_6^2 C_7}{K_1 C_1^3},$$

$$F = -C_4 C_6; \qquad G = C_3; \qquad H = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{C_2 C_5 C_7}{K_1 C_1} + \frac{16}{\pi^3} \cdot \frac{C_2 C_5^3 C_7^3}{K_1 C_1^3}.$$

Cu sistemul de ecuaţii (19) se pot determina nu numai amplitudinea şi frecvenţa autovibraţiei, ci şi stabilitatea sistemului. Sistemul (19) se poate rezolva prin metoda de *încercări succesive* obţinînduse a_δ. De exemplu, dacă a_δ are rădăcini reale şi pozitive, atunci sistemul se află în limita de stabilitate.

Complexitatea rezolvării ecuaţiilor (19) poate fi eliminată prin folosirea calculatoarelor numerice.

II. REZOLVAREA ECUAŢIEI CU AJUTORUL CALCULATOARELOR NUMERICE

Adunînd ecuaţiile (19), se obţine

$$A a_\delta^3 w^6 + E a_\delta^2 w^4 + (F w^3 + B w^2 + G w + C) a_\delta + D w + H = 0.$$

În consecinţă, sistemul de ecuaţii (19) este echivalent cu

$$\left.\begin{aligned} A a_\delta^3 w^6 + E a_\delta^2 w^4 + (F w^3 + B w^2 + G w + C) a_\delta + D w + H = 0, \\ A a_\delta^3 w^6 + (B w^2 + C) a_\delta + D w = 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

II.1. CALCULUL COEFICIENŢILOR

Pornind de la o serie de valori folosite în mod curent în sistemele hidraulice de copiat, presupunem că

$$p_n = p_1 + p_2 = 25 \text{ kgf/cm}^2,$$

$$K_1 = 220 \text{ cm}^{-1},$$

cu $b > 5$ cm, $A = 1100$ cm^2/·skg^{0,5},

$F = 58{,}6$ cm^2,

$k_y \approx FH/2\beta = FH/(2.16000) = 0{,}05$ cm^5/kg,

$T_c = 100$ kgf,

$M = 0{,}1$ (kgf · s^2)/cm.

Valorile lui C în ecuațiile (8) — (12) vor fi:

$C_1 = p_n = 25$ kgf/cm^2,

$C_2 = Ap_n^{0,5}b = 1100\sqrt{25} \cdot 6{,}28 = 3{,}46 \cdot 10^4$,

$C_3 = F = 58{,}6$,

$C_4 = k_y/2F = 0{,}05/(2 \cdot 58{,}6) = 4{,}27 \cdot 10^{-4}$,

$C_5 = 1/F = 1/58{,}6 = 1{,}71 \cdot 10^{-2}$,

$C_6 = M = 0{,}1$,

$C_7 = T_c = 100$.

Coeficienții din ecuațiile (20) vor avea valorile:

$$A = \frac{1}{4}\frac{C_6^3 C_5^3 C_2}{K_1 C_1^3} = \frac{1}{4}\frac{(0,1)^3 (1{,}71 \cdot 10^{-2})^3 \, 3{,}46 \cdot 10^4}{220 \cdot (25)^3} = 1{,}26 \cdot 10^{-11},$$

$$B = \frac{C_6 C_5 C_2}{K_1 C_1} + \frac{4}{\pi^2}\frac{C_2 C_5^3 C_6 C_7}{K_1 C_1^3} =$$

$$= \frac{0{,}1 \cdot 1{,}71 \cdot 10^{-2} \cdot 3{,}46 \cdot 10^4}{220 \cdot 25} + \frac{4}{\pi^2} \cdot \frac{3{,}46 \cdot 10^4 (1{,}71 \cdot 10^{-2})^3 \cdot 0{,}1 \cdot 100}{220 \cdot (25)^3} =$$

$$= 1{,}08 \cdot 10^{-2},$$

$$C = -C_2 = -3{,}46 \cdot 10^4,$$

$$D = \frac{4}{\pi} C_4 C_7 = \frac{4}{\pi} 4{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot 100 = 5{,}43 \cdot 10^{-2},$$

$$E = (1/\pi)(C_2 C_5^3 C_6^2 C_7 / K_1 C_1^3) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{3{,}46 \cdot 10^4 (1{,}71 \cdot 10^{-2})^3 \cdot (0,1)^2 \cdot 100}{220 \cdot (25)^3} = 1{,}6 \cdot 10^{-8},$$

$$F = -C_4 C_6 = -4{,}27 \cdot 10^{-4} \cdot 0{,}1 = -4{,}27 \cdot 10^{-5},$$

$$G = C_3 = 58{,}6,$$

$$H = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{C_2 C_5 C_7}{K_1 C_1} + \frac{16}{\pi^3}\frac{C_2 C_5^3 C_7^3}{K_1 C_1^3} =$$

$$= \frac{4}{\pi}\frac{3{,}46 \cdot 10^4 \cdot 1{,}71 \cdot 10^{-2} \cdot 100}{220 \cdot 25} + \frac{16}{\pi^3}\frac{3{,}46 \cdot 10^4 (1{,}71 \cdot 10^{-2})^3 \cdot (100)^3}{220 \cdot (25)^3} =$$

$$= 13{,}8.$$

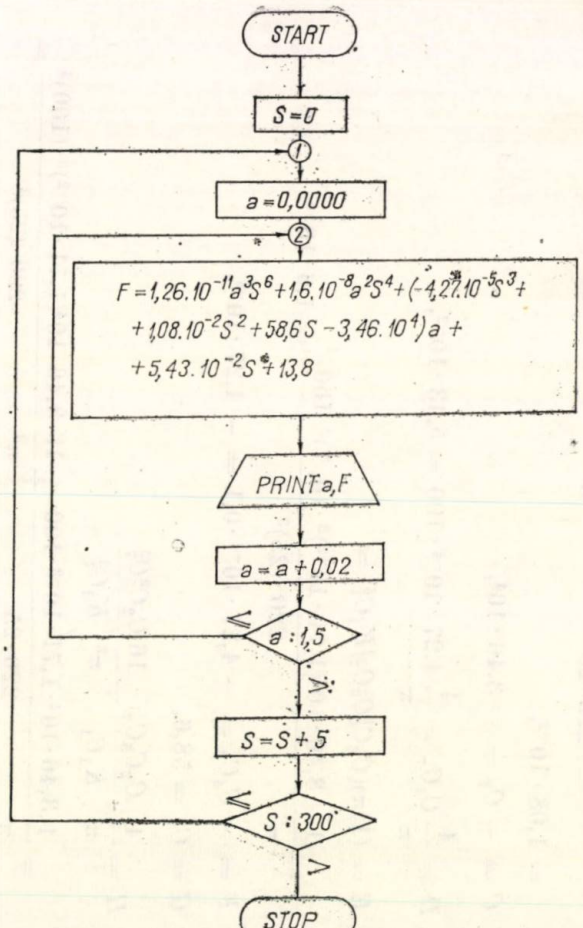


Fig. 2. Organigrama pentru programul I

Fig. 2

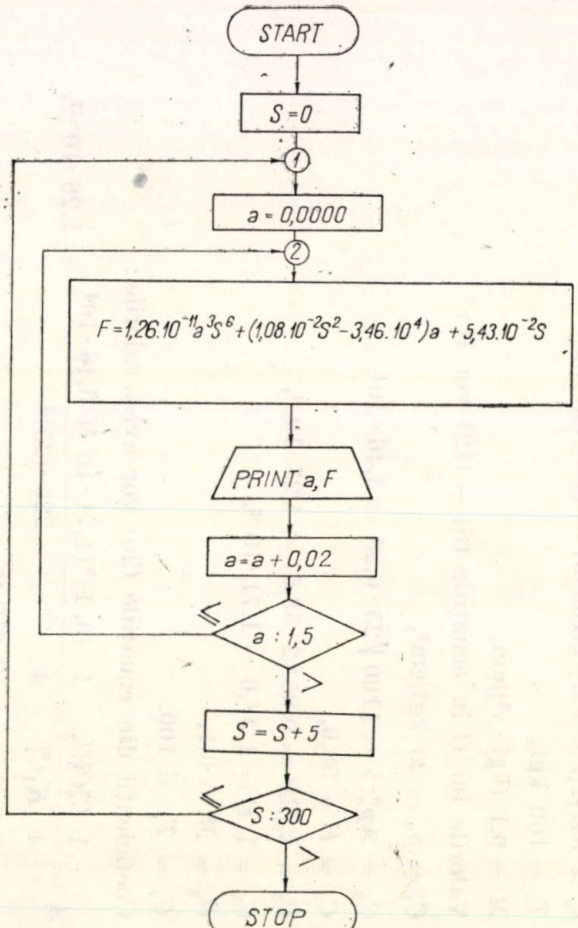


Fig. 3. Organigrama pentru programul II

Fig. 3

Înlocuind aceste valori ale coeficienților în sistemul (20), precum și a în loc de a_8, s în loc de w (pentru că calculatorul n-are semnal a_8 și w), se obține

$$1{,}26\cdot10^{-11}a^3s^6 + 1{,}6\cdot10^{-8}a^2s^4 + (-4{,}27\cdot10^{-5}s^3 + 1{,}08\cdot10^{-2}s^2 + \\ + 58{,}6s - 3{,}46\cdot10^4)\,a + 5{,}43\cdot10^{-2}s + 13{,}8 = 0, \qquad (21)$$

$$1{,}26\cdot10^{-11}a^3s^6 + (1{,}08\cdot10^{-2}s^2 - 3{,}46\cdot10^4)\,a + 5{,}43\cdot10^{-2}s = 0.$$

Se știe că autovibrația la mașini-unelte are frecvența $w \approx 1 \sim 300\ s^{-1}$. Înlocuind $w = 1 \sim 300$ în sistemul (21), se obține

$$a = 0{,}0004 \sim 1{,}5 \text{ cm}.$$

În final, se poate rezolva sistemul de ecuații (21) cu ajutorul calculatorului numeric prin *metoda de încercări succesive*.

Pentru s se aleg: limita superioară = 300, limita inferioară = 0, saltul = 5.

Pentru a se aleg: limita superioară = 1,5, limita inferioară = 0, saltul = 0,02.

Sistemul de ecuații (21) cuprinde 2 ecuații, una se folosește pentru a rezolva, și alta se folosește pentru a verifica.

Schemele bloc sînt reprezentate în figura 2 (pentru prima ecuație) și în figura 3 (pentru a doua ecuație).

II.2. ELABORAREA PROGRAMULUI CALCULATORULUI

Pe baza schemelor bloc, se scriu programele de calcul conform tabelelor 1 și 2.

Tabela 1

Programul 1

```
      |   | S = 0
    1 |   | WRITE(108.11)S
   11 |   | FØRMAT(/10X, 'Pentru S =', F4.0)
      |   | A = 0.0000
    2 |   | F = 1.26E-11*A**3*S**6 + 1.6E-8*A**2*S**4 + (- 4.27E-5*S**3 +
      | 1 | 1.08E-2*S**2 + 58.6*S-3.46E4)*A + 5.43E-2*S + 13.8
      |   | IF(ABS(F)-700.)20, 20, 21
   20 |   | WRITE(108, 12)A, F
   12 |   | FØRMAT(15X, 'A =', F6.4,10X, 'F= ', F12.4)
   21 |   | A = A + 0,02
      |   | IF(A-1.5)15, 15, 16
   15 |   | GØ TØ 2
   16 |   | S = S + 5
      |   | IF(S-300)18, 18, 19
   18 |   | GØ TØ 1
   19 |   | STØP
```

Tabela 2

Programul 2

```
      |  S = 0
    1 |  WRITE(108, 11)S
   11 |  FØRMAT(/18X, 'PENTRU S =', F4.0)
      |  A = 0.0000
    2 |  F = 1.26E-11*A**3*S**6 + (1.08E-2*S**2 − 3.46E4)*A + 5.43E-2*S
      |  IF(ABS(F)-700.)20, 20, 21
   20 |  WRITE(108, 12)A, F
   12 |  FØRMAT(20X, 'A =', F6.4, 10X, 'F=', F10.4)
   21 |  A = A + 0.02
      |  IF(A-1.5)15, 15, 16
   15 |  GØ TØ 2
   16 |  S = S + 5
      |  IF(S-300)18, 18, 19
   18 |  GØ TØ 1
   19 |  STØP
```

Cu ajutorul calculatorului numeric, s-a obținut soluția :

Pentru $s = 0 \sim 300$, $a = 0 \sim 0{,}02$, adică $a > 0$, ceea ce înseamnă că sistemul dat este stabil.

III. CONCLUZII

Pornind de la fenomenele fizice reale, care au loc în sistemele hidraulice de copiat de la mașinile-unelte, s-a stabilit modelul matematic, care descrie procesul de funcționare al sistemului. Deși metoda de liniarizare folosită introduce unele erori, aceasta poate fi folosită cu succes în majoritatea cazurilor de copiere întîlnite în practica curentă. Pe baza modelului matematic s-au stabilit organigramele și programele de calcul pentru calculatorul numeric. Metodica propusă prezintă o serie de avantaje importante dintre care evidențiem :

a) caracterul de generalitate al metodicii de calcul și analiză care satisface o gamă largă de cazuri întîlnite în practică ;

b) ușurință în studierea diverselor posibilități și alegerii variantei optime în faza de proiectare a sistemului de acționare ;

c) folosirea eficientă a calculatorului numeric pentru analiza performanțelor dinamice ale sistemului cu toate avantajele oferite de acesta.

Primită la redacție la 23 mai 1974.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Oprean, *Hidraulica mașinilor-unelte*, București, Editura tehnică, 1968.
2. E. Botez, *Mașini-unelte*, volumul II, București, Editura tehnică, 1972.
3. E. Lewis, *Sisteme automate hidraulice*, București, Editura tehnică, 1968.
4. A. Petrescu, *Calculatoare automate și programare*, București, Editura didactică și pedagogică, 1973.
5. J. F. Blackburn, *Fluid power control*, New York, 1960.
6. Н. С. Гамынин, Я. А. Каменир, Б. Л. Коробочкин, И. М. Крассов, В. А. Лещенко, Е. М. Хаймович, *Гидравлический следящий привод*, Издательство „Машиностроение" Москва, 1968.
7. Б. А. Лещенко, *Гидравлические следящие приводы для автоматизации станков*, Машгиз, 1962.

APLICAREA METODEI ELEMENTULUI FINIT ÎN ANALIZA STRUCTURILOR CU NELINIARITATE GEOMETRICĂ. II. REGIM DINAMIC*)

de V. GIURGIUȚIU **)

Institutul de mecanică a fluidelor și construcții aerospațiale
I.M.F.C.A., București

3. ANALIZA OSCILAȚIILOR CU AMPLITUDINE MARE ÎN STRUCTURI CU NELINIARITATE GEOMETRICĂ

3.1. Pentru început vom reaminti ecuația diferențială matriceală ce determină oscilațiile unui sistem cu multe grade de libertate, avînd elasticitate liniară:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}_{(t)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{r}}_{(t)} + \mathbf{K}\mathbf{r}_{(t)} = \mathbf{F}_{(t)}. \tag{3.1}$$

Bineînțeles că în ecuația (3.1) matricele **M**, **C**, **K** sînt invariabile, atît în timp, cît și în funcție de deformații, astfel încadrîndu-ne în ipoteza micilor perturbații. Rezolvarea ecuației (3.1) se va face prin metodele cunoscute[11], ce constau în aflarea valorilor proprii și apoi a funcției $\mathbf{r}(t)$.

Să considerăm acum cazul cînd amplitudinea oscilațiilor devine mare. În acest caz, cum s-a văzut în capitolul precedent, răspunsul elastic al structurii nu va mai fi liniar, ci o funcție de amplitudinea deformației, după cum se poate vedea în figura 3.1 în care s-a trasat o curbă scalară reprezentativă [12]. Ecuația (3.1) se va modifica, căci matricele de rigiditate, de masă și de amortizare devin acum funcții de deformație și deci de timp:

$$\mathbf{M}_{(r)}\mathbf{r}_{(t)} + \mathbf{C}_{(r)}\mathbf{r}_{(t)} + \mathbf{K}_{(r)}\mathbf{r}_{(t)} = \mathbf{F}_{(t)}. \tag{3.2}$$

Ecuația (3.2) nu va mai putea fi acum rezolvată prin metodele obișnuite cu aflarea valorilor proprii, căci acestea nu ar mai avea sens într-un sistem diferențial cu coeficienți variabili.

---

*) Bibliografia este aceea de la partea I.

**) Doctorand la Aeronautics Department, Imperial College for Science and Technology, Londra.

[11]) Vezi, de exemplu, Bishop & al, ref. 17, cap. 9, pag, 323–366.

[12]) De notat că fig. 3.1 are coordonatele inversate față de fig. 2.1.

Această dificultate poate fi depășită pe calea integrării pas-cu-pas în timp [13]. Să presupunem ca după $n-1$ intervale de timp ne aflăm în punctul A (fig. 3.1) și ne propunem ca printr-un pas incremental liniarizat să ajungem în punctul B; relația (3.1) va genera :

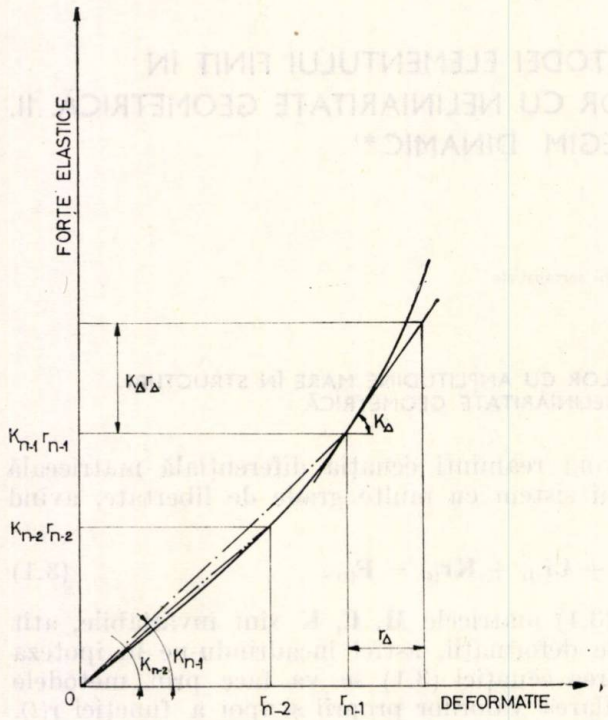


Fig. 3.1. — Curba tipică a forțelor elastice neliniare într-o structură cu rigidizare progresivă în funcție de deformație.

$$\mathbf{M}_{n-1}\ddot{\mathbf{r}}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-1}\mathbf{r}_{n-1} + \mathbf{K}_{n-1}\mathbf{r}_{n-1} = \mathbf{F}_{n-1}, \tag{3.3}$$

iar la sfîrșitul pasului incremental, pentru echilibru în punctul B, vom avea :

$$\mathbf{M}_n\ddot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{C}_n\dot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{K}_n\mathbf{r}_n = \mathbf{F}_n. \tag{3.4}$$

Relația (3.4) este echivalentă cu

$$\mathbf{M}_{n-1}\ddot{\mathbf{r}}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-1}\dot{\mathbf{r}}_{n-1} + \mathbf{K}_{n-1}\mathbf{r}_{n-1} + (\mathbf{K}_\Delta)_{n-1}(\mathbf{r}_\Delta)_{n-1} = \mathbf{F}_n, \tag{3.5}$$

unde matricea $\mathbf{K}_\Delta$ se poate calcula ca atare în modul indicat în capitolul 2, iar produsul matriceal $\mathbf{K}_n\mathbf{r}_n$ reprezintă forțele elastice din sistem la momentul n, matricea $\mathbf{K}_n$ fiind de fapt fictivă.

Expresia (3.4) va sta la baza stabilirii unei relații de recurență care să ne permită integrarea ecuației (3.2) prin metoda pas-cu-pas. Pentru

[13] Vezi, de exemplu, Chan & al., ref. 9.

efectuarea unei integrări numerice este necesar să exprimăm variabilele necunoscute $\ddot{\mathbf{r}}_n$, $\dot{\mathbf{r}}_n$, $\mathbf{r}_n$ în funcție de valorile precedente. Aceasta se poate realiza fie prin metoda elementului finit în timp, [14] fie prin metoda diferențelor finite [15]. În analiza de față s-a adoptat o variantă simplă a metodei diferențelor finite, bazată pe cunoașterea valorilor la două intervale precedente, asumînd o accelerație medie constantă pe interval [16]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_n &= \mathbf{r}_{n-1} + \frac{h}{2}(\ddot{\mathbf{r}}_n + \ddot{\mathbf{r}}_{n-1}), \\ \mathbf{r}_n &= \mathbf{r}_{n-1} + h\dot{\mathbf{r}}_{n-1} + \frac{h^2}{4}(\ddot{\mathbf{r}}_n + \ddot{\mathbf{r}}_{n-1}), \end{aligned} \tag{3.6}$$

unde h este intervalul de timp.

Scriind apoi relația (3.3) pentru pozițiile $n-1$ și $n-2$, iar ecuația (3.4) pentru n, avem

$$\begin{aligned} &\mathbf{M}_n\mathbf{r}_n + \mathbf{C}_n\dot{\mathbf{r}}_n + \mathbf{K}_{n-1}\mathbf{r}_{n-1} + (\mathbf{K}_\Delta)_{n-1}(\mathbf{r}_\Delta)_{n-1} = \mathbf{F}_n, \\ &\mathbf{M}_{n-1}\ddot{\mathbf{r}}_{n-1} + \mathbf{C}_{n-1}\dot{\mathbf{r}}_{n-1} + \mathbf{K}_{n-1}\mathbf{r}_{n-1} = F_{n-1}, \\ &\mathbf{M}_{n-2}\ddot{\mathbf{r}}_{n-2} + \mathbf{C}_{n-2}\mathbf{r}_{n-2} + \mathbf{K}_{n-2}\mathbf{r}_{n-2} = F_{n-2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Iar expresiile în diferențe finite derivate din (3.6) vor fi

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_n &= \mathbf{r}_{n-1} + \frac{h}{2}(\ddot{\mathbf{r}}_n + \ddot{\mathbf{r}}_{n-1}), \\ (\mathbf{r}_\Delta)_{n-1} &= h\dot{\mathbf{r}}_{n-1} + \frac{h^2}{4}(\ddot{\mathbf{r}}_n + \ddot{\mathbf{r}}_{n-1}), \\ \dot{\mathbf{r}}_{n-1} &= \dot{\mathbf{r}}_{n-2} + \frac{h}{2}(\dot{\mathbf{r}}_{n-1} + \ddot{\mathbf{r}}_{n-2}), \\ \mathbf{r}_{n-1} &= \mathbf{r}_{n-2} + h\mathbf{r}_{n-2} + \frac{h^2}{4}(\mathbf{r}_{n-1} + \mathbf{r}_{n-2}). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Sistemul (3.7) si (3.8) are 7 ecuații cu 9 necunoscute, și anume 3 deplasări, 3 viteze și 3 accelerații. Prin eliminare, vom obține o ecuație (expresie de recurență) între cele 3 deplasări $(\mathbf{r}_\Delta)_{n-1}$, $\mathbf{r}_{n-1}$ și $\mathbf{r}_{n-2}$:

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{M}_{n-2} + \frac{h}{2}\mathbf{C}_{n-1} + \frac{h^2}{4}(\mathbf{K}_\Delta)_{n-1}\right](\mathbf{r}_\Delta)_{n-1} = &\left[\mathbf{M}_{n-1} - \frac{h}{2}\mathbf{C}_{n-1} - \right. \\ &\left. - \frac{3h^2}{4}\mathbf{K}_{n-1}\right]\mathbf{r}_{n-1} - \left[\mathbf{M}_{n-2} - \frac{h}{2}\mathbf{C}_{n-2} + \frac{h^2}{4}\mathbf{K}_{n-2}\right]\mathbf{r}_{n-2} + \\ &+ \frac{h^2}{4}(\mathbf{F}_n + 2\mathbf{F}_{n-1} + \mathbf{F}_{n-2}). \end{aligned} \tag{3.9}$$

---

[14]) vezi Argyris în ref. 4.
[15]) vezi Chan & al. în ref. 9.

Ecuația (3.9) se poate folosi pentru a afla deplasarea incrementală $(\mathbf{r}_\Delta)_{n-1}$ dacă se cunosc deplasările $\mathbf{r}_{n-1}$ și $\mathbf{r}_{n-2}$.

Dar, de obicei, în cazul problemelor cu valori inițiale, se vor cunoaște doar valorile la timpul $t = 0$, și anume $\mathbf{r}_0$ si $\dot{\mathbf{r}}_0$. De aceea este necesar să se deriveze o ecuație „starter". Aceasta se poate obține în mod asemănător cu cel de mai sus, și anume scriind ecuațiile (3.3), (3.4) și (3.6) pentru timpii $t_0 = 0$ și $t_1 = h$. Se va obține

$$\left[\mathbf{M}_0 + \frac{h}{2}\mathbf{C}_0 + \frac{h^2}{4}(\mathbf{K}_\Delta)_0\right](\mathbf{r}_\Delta)_0 = -\frac{h^2}{2}\mathbf{K}_0\mathbf{r}_0 + h\mathbf{M}_0\dot{\mathbf{r}}_0 + \frac{h^2}{4}(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_0). \tag{3.10}$$

Ecuația (3.10) se va folosi în primul interval pentru a se obține $(\mathbf{r}_\Delta)_0$ și deci $\mathbf{r}_1$, după care se va folosi ecuația (3.9) pentru intervalele de timp următoare. Prin determinarea succesivă a valorilor lui $\mathbf{r}_n$ se poate trasa curba de variație în timp a deplasărilor, după care se va putea estima frecvența de oscilație [16].

3.2. Pentru exemplificarea metodei s-a considerat din nou o structură din clasa bară-grindă, în speță o bară încastrată la un capăt. Efectul amortizării a fost neglijat. Sistemului i s-a imprimat o viteză inițială $\dot{\mathbf{r}}_0$, din poziția neutră $\mathbf{r}_0 = 0$. În acest caz relațiile de recurență iau forma :

$$\left[\mathbf{M}_0 + \frac{h^2}{4}(\mathbf{K}_\Delta)_0\right]\mathbf{r}_{\Delta_0} = h\mathbf{M}\dot{\mathbf{r}}_0 \qquad \text{(starter)},$$

$$\left[\mathbf{M}_{n-1} + \frac{h^2}{4}(\mathbf{K}_\Delta)_{n-1}\right](\mathbf{r}_\Delta)_{n-1} = \left(\mathbf{M}_{n-1} - \frac{3}{4}h^2\mathbf{K}_{n-1}\right)\mathbf{r}_{n-1} -$$

$$-\left(\mathbf{M}_{n-2} + \frac{h^2}{4}\mathbf{K}_{n-2}\right)\mathbf{r}_{n-2}. \tag{3.11}$$

Detaliile analizei pe calculator sînt prezentate în anexa 2. S-au considerat două cazuri extreme, odată o bară fără greutate cu o masă concentrată la capăt, apoi o bară similară cu aceeași masă uniform distribuită. Programul permite, de asemenea, analiza oricărei combinații între cele două extreme de mai sus, fie și cu un număr variabil de mase concentrate (fig. 3.2).

În figura 3.3. s-a trasat variația frecvenței cu amplitudinea pentru bara cu masă concentrată, iar în figura 3.4 pentru cea cu masă distribuită. Se observă că o creștere semnificativă a frecvenței are loc tocmai pentru amplitudini mai mari de $0.5L$[17]. În figura 3.6 s-a prezentat calitativ cunoscuta curbă a amplificării pentru sisteme neliniare, care prezintă o variație a frecvenței de rezonanță cu amplitudinea (linia curbă AB), tocmai de tipul variațiilor prezentate în figurile 3.3 și 3.4.

---

[16] Deși oscilațiile nu vor mai fi armonice, ele vor prezenta totuși un caracter periodic.

[17] Ceea ce alți autori, de exemplu Verma & Murty în ref. 13, nu au scos în evidență.

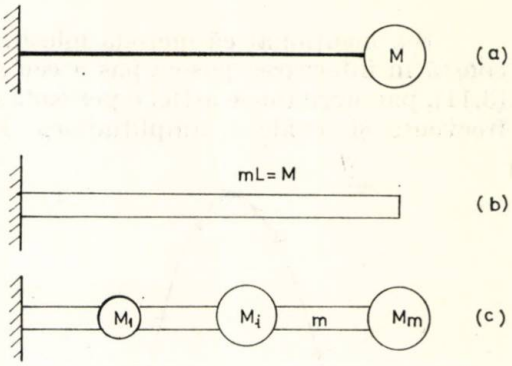


Fig. 3.2. — Structuri dinamice de tip bară-grindă: (*a*) cu masa concentrată, (*b*) cu masa distribuită, (*c*) mixte.

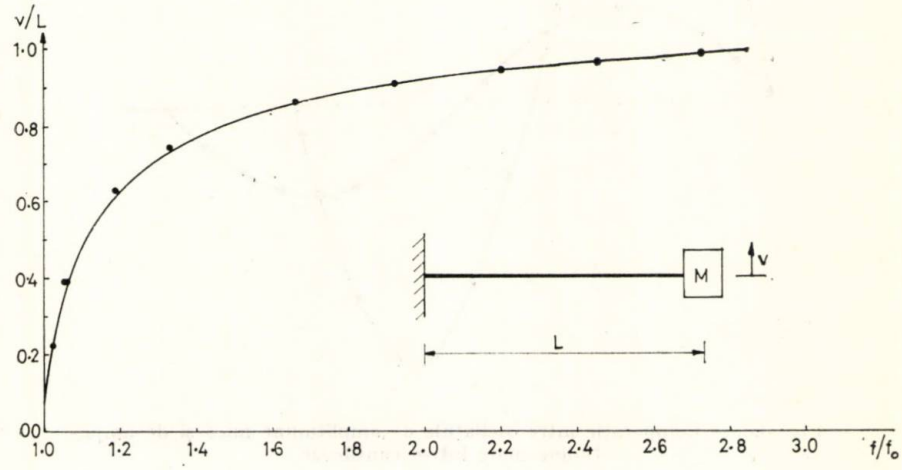


Fig. 3.3. — Curba creşterii frecvenţei proprii de oscilaţie cu mărimea amplitudinii, pentru cantilever cu masa concentrată.

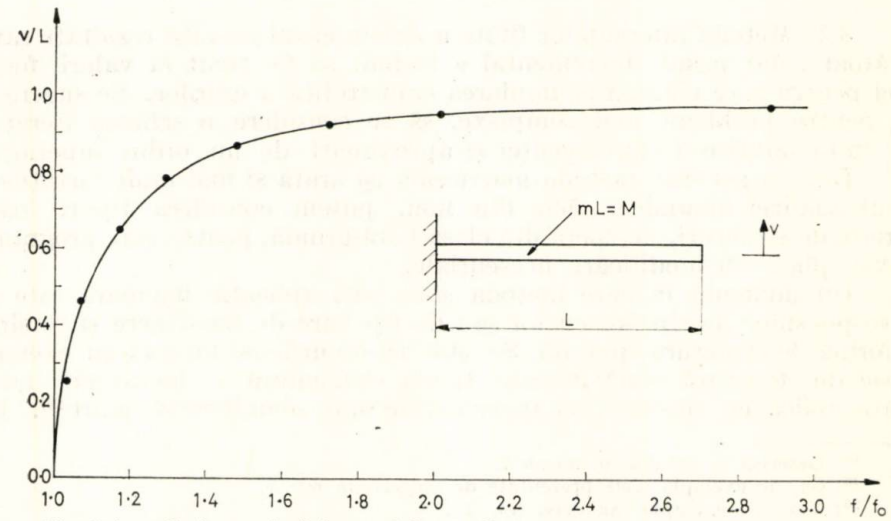


Fig. 3.4. — Curba creşterii frecvenţei proprii de oscilaţie cu mărimea amplitudinii pentru cantilever cu masa distribuită.

S-a menționat că metoda folosită pentru determinarea frecvenței [18] constă în integrarea pas-cu-pas a ecuației (3.2) cu formulele de recurență (3.11), parcurgîndu-se astfel o perioadă de oscilație, de unde se poate evalua frecvența și, evident, amplitudinea. Două astfel de curbe pentru două

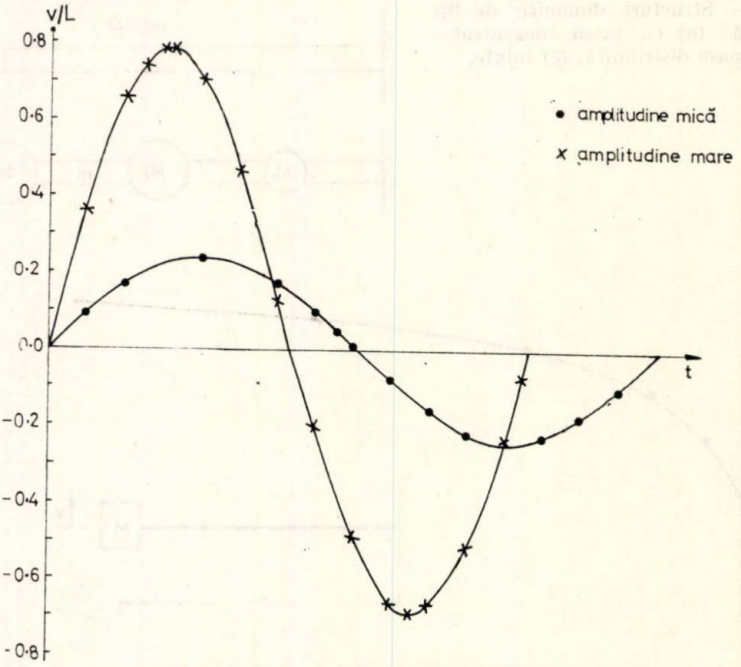


Fig. 3.5. — Comparație între oscilațiile de amplitudine mică și de amplitudine mare într-o cantilever.

amplitudini diferite sînt prezentate suprapus în figura 3.5, punîndu-se astfel în evidență efectul menționat.

3.3. Metoda diferențelor finite a dat în cazul de față rezultate satisfăcătoare, dar pasul incremental a trebuit să fie ținut la valori foarte mici pentru a se elimina acumularea catastrofică a erorilor. Se sugerează ca, pentru probleme mai complexe, să se considere o schemă iterativă de îmbunătățire a convergenței și aproximări de un ordin superior. [19]

Dar în general, metoda matriceală își arată și mai mult virtuțile în cazul analizei dinamice, căci, din nou, putem considera tipuri foarte variate de structuri, în speță din clasa bară-grindă, pentru care programul se va aplica cu modificări neesențiale.

Un domeniu în care metoda și-ar găsi aplicație imediată este cel al suspensiilor de tip arc cu foi sau de tip bare de încovoiere și torsiune în formă de structură spațială. Se știe că arcurile cu foi sînt un exemplu clasic de structură reală în care teoria elementară a încovoierii nu se poate aplica cu succes, căci deformațiile sînt semnificativ mari [20]. De-

[18] Descrisă în detaliu în anexa 2.
[19] Ca, de exemplu, cele prezentate de Argyris în ref. 4.
[20] Vezi, de exemplu, Sanders, ref. 15.

sigur că s-au elaborat metode analitice de calcul, dar metoda elementului finit are imensul avantaj al flexibilității de aplicare la structuri de forme diferite făcînd parte din aceeași clasă de element finit.

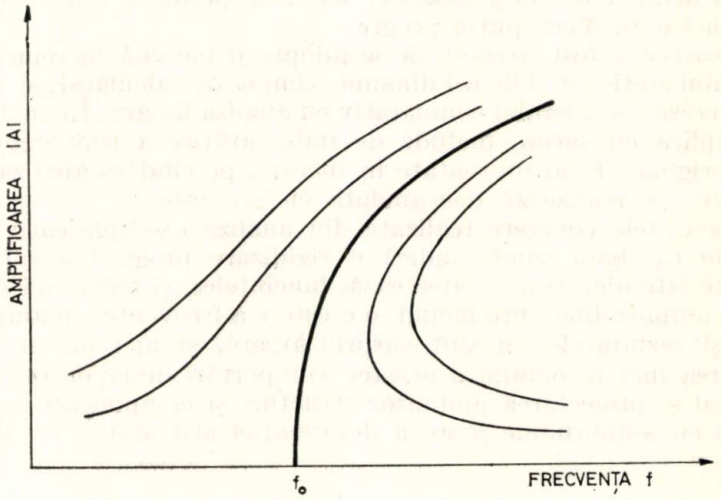


Fig. 3.6. — Curba reprezentativă a răspunsului unei structuri neliniare la excitație cu forță armonică.

Recent, mai ales în construcția de automobile [21], se găsesc în considerație tipuri noi de suspensii, construite astfel încît să îmbine proprietățile de elasticitate cu cele de compactitate, și tocmai în analiza structurilor de acest fel (fig. 3.7) metoda prezentată își poate găsi o aplicație largă.

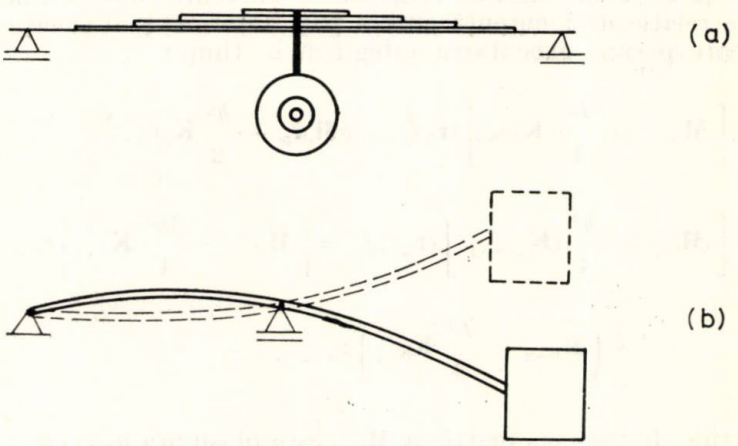


Fig. 3.7. — Tipuri de suspensii cu efect neliniar pronunțat: (*a*) soluția clasică, (*b*) soluția modernă.

[21]) Vezi, de exemplu, Benson, ref. 16.

4. CONCLUZII

S-a prezentat felul în care metoda elementului finit este extinsă în domeniul neliniar de tip geometric, astfel acoperind o arie în care metodele analitice au făcut puțin progres.

Deoarece a fost necesar să se adopte o metodă incrementală, atît în domeniul static cît și în cel dinamic, timpul de calculator, și deci costul analizei, cresc considerabil comparativ cu analiza liniară. În analiza statică se pot aplica cu succes metode de îmbunătățire a convergenței, două metode originale fiind prezentate în lucrare, pe cînd în analiza dinamică acest lucru se realizează deocamdată cu greutate.

Rezultatele concrete realizate din analiza exemplificativă a structurilor de tip bară-grindă indică o rigidizare progresivă sub acțiunea unor forțe laterale, ceea ce afectează, bineînțeles, și frecvență de oscilații de mare amplitudine, producînd o creștere a frecvenței cu amplitudinea.

Deși rezultatele nu sînt surprinzătoare, și nici măcar prioritare, cunoașterea mai în detaliu a acestei comportări deschide orizonturi noi în calculul și proiectarea anumitor structuri și componente ce cunosc o solicitare cu amplitudine mare a deformației atît static, cît și dinamic.

ANEXA 2

CALCULUL OSCILAȚIILOR DE AMPLITUDINE MARE ALE UNEI STRUCTURI DE TIP BARĂ-GRINDĂ CU NELINIARITATE GEOMETRICĂ

A.2.1. Așa cum s-a arătat în capitolul 3, calculul oscilațiilor structurilor neliniare se reduce la integrarea incrementală în timp a unei ecuații de tipul (3.2). Prin folosirea schemei cu diferențe finite arătată (3.6) se obține o relație de recurență cu doi pași anteriori și o ecuație „starter" (3.11) care permit executarea integrării in timp :

$$\left[\mathbf{M}_0 + \frac{h^2}{4}(\mathbf{K}_\Delta)_0\right](\mathbf{r}_\Delta)_0 = h\mathbf{M}_0\dot{\mathbf{r}}_0 - \frac{h^2}{2}\mathbf{K}_0\mathbf{r}_0, \tag{A.17}$$

$$\left[\mathbf{M}_{n-1} + \frac{h^2}{4}(\mathbf{K}_\Delta)_{n-1}\right](\mathbf{r}_\Delta)_{n-1} = \left[\mathbf{M}_{n-1} - \frac{3h^2}{4}\mathbf{K}_{n-1}\right]\mathbf{r}_{n-1} -$$

$$-\left(\mathbf{M}_{n-2} - \frac{h^2}{4}\mathbf{K}_{n-2}\right)\mathbf{r}_{n-2}. \tag{A.18}$$

În ecuațiile de mai sus matricea $\mathbf{M}_{n-1}$ este obișnuita matrice compatibilă de masă [22] transformată conform stării curente de deformație a structurii,

[22]) Vezi Przemiencki, ref. 5, pag. 295.

$(\mathbf{K}_\Delta)_{n-1}$ este matricea incrementală de rigiditate[23], iar $(\mathbf{K}_{n-1}\,\mathbf{r}_{n-1})$ și $(\mathbf{K}_{n-2}\,\mathbf{r}_{n-2})$ reprezintă forțele elastice din structură în stările de deformație indicate

$$\mathbf{m} = \rho AL \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{156}{420} + \frac{6}{5}\frac{I}{AL^2} & & & & & & & & & & \\ 0 & \frac{22L}{420} + \frac{1}{10}\frac{I}{AL} & \frac{4L^2}{420} + \frac{2}{15}\frac{I}{A} & & & & & & & & & \\ \frac{1}{6} & 0 & & & 0 & & \frac{1}{3} & & & & & \\ 0 & \frac{54}{420} - \frac{6}{5}\frac{I}{AL^2} & \frac{13L}{420} - \frac{1}{10}\frac{I}{AL} & & 0 & \frac{156}{420} + \frac{6}{5}\frac{I}{AL^2} & & & & & & \\ 0 & \frac{-13L}{420} + \frac{1}{10}\frac{I}{AL} & -\frac{3L^2}{420} - \frac{1}{30}\frac{I}{A} & & 0 & -\frac{22L}{420} - \frac{1}{10}\frac{I}{A} & \frac{4L^2}{420} + \frac{2}{15}\frac{I}{A} & & & & & \end{bmatrix} \tag{A.19}$$

În cadrul analizei dinamice nu s-au aplicat metodele de îmbunătățire a convergenței indicate anterior (anexa 1) și de aceea pașii incrementali în timp au fost în mod necesar foarte mici [24].

Pentru aflarea forțelor elastice $\mathbf{K}_n\mathbf{r}_n$ se folosește un proces cumulativ :

$$\mathbf{K}_n\mathbf{r}_n = \mathbf{K}_{n-1}\mathbf{r}_{n-1} + (\mathbf{K}_\Delta)_{n-1}(\mathbf{r}_\Delta)_{n-1}. \tag{A.20}$$

Pentru aflarea matricei de rigiditate geometrică este ncesar să se cunoască eforturile interioare $\mathbf{P}_N$ la începutul fiecărui pas. Metoda clasică a deformațiilor ar determina aceste eforturi din prelucrarea vectorului deplasărilor $\mathbf{r}_\Delta$ [25]; în lucrarea de față, ținîndu-se seama de experiența cîștigată în analiza statică, s-a ales o cale mixtă de analiză, în care eforturile $\mathbf{P}_N$ s-au determinat, pe considerente de echilibru dinamic, din valoarea accelerației determinată conform relațiilor de recurență :

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{r}}_n &= \frac{2}{h^2}(\mathbf{r}_\Delta)_n - \dot{\mathbf{r}}_{n-1}, \\ \dot{\mathbf{r}}_n &= \frac{2}{h}(\mathbf{r}_\Delta)_n - \dot{\mathbf{r}}_{n-1}, \end{aligned} \tag{A.21}$$

[23] Vezi cap. 2 și anexa 1.

[24] $h = \frac{1}{50} - \frac{1}{500}$ din perioada sistemului liniar echivalent.

[25] Vezi ecuațiile (A.15) și (A.16)

deci

$$(\mathbf{R}_{\text{inerție}})_n = -\mathbf{M}\mathbf{r}_n \tag{A.22}$$

și

$$\mathbf{P}_N = \mathbf{b}\,\mathbf{P}_{\text{inerție}}. \tag{A.23}$$

Schema logică a programului de calculator este prezentată în figura A.2.

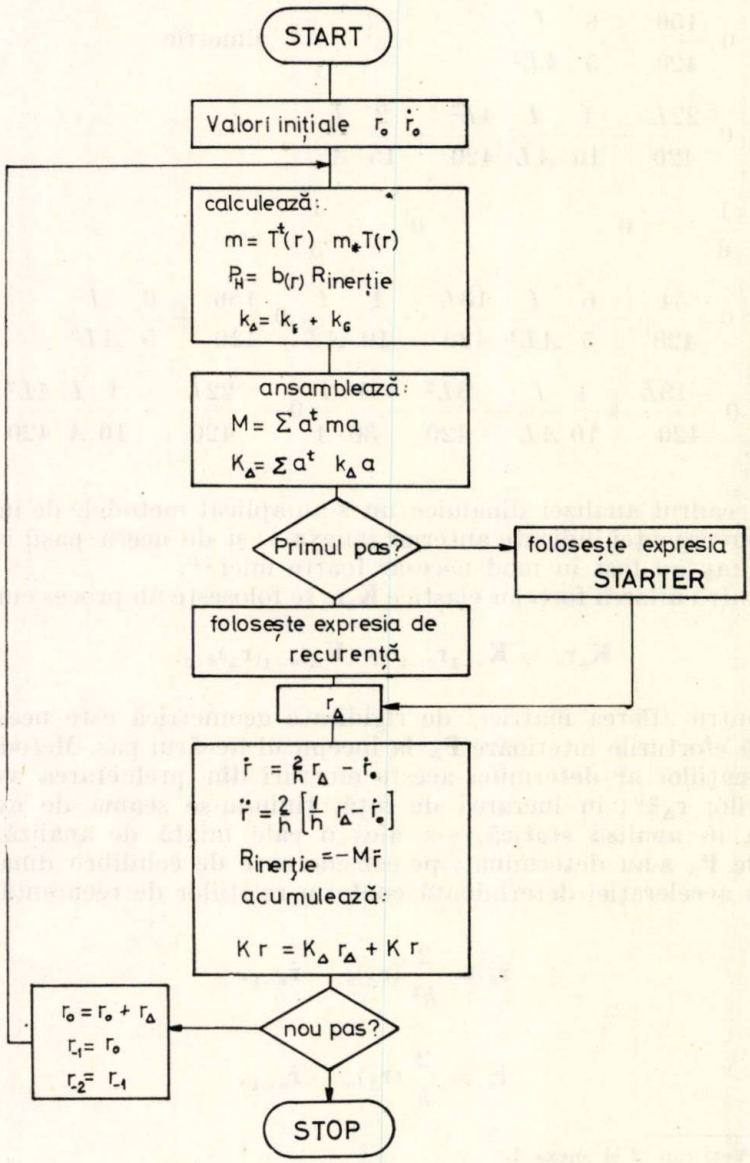


Fig. A.2. — Schema logică a programului de calcul a oscilațiilor neliniare.

Primită la redacție la 24 iulie 1974

RECENZII

H. NEUBNER, *Technische Mechanik*, Dritter Teil : Kinetik, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974

Cartea reprezintă al treilea volum al cursului de mecanică destinat studenților din universitățile tehnice ; în primul volum se prezintă elementele de statică, iar în al doilea, problemele clasice de rezistența materialelor.

După o introducere în cinematica punctului, se prezintă elementele esențiale ale dinamicii punctului material, sistemelor de puncte și ale dinamicii solidului rigid ; se tratează, de asemenea, vibrațiile sistemelor cu masă continuă, cu aplicații la bare.

Sînt de remarcat conciziunea și sistematizarea expunerii și, mai ales, aplicațiile interesante ce însoțesc fiecare capitol.

Redactată într-un stil științific convingător, lucrarea se adresează studenților și corpului didactic din învățămîntul superior, specialiștilor din industrie și tehnică, celor din institutele de studii și cercetări mecanice, precum și tuturor celor care vor să fie mereu la curent cu problemele de mecanică.

M. M. Nițâ

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 35, nr. 2 — Aprilie—iunie 1976

SUMAR

STUDII

E. CARAFOLI, M. NEAMŢU, Aerodinamica aripilor cu jeturi laterale înclinate 161

C. TEODORESCU-ŢINTEA, Consideraţii teoretice asupra evoluţiei izentropice a unui gaz printr-o conductă cu secţiune variabilă 179

VALERIU PANAITESCU, Asupra stabilităţii curgerii plane Poiseuille 187

V. GHEORGHIU, Funcţii de rugozitate pentru sistematizarea calculului rezistenţei hidraulice a conductelor tehnice 207

D. ARSENIE, Unele rezultate noi obţinute prin utilizarea funcţiei Liapunov în studiul castelului de echilibru simplu 221

M. M. NIŢĂ, GH. DRĂGĂNOIU, Deplasarea relativă a centrului de masă al avionului echipat cu motoare aeroreactoare 235

GELU ONU, Modele rectangulare pentru starea plană de eforturi 243

N. POSEA, C. MANEA, Analiza stării de eforturi a toartei capului hidraulic 265

ALEX. VAICUM, ION VASILE, IOAN GHEORGON, Capacitatea portantă a masivelor de pământ solicitate de grupe de fundaţii 289

VETURIA RASZILLIER, M. VLĂDESCU, Unele rezultate privind comportarea atenuării şi vitezei undelor Rayleigh pe suprafaţa rugoasă a unui oţel nealiat 299

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

TOMA PANĂ, Teoria liniar-elastică a mecanicii ruperilor. II 305

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

AERODINAMICA ARIPILOR CU JETURI LATERALE ÎNCLINATE

de E. CARAFOLI şi M. NEAMŢU

Institutul de mecanică a fluidelor şi construcţii aerospaţiale

În lucrare este expusă într-o formă nouă teoria pînzelor de jeturi laterale, precum şi o metodă de calcul a distribuţiei de portanţă şi a caracteristicilor aerodinamice ale sistemelor aripă-jeturi laterale înclinate. Este evidenţiat faptul că în afară de efectul de hipersustentaţie propriu-zis, se recuperează componenta verticală a impulsului jeturilor sub forma unei sustentaţii reactive, ceea ce îmbunătăţeşte randamentul procedeului. În ultima parte a lucrării sînt prezentate sub forma unor diagrame o serie de rezultate teoretice mai semnificative.

1. CONSIDERAŢII INTRODUCTIVE

Fenomenele de hipersustentaţie produse de pînzele de jeturi fluide emise de la extremităţile laterale ale aripilor dreptunghiulare în direcţia anvergurii au constituit obiectul unor cercetări sistematice începînd cu lucrarea [1] a lui Elie Carafoli, prezentată la Congresul Internaţional de ştiinţe Aeronautice, Stockholm, şi cu lucrarea [2] a lui N. Cămărăşescu.

O serie de studii experimentale [3], [5] au contribuit la elucidarea fenomenului, punînd în evidenţă o importantă creştere a portanţei.

Apoi, prin lucrarea [4] s-au adăugat noi dezvoltări teoretice asupra acestei probleme.

De asemenea, pe diverse căi s-au elaborat mai multe lucrări pe aceeaşi temă, sintetizate în [11].

În lucrarea de faţă sînt studiate fenomenele similare care se produc sub influenţa jeturilor laterale înclinate cu un anumit unghi φ_0 în raport cu orizontala (fig. 1). În acest caz, în afara efectului de hipersustentaţie produs prin modificarea cîmpului de curgere de către jeturi, componenta verticală a impulsului acestora este recuperată.

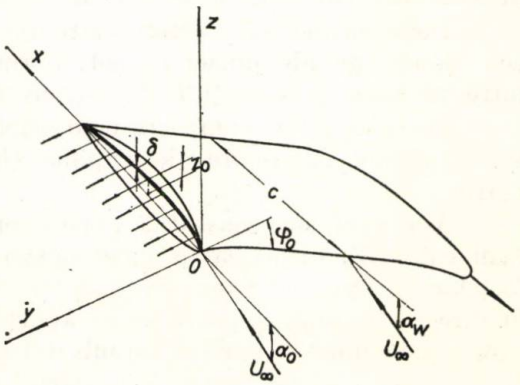


Fig. 1

Fixîndu-ne atenția asupra unuia din jeturi, acesta este emis printr-o fantă de grosime constantă δ și de coardă c (presupusă egală cu cea a aripii), avînd scheletul definit prin ecuația sa în planul xOz

$$Z_0 = Z_0(x). \tag{1}$$

Fie V_j și U_∞ viteza jetului la ieșirea din fantă și, respectiv, aceea a curentului de la infinit, iar ρ_j și ρ_∞ densitățile corespunzătoare. Se face ipoteza că impulsul total al jetului J, se distribuie uniform în lungul fantei, astfel încît intensitatea impulsului pe unitatea de lungime este egală cu

$$I = J/c = \rho_j V_j^2 \delta. \tag{2}$$

În continuare vom defini un coeficient adimensional C_j, prin relația

$$C_j = \frac{J}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 c^2} = 2\frac{\delta}{c}\frac{\rho_j V_j^2}{\rho_\infty U_\infty^2}. \tag{3}$$

În general, mișcarea care ia naștere în jurul pînzei de jet este deosebit de complexă. În cele ce urmează ne vom limita la cazul cînd viteza de ieșire prin fantă este mult mai mare decît cea a curentului de la infinit ($V_j \gg U_\infty$). În acest caz, așa cum rezultă din observațiile experimentale [2], [3], pe o porțiune apreciabilă, pornind de la fantă, pînza de jet conservă o formă geometrică precisă. Sub acțiunea curentului ea se deformează progresiv, curbîndu-se și torsionîndu-se, dar fără a fi antrenată în aval decît mai tîrziu la o anumită distanță de fantă.

Deformațiile sînt determinate de presiunile care se creează între cele două fețe ale pînzei de jet. Forma pînzei corespunde echilibrului între presiuni și variațiile de impuls rezultate prin deformare.

Pînza de jet se comportă ca o aripă fluidă și poate fi tratată cu ajutorul teoriilor cunoscute ale aripilor, ținînd bineînțeles seama de deformații.

Așa cum s-a constatat experimental, prin măsurători directe cu firul cald [5], mișcarea în jurul pînzei de jet este potențială. Acțiunea forțelor de frecare se manifestă în principal printr-o puternică antrenare în direcția jetului, a particulelor aparținînd curentului exterior, ceea ce corespunde unei disipări a impulsului pînzei de jet în direcția normalei la suprafața sa, respectiv „îngroșării" sale. Totuși, se observă că acest proces este localizat într-o regiune limitată care „îmbracă" pînza de jet și care reprezintă în fond, un strat-limită liber tridimensional turbulent.

Din cauza antrenării produse de forțele de frecare vîscoase și turbulente, se produce un efect de „succiune" la suprafața pînzei ceea ce face ca mișcarea exterioară să rămînă atașată de pînza de jet (fig. 2*a*).

Acest fenomen are loc chiar și în cazul cînd, ca urmare a deformațiilor, se obțin configurații și incidențe la care, pe un obstacol solid de aceeași formă, s-ar produce desprinderea curentului (fig. 2*b*).

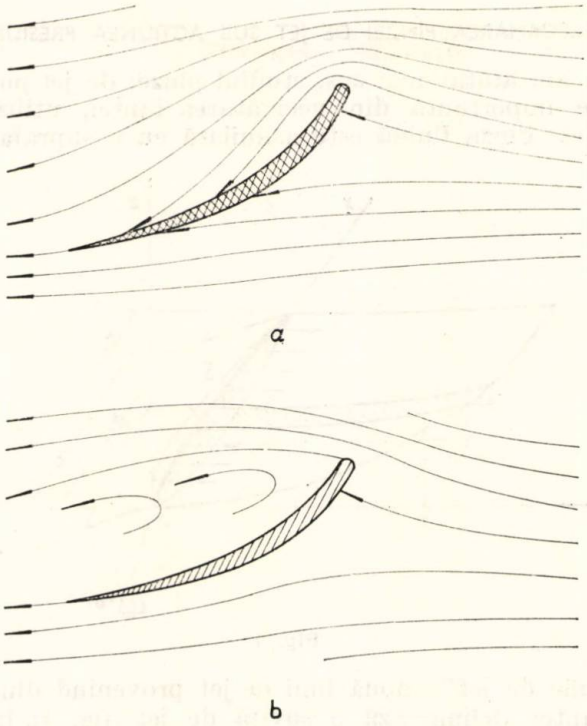


Fig. 2

Acest fapt a fost confirmat experimental și prin vizualizările efectuate de H. Werlé și M. Gallon [6].

Pînza de jet poate fi descompusă în jeturi elementare independente, în lungul cărora impulsul se conservă în mărime, schimbîndu-și doar direcția. Un jet elementar poate fi asimilat cu o șuviță fără grosime, înzestrată cu impuls și care se deformează sub acțiunea presiunilor.

La o anumită distanță de la fantă deformațiile ating valori atît de mari încît nu se mai poate menține geometria precisă din prima regiune și curgerea devine haotică. Pînza de jet este torsionată puternic și aruncată în aval sub forma unui cornet de vîrtejuri [1], [2], [3] la extremitatea aripii fluide (fig. 3).

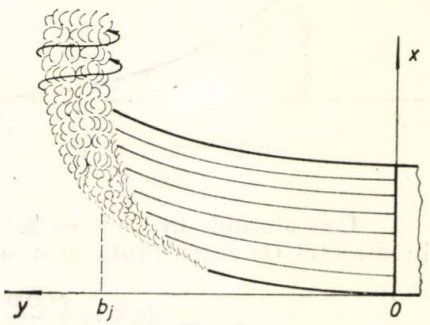


Fig. 3

Cu toate că pentru această regiune nu se poate da o descriere exactă a curgerii, se poate totuși considera că fenomenele sînt asemănătoare, într-o

oarecare măsură, cu cele care au loc la extremitatea unei aripi solide, unde se produce de asemenea un nucleu de vîrtejuri orientat în aval, paralel cu viteza U_∞.

2. DEFORMAREA PÎNZEI DE JET SUB ACȚIUNEA PRESIUNILOR

Așa cum am arătat mai sus, studiul pînzei de jet poate fi efectuat pe o porțiune importantă din vecinătatea fantei, utilizînd conceptul „șuviței" de jet. Pînza fluidă este asimilată cu o suprafață subțire formată din „liniile de jet"; două linii de jet provenind din punctele x și $x + \mathrm{d}_x$ ale fantei delimitează o șuviță de jet (fig. 4), în lungul căreia intensitatea impulsului elementar se conservă ca mărime.

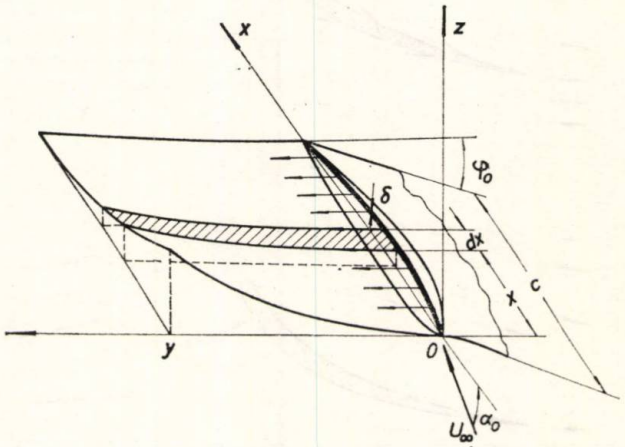


Fig. 4

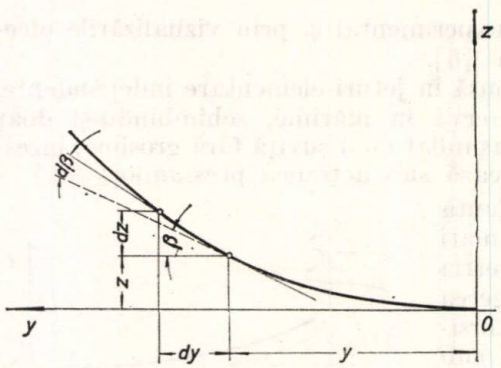


Fig. 5

Se poate considera că diferențele de presiune care acționează asupra pînzei de jet au o direcție medie care nu diferă de aceea a rezultantei aerodinamice pe întreaga pînză. Cu toate că direcția acestei rezultante nu este exact în planul $2Oy$ se poate admite totuși că ea nu este prea înclinată în raport cu acest plan. Ca urmare, vom considera că șuvițele se deformează urmînd linii cvasiplane, paralele cu planul zOy.

Considerînd un fileu elementar (fig. 5) și aplicînd teorema impulsului în direcția Oz între fantă și o secțiune oarecare y, se obține

$$\sin\beta = \int_0^y \frac{\Delta p}{I}\,\mathrm{d}y' = \frac{1}{cC_j}\int_0^y \Delta C_p\,\mathrm{d}y', \tag{4}$$

unde β este unghiul pe care şuviţa îl face cu axa Oy în secţiunea y, iar

$$\Delta C_p = \frac{\Delta p}{\frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2}. \tag{5}$$

Ca urmare, din relaţia (4) rezultă direct ecuaţia liniei de jet deformate

$$Z = Z_0 + \int_0^y \operatorname{tg}\beta dy' = z_0 + \frac{1}{cC_j}\int_0^y \frac{\int_0^{y'} \Delta C_p \, dy''}{\cos\beta} dy'. \tag{6}$$

Pe cea mai mare parte a pînzei fluide deformaţiile sînt mici şi putem considera $\cos\beta \cong 1$, ceea ce conduce la o expresie simplificată pentru z

$$Z = Z_0 + \frac{1}{cC_j}\int_0^y dy' \int_0^{y'} \Delta C_p \, dy''. \tag{7}$$

Această din urmă relaţie nu este, bineînţeles, valabilă în zona extremităţii pînzei de jet, dar acolo, aşa cum am arătat, fenomenele sînt haotice astfel încît relaţia exactă nu este, totuşi, mai bună pentru descrierea acestor fenomene decît cea aproximativă.

Deformaţiile diferă de la o linie de jet la alta ceea ce conduce la torsionarea pînzei de jet şi la variaţia incidenţei în lungul corzii şi anvergurii (incidenţă luată în raport cu curentul de la infinit).

Ţinînd seama şi de înclinarea şuviţei cu unghiul β în raport cu axa Oy, incidenţa α va fi dată de relaţia

$$\alpha \cong \left(\alpha_0 - \frac{\partial z}{\partial x}\right)\cos\beta, \tag{8}$$

care, prin aplicarea relaţiei (6), devine

$$\alpha \cong \cos\beta\left(\alpha_0 - \frac{\partial z_0}{\partial x}\right) - \cos\beta \frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \frac{dy'}{\cos\beta'}\int_0^{y'} \frac{\Delta C_p}{cC_j} dy''. \tag{9}$$

În expresiile (8) şi (9) unghiul de incidenţă datorat deformării pînzei de jet este exprimat prin tangenta sa $\partial z/\partial x$, ceea ce conduce, pentru secţiunile situate la o mare distanţă de fantă la valori mai mari decît cele datorate incidenţei propriu-zise.

Vom remarca, pe de altă parte, că ultimul termen din expresia (9) poate fi simplificat

$$\cos\beta \frac{\partial}{\partial x}\int_0^y \frac{dy'}{\cos\beta'}\int_0^{y'} \frac{\Delta C_p \, dy''}{cC_j} \cong \frac{1}{cC_j}\int_0^y dy' \int_0^{y'} \frac{\partial \Delta C_p}{\partial x} dy''. \tag{10}$$

Această simplificare produce la mare distanță de fantă valori mai mici pentru α decît cele reale, tinzînd să compenseze erorile introduse prin (9). Aceasta se poate arăta ușor printr-un calcul direct făcînd ipoteza că ΔC_p nu variază sensibil în raport cu y (o asemenea ipoteză se poate face întotdeauna sub semnul dublei integrale) ceea ce permite rezolvarea integralelor din relația (10) și compararea rezultatelor.

În continuare, introducînd (10) în (9) se obține relația

$$\alpha = \left(\alpha_0 - \frac{\partial z_0}{\partial x}\right)\cos\beta - \frac{1}{cC_j}\int_0^y \mathrm{d}y' \int_0^{y'} \frac{\partial \Delta C_p}{\partial x}\,\mathrm{d}y''. \tag{11}$$

Vom remarca acum că o linearizare completă a expresiei incidenței α poate fi obținută punînd $\cos\beta \cong 1$, ceea ce este admisibil pentru o bună porțiune a fantei. Totuși, pentru o mai bună aproximare este mai convenabil să utilizăm pentru β o valoare medie $\beta_m(y)$ care ne va conduce la o cvasilinearizare, așa cum vom arăta mai tîrziu.

3. MODELUL AERODINAMIC AL PÎNZEI DE JET

Distribuția ΔC_p pe suprafața pînzei de jet va fi determinată pe baza conceptului de aripă fluidă, utilizînd teoria suprafețelor portante. Suprafața portantă este înlocuită cu un sistem de vîrtejuri legate, orientate în direcția anvergurii, a căror intensitate pe unitatea de lungime ($U_\infty \Delta C_p/2$) variază de la un punct la altul; această variație produce un sistem de vîrtejuri legate orientate în direcția corzii și care se prelungesc în aval sub forma vîrtejurilor libere.

Pentru simplificarea problemei, se va considera că vîrtejurile sînt plasate pe o suprafață cilindrică avînd generatoarea orientată în direcția curentului și ca directoare, urma aripii solide, continuată prin cele ale jeturilor. Pe porțiunea pînzei de jet directoarea poate fi definită mediind relația (7)

$$Z_m \cong \frac{1}{cC_j}\int_0^y \mathrm{d}y' \int_0^{y'} C_z\,\mathrm{d}y''; \quad \operatorname{tg}\beta_m \cong \sin\beta_m = \frac{1}{cC_j}\int_0^y C_z\,\mathrm{d}y', \tag{12}$$

$$Z_{0m} \cong 0,$$

unde indicele m se raportează la parametrii mediați, iar C_z este coeficientul de portanță al secțiunii

$$C_z = \frac{1}{c}\int_0^c \Delta C_p\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$

Condiția la limită, conform căreia componenta normală $w_n(x, y)$ a vitezei induse de sistemul de vîrtejuri produce o deviație a vitezei w_n/U_∞ egală cu incidența $\alpha(x, y)$ în fiecare punct al suprafeței portante, conduce la relația

$$\alpha(x, y) = w_n(x, y)/U_\infty. \tag{14}$$

În continuare w_n/U_∞ va fi pus sub forma

$$\frac{w_n(x, y)}{U_\infty} = i_n(y) + \alpha_{en}(x, y). \tag{15}$$

Termenul $i_n(y)$ reprezintă viteza normală indusă de vîrtejurile orientate în lungul curentului, presupunînd că toată suprafața portantă se concentrează într-o singură linie portantă care trece prin punctul considerat și care are forma directoarei definită mai sus; astfel spus, calculul lui $i_n(y)$ va fi efectuat presupunînd că toate vîrtejurile orientate în lungul curentului pornesc de la această linie portantă. Evident, $i_n(y)$ este similar cu incidența indusă din teoria liniei portante a lui Prandtl.

Termenul $\alpha_{en}(x, y)$ reprezintă incidența suplimentară produsă de viteza normală indusă de restul vîrtejurilor, adică de vîrtejurile legate orientate în lungul anvergurii, precum și de segmentele de vîrtejuri orientate în lungul curentului care au fost omise din calculul lui $i_n(y)$ datorită modului cum a fost definită această din urmă mărime. Pentru termenul $\alpha_{en}(x, y)$ se va utiliza în cele ce urmează o formulă aproximativă, satisfăcătoare în contextul acestei lucrări.

În acest sens, vom observa că pentru aripile dreptunghiulare avînd anvergura b și coarda C și a căror alungire $\Lambda = b/c$ este mare, termenul $\alpha_{en}(x, y)$ va avea aceiași expresie ca cea dată de teoria profilelor subțiri (Birnbaum-Glauert)

$$\alpha_{en}(x, y) = \frac{1}{4\pi}\int_0^c \frac{\Delta C_p}{x - x'}\,\mathrm{d}x'. \tag{16}$$

Pe măsura scăderii alungirii, această expresie introduce o serie de erori, care pot fi corectate introducînd un factor ψ, funcție de alungirea Λ și care ține seama și de experiență. În acest fel $\alpha_{en}(x, y)$ va fi reprezentat sub forma

$$\alpha_{en}(x, y) = \frac{\psi}{4\pi}\int_6^c \frac{\Delta C_p(x', y)}{x - x'}\,\mathrm{d}x'. \tag{17}$$

Expresia lui ψ va fi definită ulterior.

Introducînd (17) în (15) și ținînd seama de (14) se obține

$$\alpha(x, y) = i_n(y) + \frac{\psi}{4\pi}\int_0^c \frac{\Delta C_p(x', y)}{x - x'}\,\mathrm{d}x'. \tag{18}$$

Reunind relațiile (18) și (11) se obține ecuația diferențelor de presiune între cele două fețe ale pînzei de jet

$$\left(\alpha_0 - \frac{\partial z_0}{\partial x}\right)\cos\beta_m - \frac{1}{cC_j}\int_0^{y'}\mathrm{d}y'\int_0^{y'}\frac{\partial \Delta C_p}{\partial x}\,\mathrm{d}y'' = i_n(y) + \frac{\psi}{4\pi}\int_0^c \frac{\Delta C_p(x', y)}{x - x'}\,\mathrm{d}x'. \tag{19}$$

Așa cum se vede, pentru rezolvarea ecuației (19) trebuie să cunoaștem incidența indusă $i_n(y)$ în fiecare secțiune.

Aceasta este funcție de distribuția de circulație așa cum rezultă din ecuația (12).

Din această cauză, pentru abordarea problemei vom deduce mai întîi, pornind de la ecuația (19) o ecuație pentru circulația

$$\Gamma = \frac{U_\infty}{2} c C_z, \tag{20}$$

unde C_z este definit prin (13).

În acest sens să considerăm dezvoltarea în serie Glauert a expresiei $\psi \Delta C_p$

$$\psi \Delta C_p(x, y) = \psi \Delta C_p(\theta, y) = A_0(y) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} + \sum_1^N A_\nu(y) \sin \nu \theta, \tag{21}$$

unde θ este o nouă variabilă definită prin relația

$$\cos \theta = 1 - 2x/c, \tag{22}$$

iar $A_0(y), \ldots A_N(y)$ sînt funcții necunoscute de y, care trebuie să verifice ecuația (19) pentru cel puțin $(N + 1)$ valori particulare ale variabilei θ.

Ținînd seama de (19) și (21), ca și de relația cunoscută de la teoria profilelor subțiri (Birnbam-Glauert) și anume

$$\frac{\psi}{4\pi} \int_0^c \frac{\Delta C_p}{x - x'} \mathrm{d}x' = \frac{\psi}{4\pi} \int_0^\pi \frac{\Delta C_p \sin \theta'}{\cos \theta - \cos \theta'} \mathrm{d}\theta' = \frac{1}{4} \left(A_0 - \sum_1^N A_\nu \cos \nu \theta \right), \tag{23}$$

rezultă următorul sistem de ecuații pentru funcțiile necunoscute

$$A_1(y), \ldots, A_N(y),$$

$$i_n(y) + \frac{A_0}{4} - \frac{1}{4} \sum_{\nu=1}^N A_\nu \cos \nu \theta_\mu = \left[\alpha_0 - \frac{2/c}{\sin \theta_\mu} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \theta} \right)_\mu \right] \cos \beta_m(y) +$$

$$+ \frac{1/(\psi \sin \theta_\mu)}{c^2/C_j} \int_0^y \mathrm{d}y' \int_0^{y'} \left[\frac{A_0}{\sin^2 \theta_\mu} - 2 \sum_{\nu=1}^N \nu A_\nu \cos \nu \theta_\mu \right] \mathrm{d}y'' \tag{24}$$

$$\mu = 0, 1, \ldots, N.$$

În particulare, alegînd $\theta_0 = \frac{\pi}{4}$ și $\theta_1 = \frac{3\pi}{4}$ primele două ecuații ale sistemului (24) vor fi scrise sub forma

$$i_n(y) + \frac{A_0}{4} - \frac{\sqrt{2}}{8} A_1 - \frac{1}{4} \sum_{\nu=3}^N A_\nu \cos \frac{\nu\pi}{4} = \left[\alpha_0 - \frac{2\sqrt{2}}{c} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \theta} \right)_{4/\pi} \right] \cos \beta_m(y) +$$

$$+ \frac{1/\psi}{c^2 C_j} \int_0^y \mathrm{d}y' \int_0^{y'} \left[\frac{A_0 \sqrt{2}}{\sin^2 \frac{\pi}{8}} - 2A_1 - \frac{4}{\sqrt{2}} \sum_{\nu=3}^N \nu A_\nu \cos \frac{\nu\pi}{4} \right] \mathrm{d}y'', \tag{25a}$$

$$i_n(y) + \frac{A_0}{4} + \frac{\sqrt{2}}{8} A_1 - \frac{1}{4} \sum_{\nu=3}^N A_\nu \cos \frac{\nu\pi}{4} = \left[\alpha_0 - \frac{2\sqrt{2}}{c} \left(\frac{\partial z_0}{\partial \theta} \right)_{3\pi/4} \right] \cos \beta_m(y) +$$

$$+ \frac{1/\psi}{c^2 C_j} \int_0^y \mathrm{d}y' \int_0^{y'} \left[\frac{A_0 \sqrt{2}}{\cos^2 \frac{\pi}{8}} + 2A_1 - \frac{4}{\sqrt{2}} \sum_{\nu=3}^N \nu A_\nu \cos \frac{3\nu\pi}{4} \right] \mathrm{d}y''. \tag{25b}$$

Datorită modului cum au fost aleşi θ_0 şi θ_1, A_2 a fost eliminat automat din ecuaţiile (25a) şi (25b). Multiplicînd (25b) cu $(1+\sqrt{2})^2$, adunînd-o la (25a) şi divizînd cu $4+2\sqrt{2}$, se obţine

$$i_n(y) + \frac{\frac{\pi}{2}\left(A_0 + \frac{1}{2}A_1\right)}{2\pi} = (\alpha_0 + \alpha_f)\cos\beta_m +$$

$$+ \frac{8/(\pi\sqrt{2})}{c^2 C_j}\int_0^y dy' \int_0^{y'} \frac{\pi}{2\psi}\left(A_0 + \frac{1}{2}A_1\right) dy'' + R_3(y), \tag{26}$$

unde s-a pus

$$\alpha_f = \frac{1}{C}\left[(1-\sqrt{2})\left(\frac{\partial z_0}{\partial\theta}\right)_{\pi/4} + (1+\sqrt{2}\left(\frac{\partial z_0}{\partial\theta}\right)_{3\pi/4}\right], \tag{27}$$

în timp ce $R_3(y) = R_3(A_3, A_4, \ldots, A_N)$ este un rest care conţine termeni superiori lui A_3 şi care poate fi neglijat în primă aproximaţie.

Pe de altă parte, ţinînd seama de dezvoltarea (21), se obţine

$$C_z = \frac{2\Gamma}{cU_\infty} = \int_0^\pi \Delta C_p \sin\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2\psi}\left(A_0 + \frac{A_1}{2}\right). \tag{28}$$

În continuare, introducînd această relaţie în (26) se obţine

$$i_n(y) + \frac{C_z}{2\pi/\psi} = (\alpha_0 + \alpha_f)\cos\beta_m + \frac{8/(\pi\sqrt{2})}{c^2 C_j}\int_0^y dy' \int_0^{y'} C_z\, dy'' \tag{29}$$

unde $2\pi/\psi$ este panta coeficientului de portanţă secţional.

Se constată că ecuaţia (29) este analogă cu ecuaţia circulaţiei în teoria liniei portante a lui Prandtl, dacă se observă că rolul incidenţei este luat acum de expresia $\alpha_j + (\alpha_0 + \alpha_f)\cos\beta_m$, unde α_j reprezintă incidenţa suplimentară datorată torsionării pînzei de jet

$$\alpha_j = \frac{8/(\pi\sqrt{2})}{c^2 C_j}\int_0^y dy' \int_0^{y'} C_z dy''. \tag{30}$$

Evident, în acest caz, linia portantă are forma directoarei definită mai sus.

Interpretarea ecuaţiei (29) în ipoteza liniei portante constituie o bază pentru extinderea modelului aerodinamic dezvoltat pentru regiunea din vecinătatea fantei, pînă în regiunea de la extremitatea aripii fluide.

Într-adevăr, aşa cum am arătat la început, la extremitatea aripii fluide curgerea devine haotică şi fenomenele nu mai pot fi descrise cu suficientă precizie. Din această cauză sîntem constrînşi să ne limităm la o analiză globală pentru care modelul de linie portantă este satisfăcător.

În acest sens, vom face ipoteza că relația (12) care definește parametrii directoarei, ecuația circulației (29), precum și relațiile auxiliare (27) și (30) pot fi prelungite pînă într-un punct reprezentînd în medie extremitatea pînzei de jet și a cărui coordonată pe axa Oy se notează cu b_j.

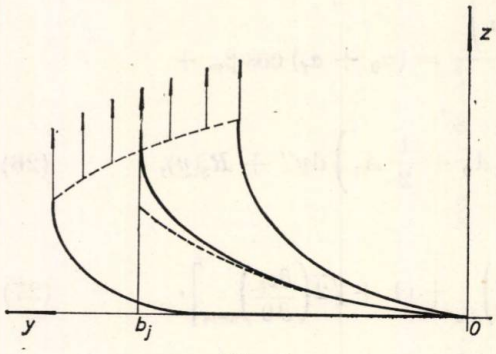


Fig. 6

Pe de altă parte, vom remarca faptul că, în realitate, extremitatea pînzei de jet poate fi considerată ca locul geometric unde șuvițele de jet iau o direcție normală față de cea inițială, de la fantă (fig. 6) astfel încît, aplicînd teorema impulsului între fantă și acest loc geometric, se obține

$$J = \mathscr{P}_j, \tag{31}$$

unde $\mathscr{P}_j$ este componenta în direcția Oz a rezultantei aerodinamice care acționează pe întreaga pînză de jet.

Considerînd acum că pe linia portantă acționează o portanță apropiată de cea care acționează în realitate pe pînza de jet, putem scrie

$$\mathscr{P}_j = \varkappa \rho_\infty U_\infty \int_0^{b_j} \Gamma \mathrm{d}y' = \frac{\varkappa}{2} \rho_\infty U_\infty^2 \int_0^{b_j} c C_z \, \mathrm{d}y', \tag{32}$$

unde $\varkappa$ este un coeficient apropiat de 1, care ține seama de experiență.

În final, din formulele (31) și (32) rezultă că b_j trebuie să satisfacă relația

$$c^2 C_j = \varkappa \int_0^{b_j} c C_z \, \mathrm{d}y' = \frac{2\varkappa}{U_\infty} \int_0^{b_j} \Gamma \mathrm{d}y'. \tag{33}$$

În cele ce urmează, b_j va fi considerat ca parametru independent, în timp ce C_j va rezulta din ecuația precedentă (33).

4. DISTRIBUȚIA CIRCULAȚIEI PE ARIPA CU JETURI LATERALE ÎNCLINATE

În cele ce urmează se va prezenta o metodă de determinare a distribuției de circulație pe aripile cu jeturi laterale înclinate. Această metodă diferă întrucîtva de cea utilizată în [4], unde s-au tratat doar jeturile emise orizontal, fără înclinare.

Pentru evitarea unor dificultăți de calcul, vom considera că între aripă și fantă trecerea este racordată așa cum este indicat în figurile 1 și 7.

Fie H un punct aparținînd liniei portante ($\mathscr{D}$), iar H^* proiecția sa ortogonală pe traseul cunoscut $\Omega(0)y$. Fie, de asemenea, s lungimea arului

$\Omega(0)H^*$, iar S_0 și S_B valorile lui S, respectiv, pentru $H^* \equiv 0$ și $H^* \equiv B$. Se poate considera $S_0 \cong b/2$, b fiind anvergura aripii solide.

Fie, de asemenea, t coordonata complexă a lui H în planul $\zeta\Omega\eta$ ($\Omega\eta$ fiind considerată cu o axă imaginară), iar t^* aceea a lui H^*, se observă cu ușurință că pe porțiunea aripii solide $t = t^* = iS$ (unde $i = \sqrt{-1}$) în timp ce pe porțiunea jetului avem

$$t^* = (S - S_0)\sin\varphi_0 + i[S_0 + (S - S_0)\cos\varphi_0], \tag{34}$$

$$t = t^* + Z_m e^{-i(\pi-\varphi_0)} = t^* - Z_m e^{i\varphi_0} = (S - S_0)\sin\varphi_0 + \\ + i[S_0 + (S - S_0)\cos\varphi_0] - \frac{e^{-i\varphi_0}}{cC_j}\int_0^y dy' \int_0^{y'} C_z\, dy'', \tag{35}$$

unde φ_0 este unghiul de înclinare a jeturilor (fig. 7).

Incidența indusă i_n, normală la conturul $(\mathscr{D})$ într-un punct dat, se calculează cu formula

$$i_n = -\frac{1}{4\pi}\,\mathrm{Re}\left[e^{i\varphi}\int_{\mathscr{D}}\frac{\Gamma' dt'}{(t-t')^2}\right] = -\frac{1}{4\pi}\int_{-s_B}^{s_B}\frac{\Gamma!\, g(S, S')}{(S - S')^2}\,ds', \tag{36}$$

unde

$$g(S, S') = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{(S - S')}{t - t'}\right)\frac{dt'}{ds'}e^{i\varphi}\right] = \mathrm{Re}\left[\left(\frac{S - S'}{t - t'}\right)^2 \frac{e^{i(\varphi+\varphi')}}{\cos\beta'_m}\right]. \tag{37}$$

Parametrii φ', t', S', β'_m corespund unui punct curent pe $(\mathscr{D})$, în timp ce φ, t, S reprezintă punctul unde se calculează incidența indusă.

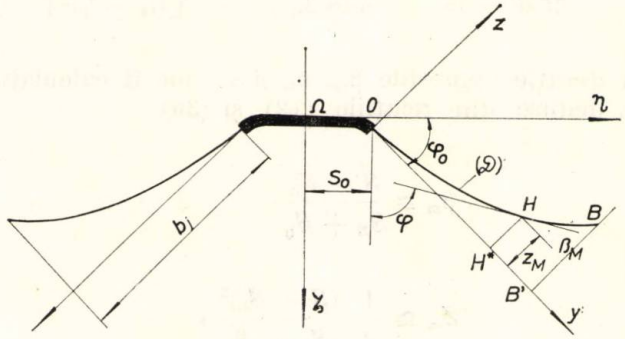


Fig. 7

Distribuția circulației Γ se determină printr-o metodă iterativă din ecuația (29), ținînd seama și de relațiile (27), (12), (30) precum și de

relația (33), în care $b_j = S_B - S_0$ va fi considerat ca parametru independent. Pentru rezolvarea ecuației (29) se utilizează metoda lui Multhopp [9] care permite calculul circulației în M puncte din anvergură, definite prin relația

$$S_k = \frac{S_B}{2} \cos \frac{k\pi}{M+1}; \quad k = 1, 2, \ldots, M. \tag{38}$$

Problema este redusă la următorul sistem de ecuații liniare

$$\gamma_k \left(G_{kl} + \frac{4S_B}{ac} \right) + \sum_{l=1}^{M} G_{kl} = \alpha_k^*, \quad k = 1, 2, \ldots, M, \tag{39}$$

unde s-au utilizat notațiile

$$\gamma_k = \Gamma_k/(2S_B\ U_\infty) = \frac{cC_z}{4S_B}; \quad \alpha^* = \begin{cases} \alpha_w \text{(pe aripă; } |S| < S_0), \\ (\alpha_0 + \alpha_f) \cos\beta_m + \alpha_j; \ |S| > S_0. \end{cases} \tag{40}$$

De asemenea, b_{kl} fiind coeficienții lui Multhopp, avem

$$G_{kk} = b_{kk} \cdot \lim_{s' \to s_k} g(S_k, S') = b_{kk} g_{kk} = \frac{M+1}{4} \frac{(\cos\beta_m)_k}{\sin \dfrac{k\pi}{M+1}} \tag{41.a}$$

$$G_{kl} = b_{kl} \cdot g(S_k, S_l) = b_{kl} g_{kl} =$$

$$= \frac{(-1)^{k-l} - 1}{2(M+1)} \cdot \frac{\sin \dfrac{l\pi}{M+1}}{(\cos\beta_m)_l} \cdot \mathrm{Re}\left[\frac{e^{i(\varphi_k + \varphi_l)}}{(t_k - t_l)^2} \right]. \tag{41.b}$$

Pentru prima iterație expresiile β_m, z_m și α_j pot fi calculate cu formule aproximative, deduse din relațiile (12) și (30)

$$\beta_m \cong \frac{S - S_0}{S_B + S_0}, \tag{42.a}$$

$$Z_m \cong \frac{1}{2} \frac{(S - S_0)^2}{S_B - S_0}, \tag{42.b}$$

$$\alpha_j \cong \frac{0{,}892}{c} \frac{(S - S_0)^2}{S_B - S_0}. \tag{42.c}$$

Algoritmul de calcul este următorul.

— Utilizînd relaţiile (38), (41), (42) se calculează expresiile G_{kl} şi α_k^*, după care rezolvînd sistemul (39) se determină necunoscutele γ_k (deci Γ_k).

— Se determină C_j din formula (33).

— Se reia calculul utilizînd relaţiile exacte (12) şi (30) pentru determinarea expresiilor β_m, 2_m şi α_j.

Odată determinată distribuţia de circulaţie în lungul liniei portante, coeficientul de portanţă al aripii solide va fi determinat prin formula

$$C_z = \frac{4}{SU_\infty}\int_0^{s_0} \Gamma ds' = \frac{4}{SU_\infty}, \tag{43}$$

unde S este suprafaţa aripii.

Aşa cum rezultă din aplicaţiile numerice efectuate pe calculator, procesul iterativ este rapid convergent (2—3 iteraţii sînt suficiente).

Se constată în final că soluţia este aproape liniară (sau cvasi-liniară) în raport cu α_0, ceea ce se explică prin faptul că mărimile α_j, β_m şi z_m sînt influenţate în mică măsură de Γ datorită formei expresiilor (30) şi (12).

O altă remarcă importantă se referă la valoarea pantei coeficientului de portanţă.

Aşa cum s-a menţionat în capitolul al 3-lea, ψ reprezintă un coeficient de corecţie care ţine seama de efectul alungirii suprafeţei portante asupra incidenţei „efective" $\alpha_{ef}(x, y)$ [relaţiile (15) şi (17)] şi prin aceasta, asupra portanţei globale.

Pentru alungiri mari, $\psi \cong 1$, şi, în consecinţă, panta este egală cu 2π.

Pentru alungiri mici, ψ se determină astfel încît portanţa globală obţinută teoretic să coincidă cu cea stabilită experimental. Comparînd rezultatele numerice cu cele experimentale s-a găsit pentru ψ o expresie simplă

$$\psi = \sqrt{1 + 2/\Lambda^2}, \tag{44}$$

unde Λ este alungirea suprafeţei portante. În cazul nostru, al sistemului aripă-jeturi laterale s-a luat

$$\Lambda = (b + 2b_j)/c = 2S_B/c. \tag{45}$$

5. APLICAŢII NUMERICE ŞI CONCLUZII

Pentru ilustrarea metodei s-au făcut aplicaţii numerice pentru trei aripi dreptunghiulare de alungiri $b/c = 1$; 1,5 ; 2 cu jeturi laterale înclinate în raport cu orizontala cu unghiuri variind între 0° şi 45°.

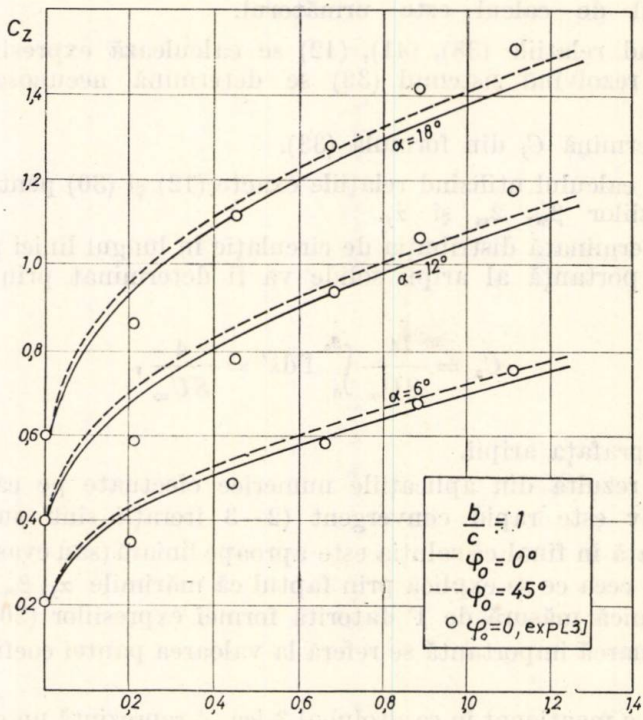

C_z
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
α=18°
α=12°
α=6°
$\frac{b}{c}=1$
$\varphi_0=0°$
$\varphi_0=45°$
$\varphi_0=0$, exp[3]
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4

Fig. 8

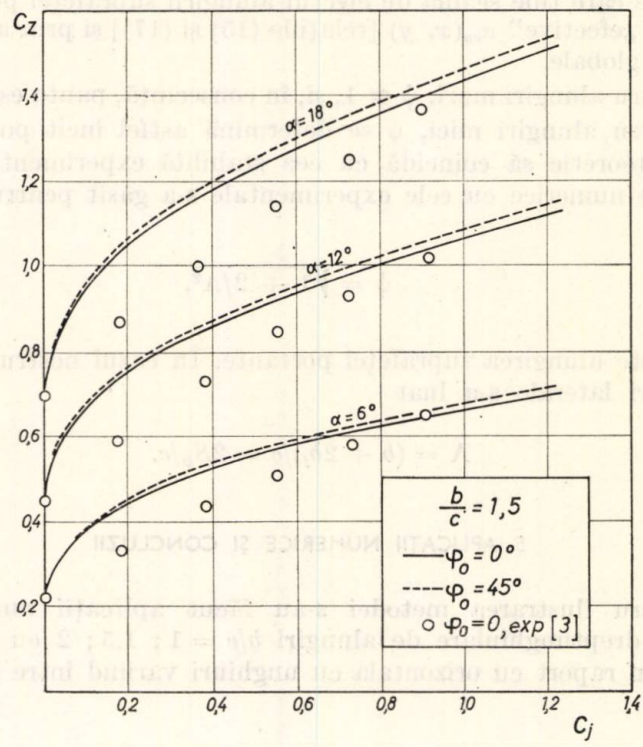

C_z
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
α=18°
α=12°
α=6°
$\frac{b}{c}=1,5$
$\varphi_0=0°$
$\varphi_0=45°$
$\varphi_0=0$, exp [3]
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
C_j

Fig. 9

Rezultatele teoretice au fost calculate luînd, în formula (33), $\varkappa = 0{,}9$. Se constată, pentru $\varphi_0 = 0°$ un bun acord între teorie și experiență.

Pentru calcul s-a considerat că incidența α_0 a planului xOy în raport cu U_∞ este dată aproximativ de relația

$$\alpha_0 = \alpha_w \cos\varphi_0. \tag{46}$$

În figurile 8, 9, 10 sînt reprezentate curbele $C_z(C_j)$.

Din aceste diagrame rezultă că efectul asupra hipersustentației propriu-zise nu variază sensibil în funcție de înclinarea jeturilor, cel puțin pentru φ_0 cuprins între 0° și 45°. În schimb, prin înclinare se recuperează componenta verticală a impulsului jeturilor sub forma unei forțe reactive

$$2J \sin\varphi_0 = \frac{1}{2}\rho_\infty U_\infty^2 - b \cdot c\left(2\frac{c}{b} C_j \sin\varphi_0\right).$$

Astfel, coeficientul total de portanță al aripii $\bar{C}_z$, devine

$$\bar{C}_z = C_z + 2\frac{c}{b} C_j \sin\varphi_0, \tag{47}$$

a cărui variație în raport cu C_j este reprezentată pe figurile 11, 12, 13.

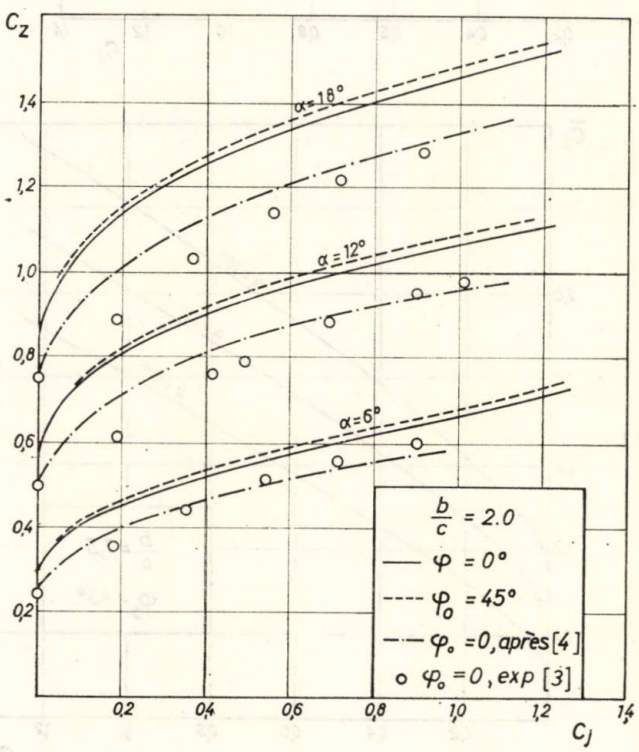


Fig. 10

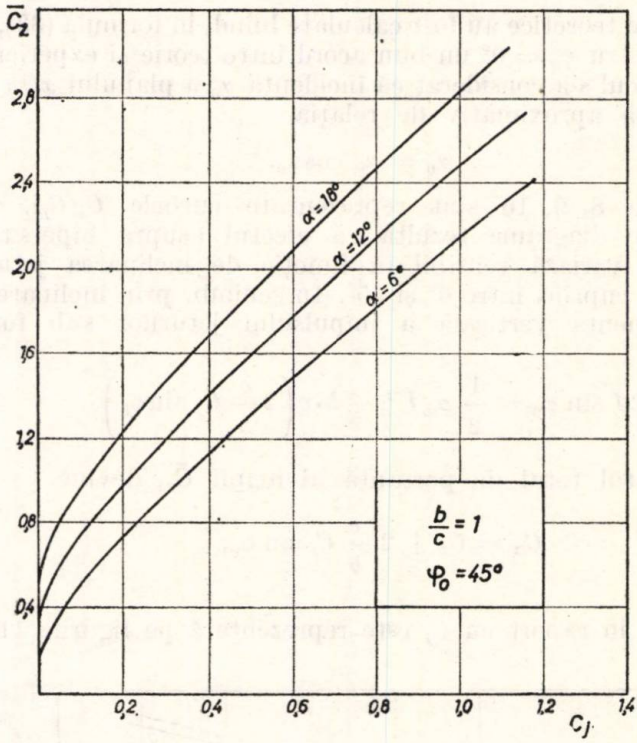

$\bar{C}_z$
2,8
2,4
2,0
1,6
1,2
0,8
0,4
α = 18°
α = 12°
α = 6°
$\frac{b}{c} = 1$
$\varphi_0 = 45°$
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
c_j

Fig. 11

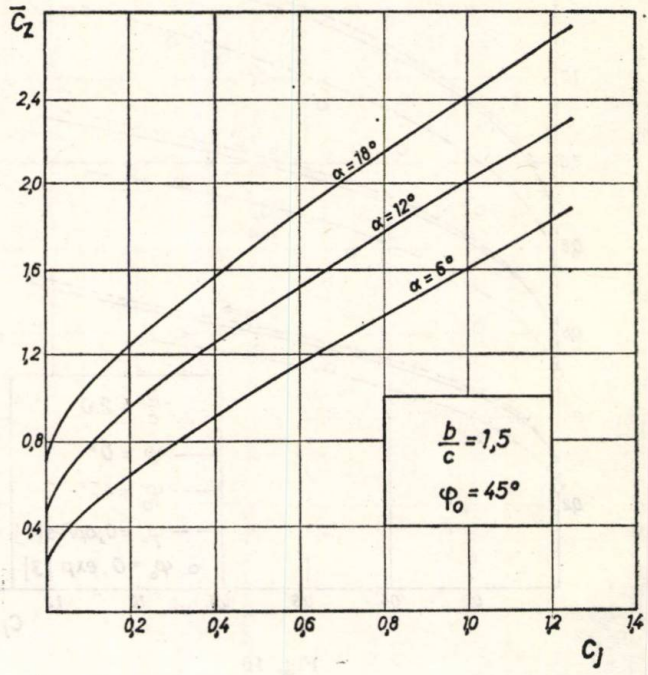

$\bar{C}_z$
2,4
2,0
1,6
1,2
0,8
0,4
α = 18°
α = 12°
α = 6°
$\frac{b}{c} = 1{,}5$
$\varphi_0 = 45°$
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
c_j

Fig. 12

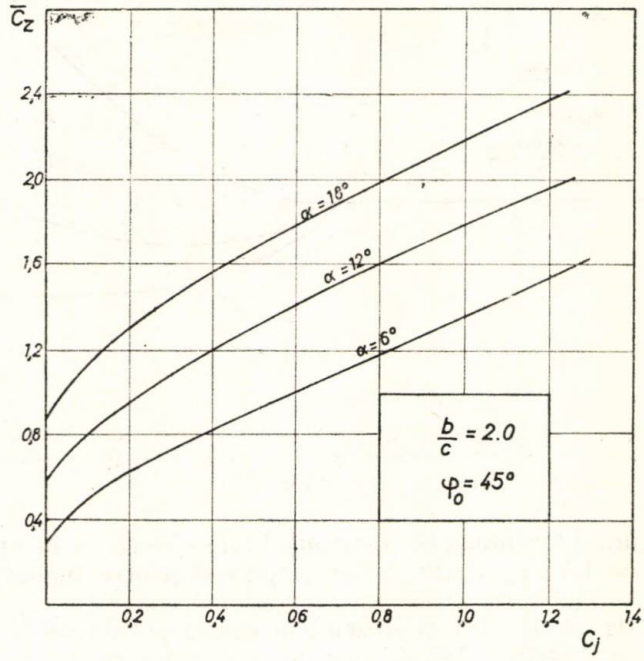

$\overline{C}_z$
2,4
2,0
1,6
1,2
0,8
0,4
α = 18°
α = 12°
α = 6°
b/c = 2.0
φ0 = 45°
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
Cj

Fig. 13

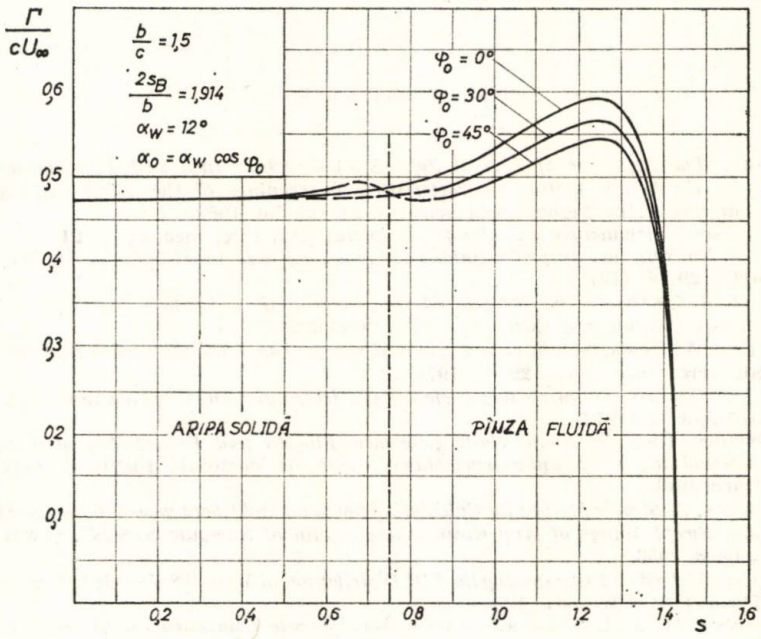

Γ/cU∞
b/c = 1,5
2sB/b = 1,914
αW = 12°
α0 = αW cos φ0
φ0 = 0°
φ0 = 30°
φ0 = 45°
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
ARIPA SOLIDĂ
PÎNZA FLUIDĂ
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
s

Fig. 14

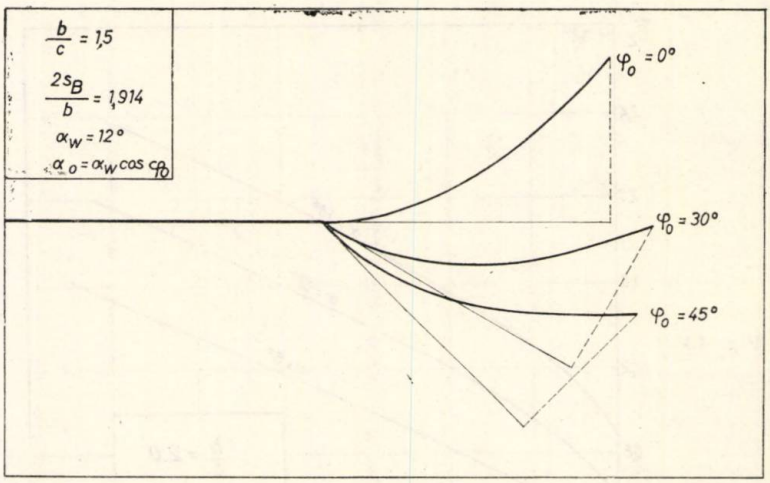


Fig. 15

Figura 14 reprezintă distribuțiile de circulație în anvergură pentru cazul $b/c = 1{,}5$; $\alpha_w = 12°$, $2S_B/c = 1{,}914$ și pentru înclinările $\varphi = 0°$, $30°$, $45°$.

În figura 15 sînt reprezentate configurațiile liniei portante corespunzătoare distribuțiilor de circulație din figura 14.

Primită în redacție la 29 decembrie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *The Influence of Lateral Jets, Simple or Combined with longitudinal Jets, upon the Wings Lifting Characteristics*, Proceedings of the Third International Congress of the Aeronautical Sciences, Stockholm, 1962.
2. N. Cămărășescu, *Vizualizarea jeturilor fluide laterale*, St. cerc. mec. apl., **21**, *2*, (1966).
3. E. Carafoli, *Noi cercetări asupra aripilor de alungire mică cu jeturi laterale*. St. cerc. mec. apl., **29**, *4*, (1970).
4. E. Carafoli, M. Neamțu, *New theoretical developments on the wings with lateral jets* ; Articol în vol. ,,Omagio a Carlo Ferrari'', decembrie, 1974.
5. Șt. Săvulescu, V. Toma, *Studiu experimental al scurgerii în jurul unui jet transversal curbat*, St. cerc. mec. apl., **29**, *4*, 1970.
6. H. Werlé, M. Gallon, ,,*Controle d'écoulements par jet transversal*, l'aeronautique et l'Astronautique, *2* (1972).
7. J. W. Mörchen, *Über die Spaltverlaste zwieschen Flügeln und Endscheiben ohm und mit Ausbladsung in Spannwetenrichtung''*, teză de doctorat. Institutul politehnic, Darmstadt.
8. D. Küchemann, *A Simple Method for Calculating the Span and Chord wise Loading on Straight and Swept Wings of Any Given Aspect Ratio at Subsonic Speeds''*, R &M 2935, august 1953.
9. H. Multhopp, *Methods for Calculating the Lift Distribution of Wings* (Subsonic Lifting Surface Theory), R & M 2884, 1955.
10. A. F. Donovan, H. R. Lawrence, (editors) *Aerodynamic Components of Aircraft at High Speeds*, Princeton University Press, 1957.
11. S. Săndulescu, *Studiul aripilor cu parametrii variabili ca urmare a pînzelor de jeturi emise lateral*, teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1969.

CONSIDERAȚII TEORETICE ASUPRA EVOLUȚIEI IZENTROPICE A UNUI GAZ PRINTR-O CONDUCTĂ CU SECȚIUNE VARIABILĂ

de C. TEODORESCU-ȚINTEA
INCREST, București

În lucrare se analizează evoluția izentropică a unui gaz printr-o conductă cu secțiune variabilă, evidențiindu-se corelația dintre parametrii inițiali ai gazului și valorile acestora într-o secțiune dată.
Rezultatele obținute sînt particularizate în cazul aerului, aburului supraîncălzit și gazului metan.

Se consideră schema curgerii din figura 1, conform căreia un gaz oarecare aflat într-un rezervor 1 de capacitate infinită, la parametrii P_0^* și T_0^*, este evacuat prin orificiul O în rezervorul 2, de capacitate

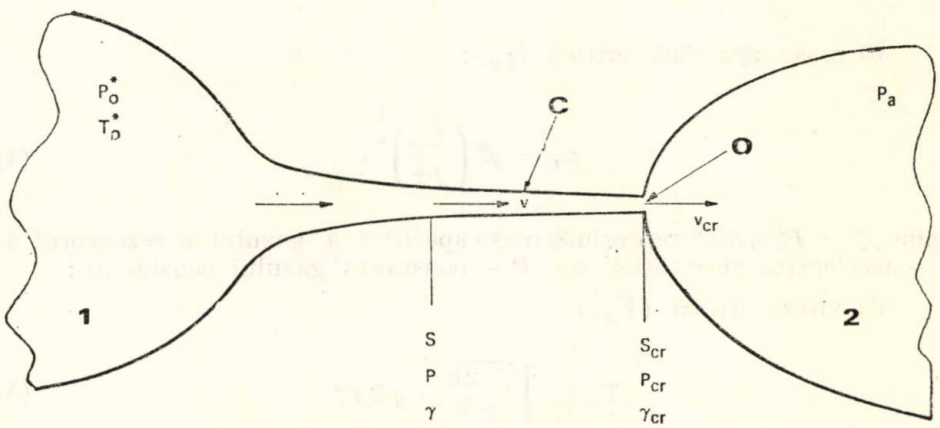


Fig. 1. – Reprezentarea schematică a curgerii gazului : 1,2 - rezervoare de capacitate infinită ; C - conductă cu secțiune variabilă.

de asemenea infinită, în care există o presiune constantă și egală cu P_a. Cele două rezervoare sînt legate între ele prin conducta C avînd aria S a secțiunii transversale variabilă.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 2, 1975, P. 179–186

Punînd condiţiile :

$$S > S_0 \text{ şi } (P_0^* - P_a) > \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} P_0^*, \tag{1}$$

în care S_0 este aria orificiului O, se cere determinarea parametrilor curgerii într-o secţiune oarecare S în funcţie de parametrii P_0^*, T_0^* şi S_0 cunoscuţi apriori, în ipoteza evoluţiei izentropice a gazului.

Conform condiţiilor (1), în secţiunea S_0 se stabilesc parametrii critici ai curgerii, şi anume :

a) presiunea critică (P_{cr}) :

$$P_{cr} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}} P_0^*, \tag{2}$$

unde $k = \frac{C_p}{C_v}$ reprezintă exponentul adiabatic al gazului considerat ;

b) temperatura critică (T_{cr}) :

$$T_{cr} = \frac{2}{k+1} T_0^*, \tag{3}$$

c) masa specifică critică (ρ_{cr}) :

$$\rho_{cr} = \rho_0^* \left(\frac{P_{cr}}{P_0^*}\right)^{\frac{1}{k}}, \tag{4}$$

unde $\rho_0^* = P_0^*/gRT_0^*$ reprezintă masa specifică a gazului în rezervorul 1, g — acceleraţia gravitaţiei, iar R — constanta gazului considerat ;

d) viteza critică (V_{cr}) :

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{2k}{k+1} gRT_0^*}, \tag{5}$$

e) aria secţiunii critice (S_{cr}) :

$$S_{cr} = S_0. \tag{6}$$

Considerînd o secţiune transversală oarecare prin conducta C (fig. 1) şi notînd parametrii gazului în această secţiune respectiv cu P, T, γ, S şi V, se poate scrie, conform ecuaţiei continuităţii,

$$\rho . S . V = \rho_{cr} . S_{cr} . V_{cr} \tag{7}$$

sau

$$\frac{\rho}{\rho_{cr}} \cdot \frac{S}{S_{cr}} = \frac{V_{cr}}{V}. \tag{8}$$

Exprimînd valorile vitezelor V și V_{cr} cu ajutorul relațiilor

$$V = \sqrt{\frac{2gk}{k-1} RT_0^* \left[1 - \left(\frac{P}{P_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]}, \tag{9}$$

$$V_{cr} = \sqrt{\frac{2gk}{k-1} RT_0^* \left[1 - \left(\frac{P_{cr}}{P_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \tag{10}$$

și avînd în vedere ecuația (8), rezultă

$$\frac{S}{S_{cr}} \cdot \frac{\rho}{\rho_{cr}} = \left[\frac{1 - \left(\frac{P_{cr}}{P_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \left(\frac{P}{P_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Întrucît

$$\rho = \frac{\rho_0^*}{\left(\frac{P_0^*}{P}\right)^{\frac{1}{k}}},$$

se poate scrie în continuare

$$\frac{S}{S_{cr}} \cdot \frac{\rho_0^*}{\rho_{cr}} = \left(\frac{P_0^*}{P}\right)^{\frac{1}{k}} \cdot \left[\frac{1 - \left(\frac{P_{cr}}{P_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}}{1 - \left(\frac{P}{P_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Avînd în vedere ecuația (2) și întrucît

$$\frac{\rho_{cr}}{\rho_0^*} = \left(\frac{P_{cr}}{P_0^*}\right)^{\frac{1}{k}} = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}},$$

relaţia anterioară devine

$$\left(\frac{S}{S_{cr}}\right)^2\left[1-\left(\frac{P}{P_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}\left(\frac{P_0^*}{P}\right)^{\frac{2}{k}}\cdot\left(\frac{k-1}{k+1}\right)$$

sau

$$P_0^{*\frac{k-1}{k}}\cdot P^{\frac{2}{k}}-P^{\frac{k+1}{k}}=\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{2}{k-1}}\left(\frac{k-1}{k+1}\right)\cdot\left(\frac{S_{cr}}{S}\right)^2\cdot P_0^{*\frac{k+1}{k}}. \tag{11}$$

Aşadar, valoarea presiunii în secţiunea considerată S depinde de presiunea iniţială P_0^*, de natura gazului care evoluează (exponentul k) şi de raportul ariilor S_{cr}/S.

Analizînd formula (11) se constată că pentru valorile limită $S = S_{cr}$ şi $S_{cr} = 0$, rezultă, respectiv, $P = P_{cr}$ şi $P = P_0^*$.

Cunoscînd valoarea presiunii P în secţiunea considerată, este uşor de determinat ceilalţi parametri ai curgerii, utilizînd relaţiile

$$T = T_0^*\left(\frac{P}{P_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}} \tag{12}$$

pentru temperatură,

$$V = \sqrt{\frac{2gk}{k-1}RT_0^*\left[1-\left(\frac{P}{P_0^*}\right)^{\frac{k-1}{k}}\right]} \tag{13}$$

pentru viteză, şi

$$\gamma = \gamma_0^*\left(\frac{P}{P_0^*}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{14}$$

pentru greutatea specifică.

În continuare vom considera trei cazuri particulare frecvent întîlnite în practică, şi anume evoluţia aerului, a aburului supraîncălzit şi a gazului metan.

În cazul aerului $k = 1{,}4$ şi prin urmare ecuaţia (11) capătă forma :

$$P_0^{*0{,}285714}\cdot P^{1{,}428571} - P^{1{,}714285} = 0{,}066979\left(\frac{S_{cr}}{S}\right)^2 P_0^{*1{,}714285}, \tag{15}$$

a cărei soluție este reprezentată grafic în figura 2, iar relațiile (12), (13), (14) se modifică după cum urmează:

$$T = T_0^* \left(\frac{P}{P_0^*} \right)^{0,2857}, \tag{16}$$

$$V = 44,83 \sqrt{T_0^* \left[1 - \left(\frac{P}{P_0^*} \right)^{0,2857} \right]}, \tag{17}$$

$$\gamma = \gamma_0^* \left(\frac{P}{P_0^*} \right)^{0,7143}. \tag{18}$$

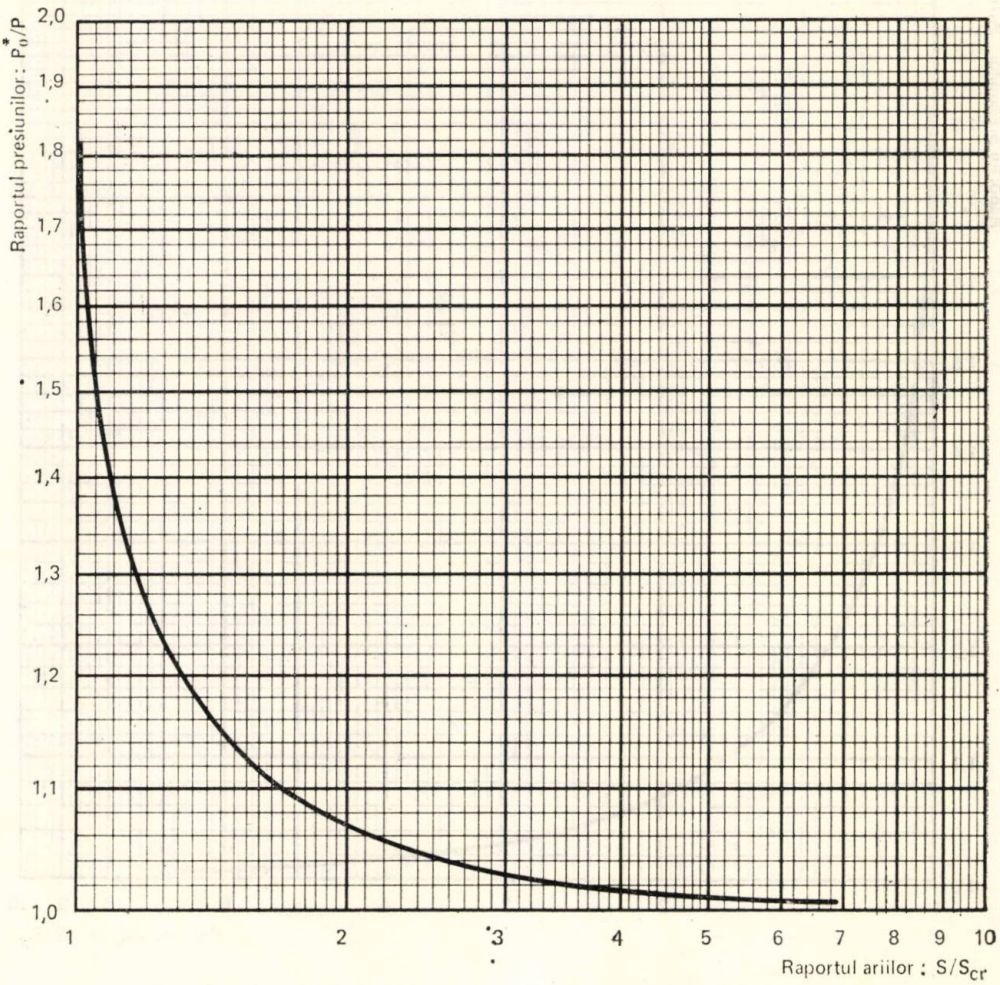


Fig. 2. — Variația raportului P_0^*/P în funcție de raportul ariilor S/S_{cr} în cazul aerului

În cazul aburului supraîncălzit $k = 1{,}35$, ceea ce conduce pentru ecuația (11) a presiunilor la expresia

$$P_0^{*\,0{,}259259} \cdot P^{1{,}481481} - P^{1{,}740741} = 0{,}059263 \left(\frac{S_{cr}}{S}\right)^2 P_0^{*\,1{,}740741}, \qquad (19)$$

căreia îi corespunde soluția reprezentată grafic în figura 3.

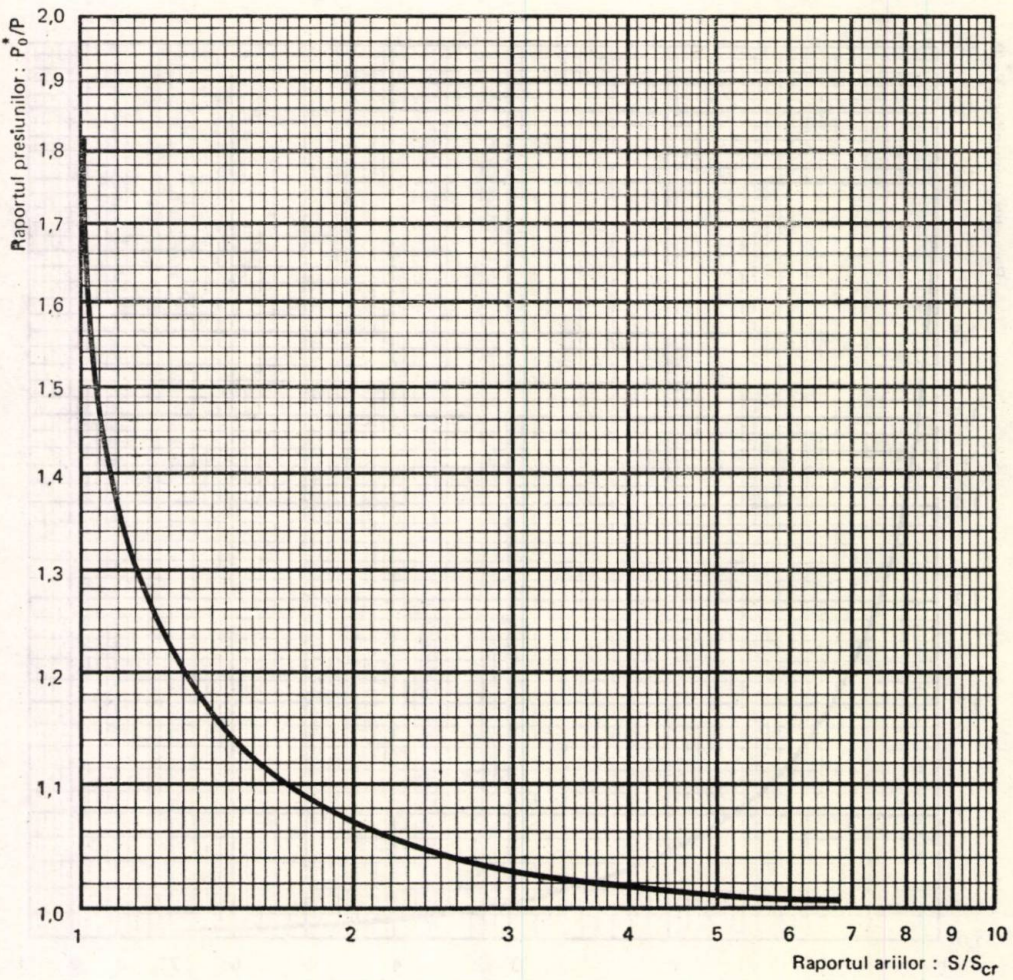


Fig. 3.— Variația raportului P_0^*/P în funcție de raportul ariilor S/S_{cr} în cazul aburului supraîncălzit

Pentru ceilalți parametri ai curgerii rezultă relațiile :

$$T = T_0^* \left(\frac{P}{P_0^*} \right)^{0,259}, \tag{20}$$

$$V = 59,7 \sqrt{T_0^* \left[1 - \left(\frac{P}{P_0^*} \right)^{0,259} \right]}, \tag{21}$$

$$\gamma = \gamma_0^* \left(\frac{P}{P_0^*} \right)^{0,741}. \tag{22}$$

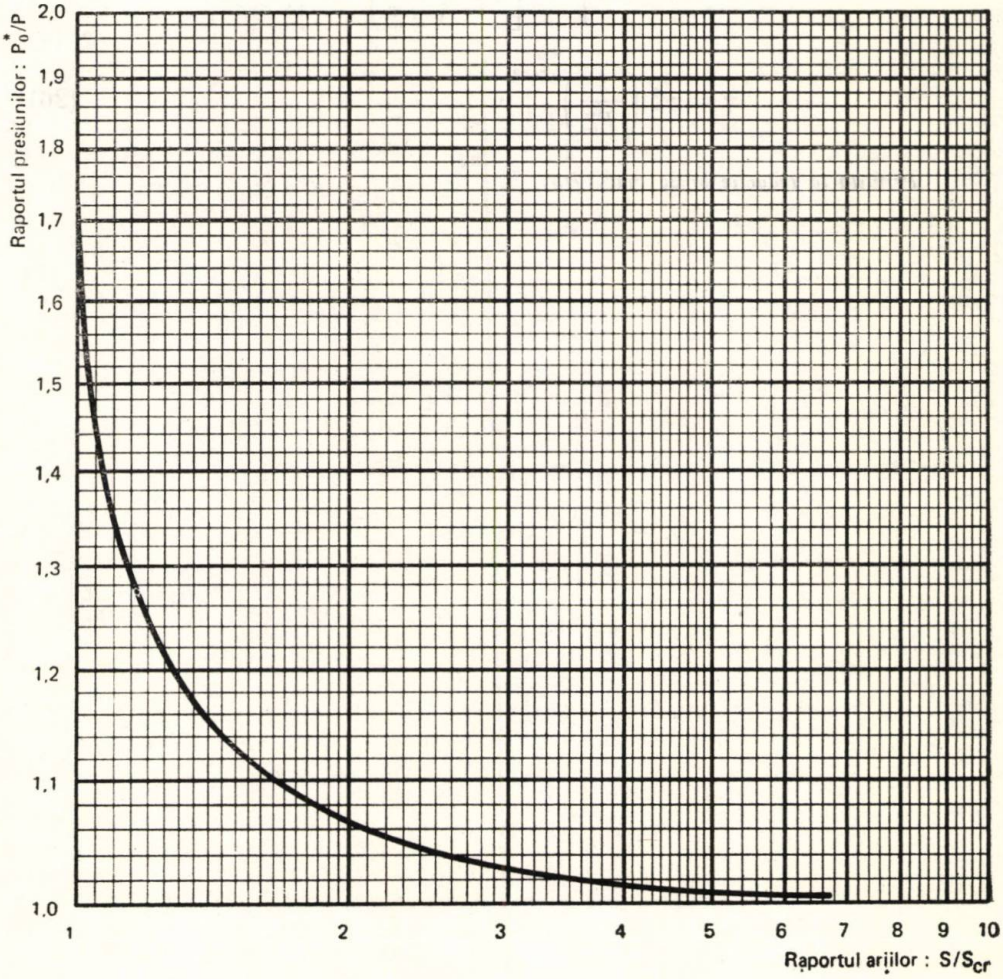


Fig. 4.— Variația raportului P_0^*/P în funcție de raportul ariilor S/S_{cr} în cazul gazului metan

În cazul gazului metan $k = 1{,}31$ și $R = 52{,}89$ și prin urmare ecuația (11) capătă forma

$$P_0^{*0,236641} \cdot P^{1,526717} - P^{1,763358} = 0{,}052965 \left(\frac{S_{cr}}{S}\right)^2 P_0^{*1,763358}, \tag{23}$$

a cărei soluție este reprezentată grafic în figura 4, iar relațiile (12), (13), (14) devin :

$$T = T_0^* \left(\frac{P}{P_0^*}\right)^{0,2366}, \tag{24}$$

$$V = 66{,}186 \sqrt{T_0^* \left[1 - \left(\frac{P}{P_0^*}\right)^{0,2366}\right]}, \tag{25}$$

$$\gamma = \gamma_0^* \left(\frac{P}{P_0^*}\right)^{0,7633}. \tag{26}$$

Primită la redacție la 30 mai 1975

ASUPRA STABILITĂȚII CURGERII PLANE POISEUILLE

de VALERIU PANAITESCU
Institutul politehnic București

Se studiază problema stabilității curgerii plane Poiseuille prin trei metode, și anume o metodă de obținere a unei soluții exacte a ecuației Orr-Sommerfeld prin reducerea rezolvării acestei ecuații diferențiale la rezolvarea unei ecuații integrale Volterra de speța a doua, o metodă de cercetare a problemei valorilor proprii a ecuației Orr-Sommerfeld cu ajutorul unui calculator analogic și o metodă de rezolvare a problemei stabilității hidrodinamice cu ajutorul calculatoarelor digitale, pe baza utilizării unor rezultate din teoria sistemelor dinamice.

1. INTRODUCERE

Apariția turbulenței, deci mecanismul tranziției de la curgerea laminară la curgerea turbulentă, constituie o problemă fundamentală a mecanicii fluidelor, problemă care pînă în prezent nu a fost rezolvată definitiv, deși i-au fost consacrate numeroase lucrări. Importanța cunoașterii și studierii în detaliu a regimului de tranziție trebuie subliniată atît pentru clarificarea științifică a procesului și mecanismului apariției turbulenței, cît și pentru dirijarea unor fenomene care intervin nemijlocit în numeroase domenii ale tehnicii moderne.

Metodele de studiu ale tranziției au ca punct de plecare considerarea mecanismelor și proceselor care contribuie la realizarea structurii tranziționale, printre care trebuie menționat în primul rînd mecanismul de amplificare selectivă a perturbațiilor. Dealtfel, metoda teoretică de studiu, care examinează evoluția perturbațiilor, în cadrul căreia s-a dezvoltat teoria stabilității hidrodinamice bazată pe considerarea ecuației Orr-Sommerfeld, este cea mai utilizată, fiind aplicată de un număr mare de cercetători, cu rezultate temeinic confirmate de experiențe.

2. FORMULAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI

Se examinează stabilitatea curgerii plane Poiseuille (fig. 1), dată de profilul de viteze și presiunea

$$U = U(y) = -y^2 + 2y, \quad 0 \leqslant y \leqslant 2, \quad V = 0, \quad P = P(x, y), \tag{1}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM, 35, NR.2, 1976 P.187–206

peste care se suprapune o mişcare perturbatorie bidimensională determinată de mărimile

$$u' = u'(x, y, t), \quad v' = v'(x, y, t), \quad p' = p'(x, y, t). \tag{2}$$

Se admite că perturbaţia se compune din oscilaţii separate, fiecare oscilaţie fiind reprezentată printr-o undă care se propagă în direcţia x, dată de funcţia de curent complexă

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)\ e^{i\alpha(x-ct)}, \tag{3}$$

în care $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$ este amplitudinea complexă, reprezentată printr-o funcţie de coordonata y, α este o mărime reală, numită numărul de undă, legată de lungimea de undă λ a oscilaţiei prin relaţia $\lambda = 2\pi/\alpha$, iar $c = c_r + ic_i$ este o mărime complexă a cărei parte reală este viteza de propagare a undei în direcţia x şi a cărei parte imaginară este viteza de amplificare care determină prin semnul său dacă are loc amortizarea, $c_i < 0$, sau amplificarea, $c_i > 0$, perturbaţiei. Cazul $c_i = 0$ corespunde perturbaţiilor neutrale.

Problema cercetării stabilităţii mişcării constă în răspunsul la întrebarea dacă mişcarea perturbatoare, suprapusă mişcării laminare de bază, se amortizează sau creşte cu timpul. Metoda micilor oscilaţii presupune că mişcarea perturbatoare este compatibilă cu ecuaţiile diferenţiale de mişcare Navier-Stokes şi ecuaţia de continuitate şi că perturbaţia suprapusă este „mică" în sensul că toţi termenii din ecuaţia de mişcare pătratici în raport cu vitezele perturbatoare sînt neglijabil de mici în comparaţie cu termenii liniari. Se înlocuiesc vitezele şi presiunea mişcării rezultante

$$u = U + u', \quad v = v', \quad p = P + p' \tag{4}$$

în ecuaţiile Navier-Stokes, se neglijează termenii pătratici în raport cu vitezele perturbatoare, se ţine seama că mişcarea de bază (2) satisface ecuaţiile de mişcare Navier-Stokes şi se elimină presiunea p'. Se obţine un sistem de două ecuaţii pentru determinarea necunoscutelor u' şi v'. Pentru urmărirea evoluţiei perturbaţiilor definite de funcţia de curent (3) (astfel de perturbaţii sînt numite în literatură unde Tollmien-Schlichting) se introduc în acest sistem componentele vitezei perturbatoare

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varphi'(y)\ e^{i\alpha(x-ct)}, \quad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha\varphi(y)\ e^{i\alpha(x-ct)}. \tag{5}$$

Se obţine ecuaţia diferenţială complexă a amplitudinii mişcării perturbatoare numită ecuaţia Orr-Sommerfeld, [1], [2],

$$(U-c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha \mathcal{R}e}(\varphi'''' - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi). \tag{6}$$

Această ecuaţie diferenţială ordinară de ordinul al patrulea relativ la funcţia necunoscută amplitudinea complexă $\varphi(y)$, liniară, cu coeficienţi variabili, este ecuaţia fundamentală a studiului stabilităţii liniare a mişcărilor plane paralele. Această ecuaţie este scrisă sub formă adimensională prin împărţirea lungimilor la o lungime caracteristică (semidistanţa δ dintre cele două plane paralele, în cazul curgerii plane Poiseuille) şi prin împărţirea vitezelor la viteza maximă $U_{\max}$ a curgerii laminare de bază (viteza la mijlocul distanţei dintre cele două plane); derivarea se face în raport cu variabila adimensională y/δ, iar numărul Reynolds este dat de relaţia $\mathcal{R}e = U_{\max}\delta/\nu$.

Cele patru condiţii la limită în care se rezolvă ecuaţia (6) se obţin din considerarea valorilor vitezelor u' şi v', (5), pe frontierele domeniului în care are loc mişcarea. Astfel, în cazul mişcării plane Poiseuille acestea se obţin din condiţia anulării datorită adeziunii a componentelor vitezei perturbatoare pe planele de ecuaţii $y = 0$ şi $y = 2$; rezultă

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi(2) = \varphi'(2) = 0. \tag{7}$$

Ecuaţia complexă (6) este echivalentă cu un sistem de două ecuaţii reale; separarea în partea reală şi partea imaginară se face înlocuind φ şi c prin expresiile $\varphi = \varphi_r + i\varphi_i$; $c = c_r + ic_i$:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha\mathcal{R}e}\varphi_r'''' - \left[c_i + \frac{2\alpha^2}{\alpha\mathcal{R}e}\right]\varphi_r'' + (U - c_r)\,\varphi_i'' + \\
&\quad + \alpha^2\left[c_i + \frac{\alpha^2}{\alpha\mathcal{R}e}\right]\varphi_r - \alpha^2\left[U - \frac{U''}{\alpha^2} - c_r\right]\varphi_i = 0, \\
&\frac{1}{\alpha\mathcal{R}e}\varphi_i'''' - \left[c_i + \frac{2\alpha^2}{\alpha\mathcal{R}e}\right]\varphi_i'' - (U - c_r)\,\varphi_r'' + \\
&\quad + \alpha^2\left[c_i + \frac{\alpha^2}{\alpha\mathcal{R}e}\right]\varphi_i + \alpha^2\left[U - \frac{U''}{\alpha^2} - c_r\right]\varphi_r = 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

În cazul curgerii plane Poiseuille condiţiile la limită sînt date de relaţiile

$$\begin{aligned}
&\varphi_r(0) = \varphi_r'(0) = \varphi_i(0) = \varphi_i'(0) = 0, \\
&\varphi_r(2) = \varphi_r'(2) = \varphi_i(2) = \varphi_i'(2) = 0.
\end{aligned} \tag{9}$$

Pentru scrierea soluţiei ecuaţiei (6) este necesară cunoaşterea unui sistem fundamental format din patru soluţii, $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\}$; soluţia generală se scrie sub forma

$$\varphi = C_1\varphi_1 + C_2\varphi_2 + C_3\varphi_3 + C_4\varphi_4. \tag{10}$$

Condițiile la limită bilocale omogene (7) conduc la ecuația caracteristică

$$F(\alpha, \mathcal{R}e, c) = 0. \tag{11}$$

Prin urmare studiul stabilității se reduce la o problemă de valori proprii; ecuația diferențială (6) cu condițiile la limită (7) furnizează pentru fiecare pereche de valori α, $\mathcal{R}e$ funcția proprie $\varphi(y)$ și valoarea proprie complexă $c = c_r + ic_i$.

3. REZOLVAREA PROBLEMEI STABILITĂȚII LINIARE A CURGERII PLANE POISEUILLE

În lucrări anterioare [3]—[6], au fost dezvoltate trei metode generale de soluționare a problemei stabilității liniare a curgerilor laminare plane paralele sau aproape paralele. Se aplică aceste metode la cazul concret al studiului stabilității curgerii plane Poiseuille (fig. 1).

3.1. *Metoda de rezolvare a problemei stabilității curgerii plane Poiseuille prin obținerea unei soluții exacte a ecuației Orr-Sommerfeld.* Se reduce rezolvarea ecuației diferențiale (6) cu condițiile la limită (7) la rezolvarea unei ecuații integrale Volterra de speța a doua, prin două schimbări succesive ale funcției necunoscute.

Se introduce funcția f prin ecuația diferențială

$$f = \varphi'' - \alpha^2\varphi. \tag{12}$$

Prin integrare se obține pentru amplitudinea φ expresia

$$\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_0^y f(p)\ \mathrm{sh}\alpha(y-p)\ \mathrm{d}p + C_1\ \mathrm{ch}\ \alpha y + C_2\ \mathrm{sh}\ \alpha y, \tag{13}$$

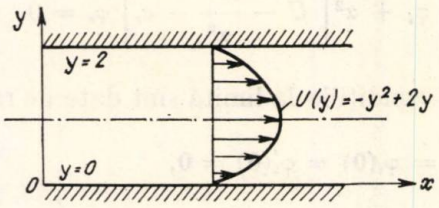


Fig. 1. — Studiul stabilității hidrodinamice a curgerii plane Poiseuille.

unde s-a notat cu p parametrul de integrare. Constantele C_1 și C_2 se determină impunînd funcției necunoscute primele două condiții la limită (7); se obține $C_1 = C_2 = 0$. Ecuația (6) devine

$$(U-c)f - U''\int_0^y f(p)\ \mathrm{sh}\ \alpha(y-p)\ \mathrm{d}p = -\frac{\mathrm{i}}{\alpha\mathcal{R}e}(f'' - \alpha^2 f). \tag{14}$$

Se introduce o nouă funcţie Φ prin ecuaţia

$$\Phi = f'' - \alpha^2 f. \tag{15}$$

Integrala generală a acestei ecuaţii este

$$f = \frac{1}{\alpha}\int_0^y \Phi(p)\,\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\,\mathrm{d}p + A\,\mathrm{ch}\,\alpha y + B\,\mathrm{sh}\,\alpha y. \tag{16}$$

Se introduce expresia (16) a funcţiei f în ecuaţia (14) şi se ţine seama de (13):

$$(U-c)\int_0^y \Phi(p)\,\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\,\mathrm{d}p + \alpha(U-c)\,A\,\mathrm{ch}\,\alpha y + \alpha(U-c)\,B\,\mathrm{sh}\,\alpha y -$$

$$- U''\int_0^y \left[\frac{1}{\alpha}\int_0^p \Phi(t)\,\mathrm{sh}\,\alpha(p-t)\,\mathrm{d}t + A\,\mathrm{ch}\,\alpha p + B\,\mathrm{sh}\,\alpha p\right]\times$$

$$\times\,\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\,\mathrm{d}p = -\frac{\mathrm{i}}{\mathcal{R}e}\Phi. \tag{17}$$

În această ultimă ecuaţie se efectuează cîteva calcule şi anume se schimbă ordinea de integrare în integrala dublă, se efectuează integralele care intervin şi se introduc notaţiile

$$K(y,p) = \left(c - U - \frac{U''}{2\alpha^2}\right)\mathrm{sh}\,\alpha(y-p) + \frac{U''}{2\alpha}(y-p)\,\mathrm{ch}\,\alpha(y-p), \tag{18}$$

$$F(y) = \alpha A\,\mathcal{R}e\left[(c-U)\,\mathrm{ch}\,\alpha y + \frac{U''}{2\alpha}\,y\,\mathrm{sh}\,\alpha y\right] +$$

$$+ \alpha B\,\mathcal{R}e\left[\left(c - U - \frac{U''}{2\alpha^2}\right)\mathrm{sh}\,\alpha y + \frac{U''}{2\alpha}\,y\,\mathrm{ch}\,\alpha y\right]. \tag{19}$$

Cu aceste notaţii ecuaţia (17) se scrie sub forma

$$\Phi(y) + \mathrm{i}\,\mathcal{R}e\int_0^y K(y,p)\,\Phi(p)\,\mathrm{d}p = -\mathrm{i}\,F(y). \tag{20}$$

S-a obţinut o ecuaţie integrală Volterra de speţa a doua, complexă, relativ la funcţia necunoscută $\Phi(y)$, în care nucleul $K(y, p)$, dat de (18), este o funcţie continuă pe domeniul de definiţie, pătratul închis $0 \leqslant y$, $p \leqslant 2$, iar funcţia $F(y)$ este o funcţie continuă pe intervalul închis

$0 \leqslant y \leqslant 2$. În aceste condiții de regularitate, ecuația (20) admite o soluție unică și poate fi scrisă cu ajutorul nucleului rezolvant $\mathcal{K}(x, p\,;\, -\mathrm{i}\,\mathcal{R}e)$,

$$\Phi(y) = -\mathrm{i}F(y) + \mathrm{i}\mathcal{R}e\int_0^y \mathcal{K}(y, p\,;\, -\mathrm{i}\,\mathcal{R}e)\,\mathrm{i}F(p)\,\mathrm{d}p. \tag{21}$$

Nucleul rezolvant se scrie sub forma seriei

$$\mathcal{K}(y, p\,;\, -\mathrm{i}\,\mathcal{R}e) = \sum_{n=1}^{\infty} (-\mathrm{i}\,\mathcal{R}e)^{n-1} K^{(n)}(y, p), \tag{22}$$

în care $K^{(n)}(y, p)$ reprezintă nucleul iterat de ordinul n:

$$K^{(n)}(y, p) = \int_p^y K(y, s)\, K^{(n-1)}(s, p)\,\mathrm{d}s. \tag{23}$$

Cunoașterea soluției $\Phi(y)$ a ecuației integrale permite obținerea soluției $\varphi(y)$ a ecuației Orr-Sommerfeld prin simplă cvadratură; se folosesc ecuațiile (13) și (16) și rezultă

$$\varphi = \frac{1}{2\alpha^2}\int_0^y \left[(y-p)\,\mathrm{ch}\,\alpha(y-p) - \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\right]\Phi(p)\,\mathrm{d}p + \\ + \frac{A}{2\alpha}\,y\,\mathrm{sh}\,\alpha y + \frac{B}{2\alpha}\left(y\,\mathrm{ch}\,\alpha y - \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha y\right). \tag{24}$$

În expresia soluției (24) intervin constantele arbitrare A și B, ceea ce corespunde faptului că mai sînt de îndeplinit încă două condiții la limită, și anume ultimele condiții (7), $\varphi(2) = \varphi'(2) = 0$. Aceste condiții la limită conduc la un sistem de două ecuații omogene în care necunoscutele sînt constantele A și B. Pentru ca să existe o soluție netrivială este necesar ca determinantul sistemului să fie nul. În felul acesta condițiile la limită furnizează o problemă de valori proprii.

Se rezolvă această problemă cu ajutorul unui calculator numeric. În acest scop se folosește calculatorul FELIX C 256. În figura 2 se prezintă organigrama, iar în tabela 1 rezultatele obținute. În afara programului principal, programul conține patru subrutine, trei subrutine de integrare prin metoda trapezelor, folosind 15 puncte de diviziune (subrutinele notate cu TRAP 2C și TRAP 1C sînt subrutine de integrare în complex, iar subrutina TRAP 1 — de integrare în real) și o subrutină de trasare grafică a curbei $c_i = 0$, într-un sistem de coordonate $\mathcal{R}e^{1/3} - \alpha$. S-a utilizat această scară pentru a prinde mai clar zona numerelor Reynolds mai mici, din apropierea numărului Reynolds critic, și pentru a compara curba neutrală $c_i = 0$ obținută prin metoda propusă cu curba $c_i = 0$ trasată de S. F. Shen [7]. Se menționează că rezultatele lui S. F. Shen au fost confirmate de cercetările teoretice și experimentele ulterioare, iar curba $c_i = 0$ trasată de S. F. Shen este luată drept curbă de referință de un număr mare de cercetători, fiind reprodusă în diferite tratate de prestigiu,

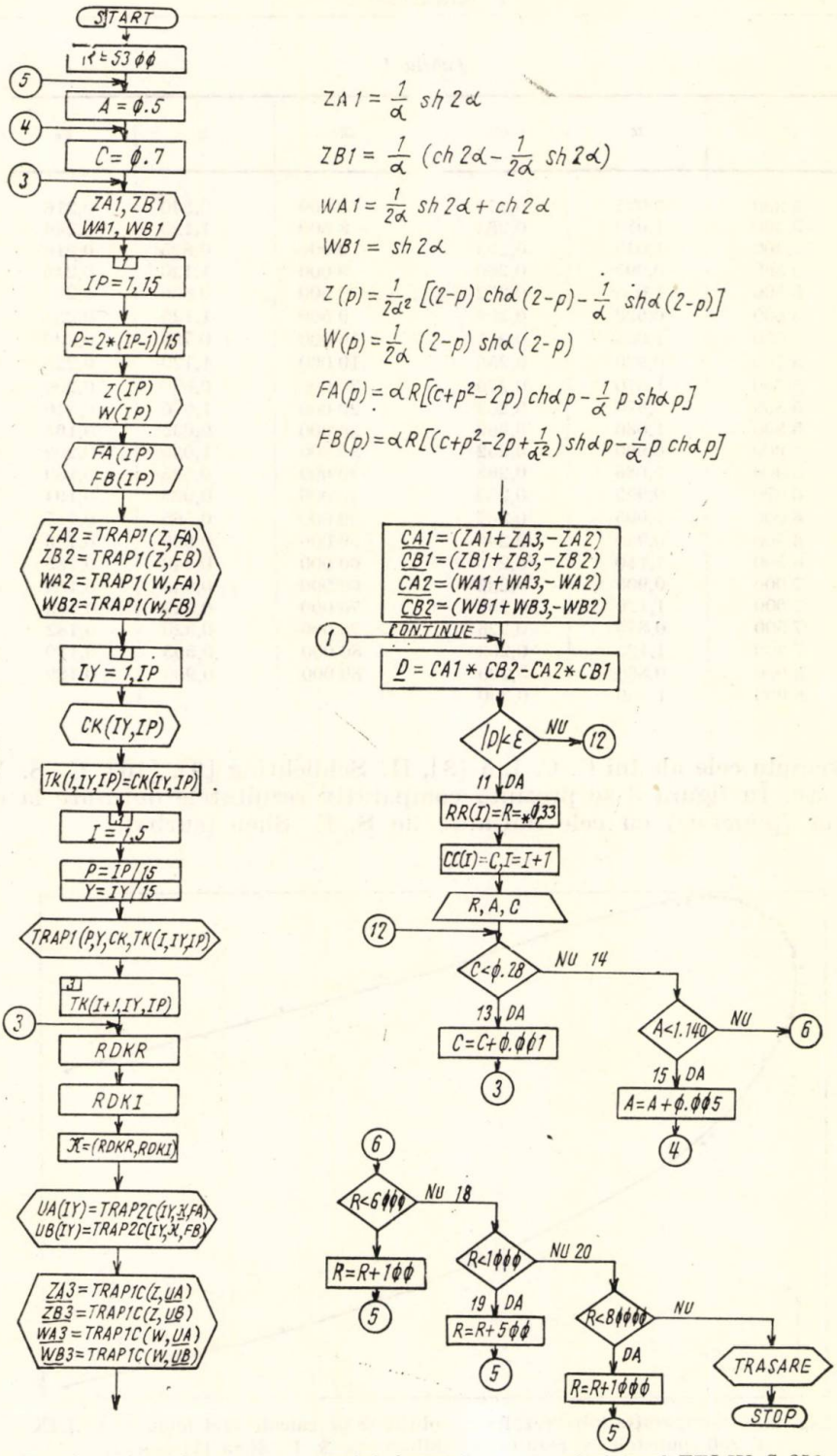


Fig. 2. — Organigrama programului de rezolvare pe calculatorul FELIX C 256 a problemei stabilității curgerii plane Poiseuille prin metoda de obținere a unei soluții exacte a ecuației Orr-Sommerfeld.

Tabela 1

$\mathcal{R}e$	α	c_f	$\mathcal{R}e$	α	c_f
5 300	1,025	0,275	8 500	0,840	0,216
5 400	1,010	0,268	8 500	1,135	0,246
5 400	1,045	0,273	9 000	0,825	0,210
5 500	0,995	0,260	9 000	1,130	0,240
5 500	1,055	0,272	9 500	0,800	0,207
5 600	0,990	0,258	9 500	1,125	0,234
5 600	1,065	0,271	10 000	0,790	0,200
5 700	0,980	0,256	10 000	1,120	0,228
5 700	1,070	0,270	20 000	0,690	0,200
5 800	0,970	0,254	20 000	1,070	0,210
5 800	1,080	0,269	30 000	0,635	0,195
5 900	0,960	0,252	30 000	1,035	0,202
5 900	1,085	0,268	40 000	0,595	0,189
6 000	0,955	0,250	40 000	0,995	0,194
6 000	1,095	0,267	50 000	0,565	0,187
6 500	0,930	0,240	50 000	0,960	0,186
6 500	1,110	0,260	60 000	0,540	0,185
7 000	0,905	0,233	60 000	0,940	0,184
7 000	1,120	0,257	70 000	0,520	0,183
7 500	0,885	0,226	70 000	0,920	0,182
7 500	1,125	0,253	80 000	0,505	0,180
8 000	0,860	0,220	80 000	0,900	0,180
8 000	1,130	0,250			

de exemplu cele ale lui C. C. Lin [8], H. Schlichting [9], [10], C. S. Yih [11] etc. În figura 3 se prezintă comparativ rezultatele obținute la calculator (punctele) cu cele obținute de S. F. Shen (curba).

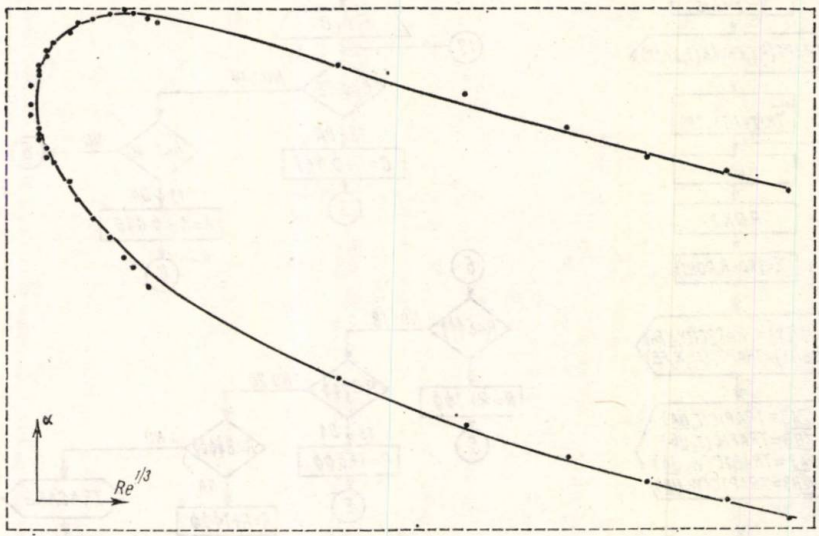


Fig. 3. — Comparație între rezultatele obținute pe calculatorul numeric FELIX C 256 (punctele) și rezultatele obținute de S. F. Shen [7] (curba).

3.2. *Metoda de rezolvare a problemei stabilității curgerii plane Poiseuille prin cercetarea problemei valorilor proprii ale ecuației diferențiale Orr-Sommerfeld cu ajutorul unui calculator analogic.* Se consideră ecuația Orr-Sommerfeld scrisă sub forma sistemului de ecuații scalare (8). La numere Reynolds mari, de exemplu pentru un fluid puțin vîscos, termenii în $\frac{1}{\alpha \mathcal{R}e}$ pot deveni atît de mici încît efectul lor în calculator ar putea fi neglijabil, ceea ce ar ascunde influența numărului Reynolds asupra valorilor proprii. Pentru a considera influența viscozității asupra valorilor proprii se evită inconvenientul semnalat efectuînd schimbarea de variabilă

$$y = \varepsilon x, \quad \text{cu } \varepsilon = \frac{1}{\sqrt[4]{\alpha \mathcal{R}e}}. \tag{25}$$

Noua variabilă x variază de la 0 la $2\sqrt[4]{\alpha \mathcal{R}e}$, pentru o variație corespunzătoare a lui y între 0 și 2. Ecuațiile (8) se scriu sub forma

$$\frac{d^4\varphi_r}{dx^4} - \left[\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}\, c_i + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}}\right]\frac{d^2\varphi_r}{dx^2} + \sqrt{\alpha \mathcal{R}e}\,(U - c_r)\frac{d^2\varphi_i}{dx^2} +$$

$$+ \alpha^2\left[c_i + \frac{\alpha^2}{\alpha \mathcal{R}e}\right]\varphi_r - \alpha^2\left[U + \frac{U''}{\alpha^2} - c_r\right]\varphi_i = 0,$$

$$\frac{d^4\varphi_i}{dx^4} - \left[\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}\, c_i + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}}\right]\frac{d^2\varphi_i}{dx^2} - \sqrt{\alpha \mathcal{R}e}\,(U - c_r)\frac{d^2\varphi_r}{dx^2} +$$

$$+ \alpha^2\left[c_i + \frac{\alpha^2}{\alpha \mathcal{R}e}\right]\varphi_i + \alpha^2\left[U + \frac{U''}{\alpha^2} - c_r\right]\varphi_r = 0. \tag{26}$$

În aceste ecuații profilul vitezelor $U(y)$ are expresia $U = -y^2 + 2y$. Se transcriu aceste ecuații în variabile mașină, sub forma normală cerută de tehnica calculatorului „Pace"

$$\frac{d(\lambda_{\varphi_i}\varphi_i)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{\varphi_i}}{\lambda_{y_1}}(\lambda_{y_1} y_1),$$

$$\frac{d(\lambda_{y_1} y_1)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_1}}{\lambda_{y_2}}(\lambda_{y_2} y_2),$$

$$\frac{d(\lambda_{y_2} y_2)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_2}}{\lambda_{y_3}}(\lambda_{y_3} y_3),$$

$$\frac{d(\lambda_{y_3} y_3)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{y_2}}\left[\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}\, c_i + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}}\right](\lambda_{y_2} y_2) - \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{x_2}}\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}\, c_r(\lambda_{x_2} x_2) +$$

$$+ \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{x_2}}\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}(\lambda_{x_2} x_2)\left[\frac{\lambda_x x}{100}\right] - \frac{1}{\beta}\frac{100\lambda_{y_3}}{\lambda_{x_2}\lambda_z}(\lambda_{x_2} x_2)\left[\frac{\lambda_z z}{100}\right] -$$

$$- \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{\varphi_i}}\alpha^2\left[c_i + \frac{\alpha^2}{\alpha \mathcal{R}e}\right](\lambda_{\varphi_i}\varphi_i) + \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{\varphi_r}}(2 + \alpha^2 c_r)(\lambda_{\varphi_r}\varphi_r) -$$

$$- \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{\varphi_r}}\alpha^2(\lambda_{\varphi_r}\varphi_r)\left[\frac{\lambda_x x}{100}\right] + \frac{100}{\beta\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}}\frac{\lambda_{y_3}}{\lambda_{\varphi_r}\lambda_z}\alpha^2(\lambda_{\varphi_r}\varphi_r)\left[\frac{\lambda_z z}{100}\right],$$

$$\lambda_z z = \frac{\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}}{100}\lambda_z(\lambda_x x)\frac{\lambda_x x}{100},$$

$$\frac{d(\lambda_z x)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{100}{\sqrt[4]{\alpha \mathcal{R}e}},$$

$$\frac{d(\lambda_{\varphi_r}\varphi_r)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{\varphi_r}}{\lambda_{x_1}}(\lambda_{x_1} x_1),$$

$$\frac{d(\lambda_{x_1} x_1)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_1}}{\lambda_{x_2}}(\lambda_{x_2} x_2),$$

$$\frac{d(\lambda_{x_2} x_2)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda x_2}{\lambda_{x_3}}(\lambda_{x_3} x_3),$$

$$\frac{d(\lambda_{x_3} x_3)}{d\tau} = \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{x_2}}\left[\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}\, c_i + \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}}\right](\lambda_{x_2} x_2) - \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{y_2}}\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}\, c_r(\lambda_{y_2} y_2) -$$

$$- \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{y_2}}\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}(\lambda_{y_2} y_2)\left[\frac{\lambda_x x}{100}\right] + \frac{1}{\beta}\frac{100\lambda_{x_3}}{\lambda_{y_2}\lambda_z}(\lambda_{y_2} y_2)\left[\frac{\lambda_z z}{100}\right] -$$

$$- \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{\varphi_r}}\alpha^2\left[c_i + \frac{\alpha^2}{\alpha \mathcal{R}e}\right](\lambda_{\varphi_r}\varphi_r) - \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{\varphi_i}}(2 + \alpha^2 c_r)(\lambda_{\varphi_i}\varphi_i) +$$

$$+ \frac{1}{\beta}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{\varphi_i}}\alpha^2(\lambda_{\varphi_i}\varphi_i)\left[\frac{\lambda_x x}{100}\right] - \frac{100}{\beta\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}}\frac{\lambda_{x_3}}{\lambda_{\varphi_i}\lambda_z}\alpha^2(\lambda_{\varphi_i}\varphi_i)\left[\frac{\lambda_z z}{100}\right]. \quad (27)$$

Alegerea factorilor de scară se face ținînd seama de caracteristicile de multiplicare a potențiometrelor și de mărimea rezistențelor de intrare ale amplificatorilor: $\lambda_{\varphi_r} = \lambda_{\varphi_i} = \lambda_{x_2} = \lambda_{y_2} = \beta = 5$; toți ceilalți factori sînt egali cu 1. Se iau ca parametri variabili

$$\delta_1 = -\frac{1}{\beta\lambda_{x_2}}\left[\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}\, c_i - \frac{2\alpha^2}{\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}}\right], \quad \delta_2 = -\frac{\alpha^2}{\beta\lambda_{\varphi_i}}\left[c_i - \frac{\alpha^2}{\alpha \mathcal{R}e}\right]. \quad (28)$$

Valorile α, $\mathcal{R}e$ și c_r sînt fixate în gamele $0{,}04 < \alpha^2 < 1{,}25$; $5 < \sqrt[4]{\alpha \mathcal{R}e} < 15$; $0{,}1 < c_r < 0{,}4$. În final se obțin valorile proprii c_i corespunzătoare.

Schema de cablaj (fig. 4) este astfel constituită, încît să permită afișarea pe panoul de cablaj a sistemului de „ecuații mașină" (27). Rezul-

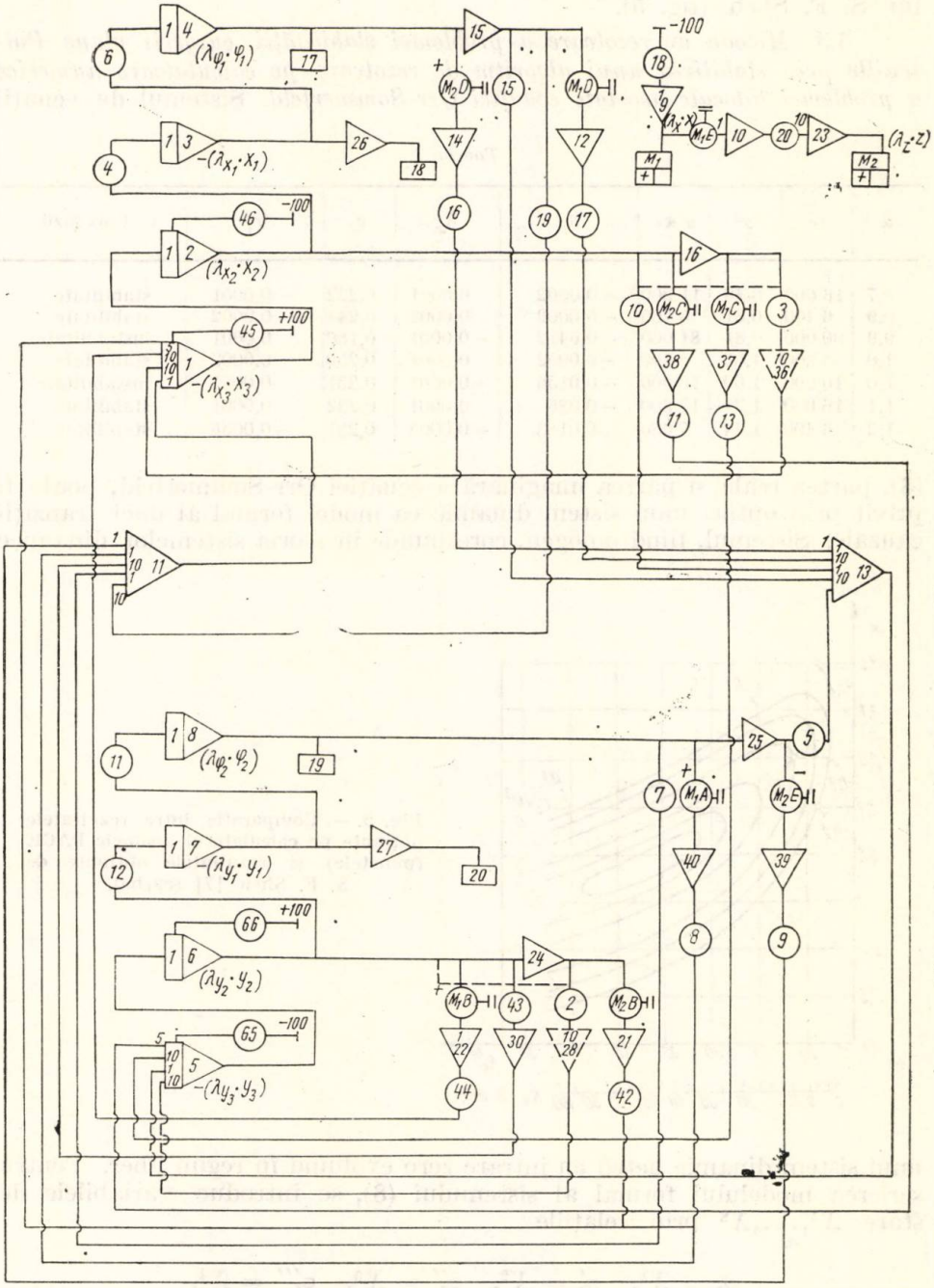


Fig. 4. — Schema de cablaj pentru rezolvarea pe calculatorul analogic PACE a problemei stabilității curgerii plane Poiseuille.

tatele obținute sînt prezentate în tabela 2 și sînt comparate cu cele ale lui S. F. Shen (fig. 5).

3.3. *Metoda de rezolvare a problemei stabilității curgerii plane Poiseuille prin stabilirea unui algoritm de rezolvare pe calculatoare numerice a problemei bilocale asociate ecuației Orr-Sommerfeld.* Sistemul de ecuații

Tabela 2

α	$\mathcal{R}e$	α^2	$\alpha\,\mathcal{R}e$	δ_1	δ_2	c_r	c_i	Concluzii
0,7	16 000	0,49	11 200	−0,0002	0,0001	0,222	−0,0001	stabilitate
0,9	6 400	0,81	5 760	−0,0002	0,0002	0,244	−0,0002	stabilitate
0,9	90 000	0,81	81 000	−0,6412	−0,0001	0,180	0,0001	instabilitate
1,0	5 300	1,00	5 300	−0,0052	0,0001	0,250	−0,0002	stabilitate
1,0	10 000	1,00	10 000	−0,0156	−0,0001	0,251	0,0037	instabilitate
1,1	16 000	1,21	17 600	−0,036	0,0001	0,232	−0,0001	stabilitate
1,2	6 400	1,44	7 680	0,0183	−0,0003	0,231	−0,0056	stabilitate

(8), partea reală și partea imaginară a ecuației Orr-Sommerfeld, poate fi privit prin optica unui sistem dinamic ca model formal al unei tranziții cauzale. Sistemul, fiind omogen, corespunde în teoria sistemelor dinamice

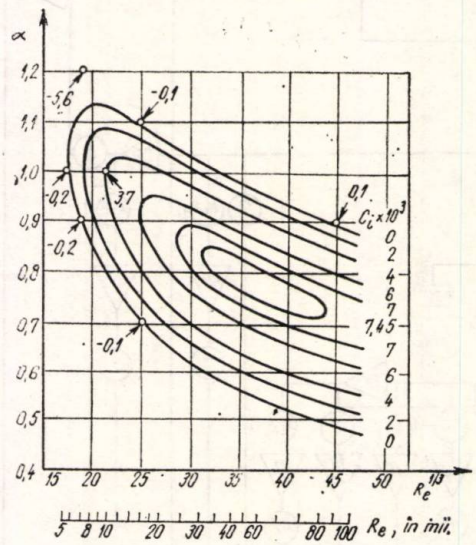


Fig. 5. — Comparație între rezultatele obținute pe calculatorul analogic PACE (punctele) și rezultatele obținute de S. F. Shen [7] (curba).

unui sistem dinamic neted cu intrare zero evoluînd în regim liber. Pentru scrierea modelului formal al sistemului (8), se introduc variabilele de stare $X^1,\ldots,X^8$ prin relațiile

$$\varphi_r = X^1, \quad \varphi_r' = X^2, \quad \varphi_r'' = X^3, \quad \varphi_r''' = X^4,$$
$$\varphi_i = X^5, \quad \varphi_i'' = X^6, \quad \varphi_i'' = X^7, \quad \varphi_i''' = X^8. \tag{29}$$

Sistemul (8) se scrie sub forma

$$\frac{dX^1}{dy} = X^2,$$

$$\frac{dX^2}{dy} = X^3,$$

$$\frac{dX^3}{dy} = X^4,$$

$$\frac{dX^4}{dy} = \alpha \mathcal{R}e\left(c_i + \frac{2\alpha^2}{\alpha \mathcal{R}e}\right) X^3 - \alpha \mathcal{R}e(U - c_r) X^7 - \alpha^3 \mathcal{R}e \left(c_i + \frac{\alpha^2}{\alpha \mathcal{R}e}\right) X^1 +$$

$$+ \alpha^3 \mathcal{R}e\left(U + \frac{U''}{\alpha^2} - c_r\right) X^5,$$

$$\frac{dX^5}{dy} = X^6,$$

$$\frac{dX^6}{dy} = X^7,$$

$$\frac{dX^7}{dy} = X^8,$$

$$\frac{dX^8}{dy} = \alpha \mathcal{R}e\left(c_i + \frac{2\alpha^2}{\alpha \mathcal{R}e}\right) X^7 + \alpha \mathcal{R}e(U - c_r) X^3 - \alpha^3 \mathcal{R}e\left(c_i + \frac{\alpha^2}{\alpha \mathcal{R}e}\right) X^5 -$$

$$- \alpha^3 \mathcal{R}e\left(U + \frac{U''}{\alpha^2} - c_r\right) X^1. \tag{30}$$

În spaţiul 8-dimensional acest sistem se scrie sub forma vectorial matriceală

$$\frac{dX}{dy} = A(y, \alpha, \mathcal{R}e, c_r, c_i)\, X. \tag{31}$$

Condiţiile la limită corespunzătoare curgerii plane Poiseuille (9) se scriu sub forma

$$X^1(0) = 0, \quad X^2(0) = 0, \quad X^3(0) = 0, \quad X^4(0) = 0,$$
$$X^1(2) = 0, \quad X^2(2) = 0, \quad X^3(2) = 0, \quad X^4(2) = 0. \tag{32}$$

Condițiile la limită ale problemei fizice devin condiții inițiale și terminale în modelul de sistem neted (31). Se ajunge deci la o problemă liniară bilocală condiționată de valorile proprii $c = c_r + ic_i$. Se consideră cazul reprezentativ $c_i = 0$. Problema bilocală se parametrizează numai de numărul $\mathcal{R}e$, rezolvarea acesteia pentru diferite valori ale lui $\mathcal{R}e$ constînd în repetarea algoritmului pentru $\mathcal{R}e$ fixat la diferite valori, fiecărei valori a numărului $\mathcal{R}e$ corespunzîndu-i o pereche de valori (c_r, α).

Prin urmare, problema (31) cu condițiile la limită (32) se reduce la o problemă bilocală singulară descrisă de ecuația matriceală

$$\frac{dX}{dy} = A(y, c_r, \alpha)\, X, \tag{33}$$

cu condițiile la limită de tip bilocal, scrise pentru vectorii coloană din spațiul 8-dimensional

$$X_1 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \mu \end{array}\right], \quad X_2 = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \nu \end{array}\right], \tag{34}$$

în care vectorii 4-dimensionali μ și ν sînt necunoscuți, iar vectorii 4-dimensionali 0 din vectorii X_1 și X_2 sînt asociați cu anularea derivatelor corespunzătoare funcțiilor φ_r și φ_i la cele două capete.

Dacă se notează cu Φ matricea fundamentală a sistemului, atunci exprimarea problemei prin condiții terminale se scrie sub forma

$$\left[\begin{array}{cc} \Phi_{11}(c_r, \alpha) & \Phi_{12}(c_r, \alpha) \\ \Phi_{21}(c_r, \alpha) & \Phi_{22}(c_r, \alpha) \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \mu \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline \nu \end{array}\right], \tag{35}$$

sau, după rezolvarea produsului matriceal, sub forma $\Phi_{12}(c_r, \alpha)\mu = 0$, de unde rezultă

$$\det \Phi_{12}(c_r, \alpha) = 0. \tag{36}$$

Această ecuație are o soluție unică sub forma unui minim absolut în perechea (c_r, α), minim care este găsit cu ajutorul metodei factoriale a gradientului.

În consecință, algoritmul conține două părți principale: prima parte constă în construcția matricei fundamentale prin algoritmul Runge-Kutta corespunzător unei inițializări de versori unitari și unei perechi (c_r, α), iar a doua parte constă în separarea matricei Φ_{12} din matricea Φ și minimizarea modulului determinantului acestei matrice (printr-un set de patru teste).

Organigrama programului principal este prezentată în figura 6. Programul a fost rulat pe calculatorul IMB 360 care conține subrutina Runge-Kutta (cu îmbunătățirea Gill) ca subrutină de bibliotecă. Rezultatele obținute sînt prezentate în tabela 3. Aceste rezultate sînt comparate cu rezultatele lui S. F. Shen în figura 7.

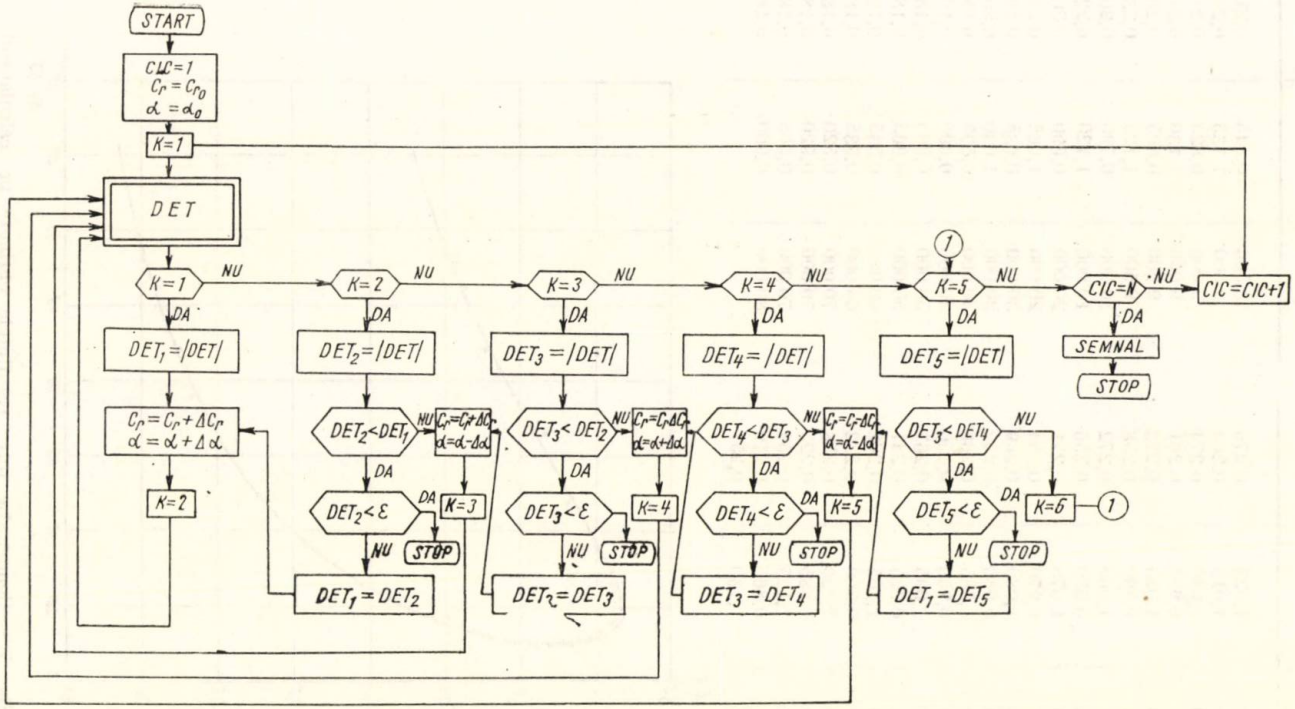


Fig. 6. — Organigrama programului de rezolvare pe calculatorul IMB 360 a problemei stabilității curgerii plane Poiseuille.

Tabela 3

Re	α	c_r	Re	α	c_r
5 300	1,025	0,275	8 500	0,845	0,216
5 400	1,015	0,269	8 500	1,135	0,246
5 400	1,040	0,274	9 000	0,825	0,210
5 500	0,995	0,261	9 000	1,130	0,241
5 500	1,055	0,273	9 500	0,805	0,207
5 600	0,990	0,258	9 500	1,125	0,235
5 600	1,065	0,272	10 000	0,790	0,204
5 700	0,980	0,256	10 000	1,120	0,228
5 700	1,075	0,271	20 000	0,690	0,200
5 800	0,970	0,254	20 000	1,065	0,210
5 800	1,080	0,269	30 000	0,635	0,196
5 900	0,960	0,252	30 000	1,030	0,203
5 900	1,085	0,268	40 000	0,595	0,190
6 000	0,950	0,250	40 000	0,990	0,195
6 000	1,095	0,267	50 000	0,565	0,187
6 500	0,925	0,241	50 000	0,965	0,187
6 500	1,105	0,262	60 000	0,535	0,186
7 000	0,900	0,232	60 000	0,935	0,185
7 000	1,120	0,258	70 000	0,520	0,184
7 500	0,885	0,225	70 000	0,920	0,182
7 500	1,125	0,254	70 000	0,505	0,181
8 000	0,865	0,219	80 000	0,900	0,180
8 000	1,130	0,251			

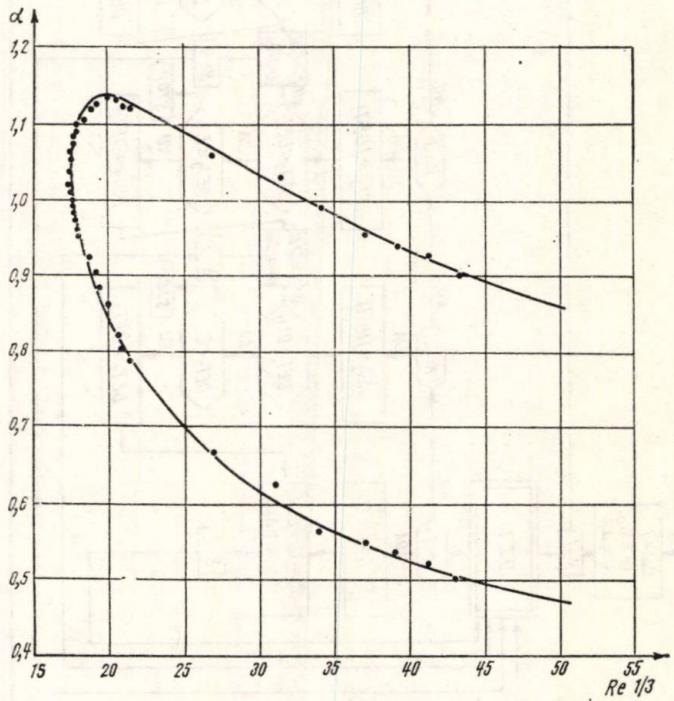


Fig. 7. — Comparație între rezultatele obținute pe calculatorul numeric IMB 360 (punctele) și rezultatele obținute de S. F. Shen [7] (curba).

4. COMPARAȚIE CU ALTE METODE DE STUDIU AL STABILITĂȚII CURGERII PLANE POISEUILLE

Metodele clasice de soluționare a ecuației Orr-Sommerfeld constau în căutarea soluției acestei ecuații sub forma unor dezvoltări în serie. O astfel de metodă a fost aplicată prima dată în 1924 de W. Heisenberg [12] și fundamentată mai tîrziu de C. C. Lin [13], și W. H. Reid [14]. Soluții asimptotice ale ecuației Orr-Sommerfeld au mai fost obținute de C. C. Lin [8], W. P. Graebel [15]. Metodele asimptotice permit clasificarea celor patru soluții φ_1, φ_2, φ_3 și φ_4 ale ecuației (6) în două categorii: soluțiile notate cu φ_1 și φ_2 se numesc soluții „lente" sau „nevîscoase" deoarece pentru numere Reynolds mari sînt de ordinul de mărime $\frac{1}{\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}}$, iar soluțiile notate cu φ_3 și φ_4 se numesc soluții „rapide" sau „vîscoase", deoarece sînt de ordinul de mărime $\sqrt{\alpha \mathcal{R}e}$.

Determinarea celor patru soluții ale ecuației Orr-Sommerfeld este extrem de dificilă; teoria constructivă a soluției constituie o problemă matematică de mare dificultate, deoarece, pe de o parte, soluția trebuie să fie uniformă pe tot domeniul de definiție și, pe de altă parte, trebuie să dea expresii calculabile numeric. Pentru determinarea soluțiilor nevîscoase φ_1 și φ_2 se pleacă de la ecuația lui Rayleigh

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = 0, \tag{37}$$

obținută din ecuația Orr-Sommerfeld (6) prin neglijarea membrului drept (deci se neglijează termenii care depind de viscozitate). Soluțiile nevîscoase φ_1 și φ_2 nu țin seama de influența viscozității asupra evoluției perturbației și satisfac doar două din cele patru condiții la limită. Ele pot fi obținute prin metode diferite, de exemplu sub forma unor serii de puteri în α^2 (W. Heisenberg [12]), prin metoda lui Frobenius (W. Tollmien [16]), prin metoda reducerii și a folosirii calculului matriceal (A. Georgescu [17]). Pentru determinarea soluțiilor vîscoase φ_3 și φ_4 se pleacă de la ecuația

$$\varphi'''' - i\alpha\mathcal{R}e\,(U - c)\,\varphi'' = 0, \tag{38}$$

obținută din ecuația Orr-Sommerfeld (6) prin înlăturarea tuturor termenilor care depind de viscozitate cu excepția termenului cu cea mai mare valoare (W. Tollmien [16]). Soluțiile vîscoase φ_3 și φ_4 țin seama de partea esențială a influenței viscozității asupra mișcării perturbatoare și satisfac celor patru condiții la limită. Ele pot fi exprimate cu ajutorul funcțiilor Hankel (calculate și tabelate de O. Tietjens [18], cu unele corecții ulterioare aduse de H. Schlichting [19] și H. Holstein [20]), cu ajutorul funcțiilor lui Airy (W. H. Reid [14]) sau pot fi obținute pe calea integrării prin metode aproximative (R. C. Lock [21]).

Problema stabilității curgerii plane Poiseuille a constituit obiect de preocupare pentru un număr mare de cercetători, pentru rezolvarea ei utilizîndu-se un aparat matematic modern, tehnica electronică de calcul sau investigații experimentale. Astfel C. C. Lin [22] fundamentează teoria soluțiilor asimptotice, J. Wattson [23] utilizează metoda

perturbaţiilor finite, L. M. Lee şi W. C. Reynolds [24] folosesc o metodă variaţională, P. R. Nachtsheim [25] dezvoltă o metodă de valori iniţiale în vederea tratării numerice a ecuaţiei Orr-Sommerfeld, K. T. Kuen [26] aplică metoda scărilor multiple pentru obţinerea unei soluţii sub forma dezvoltării în serie, L. H. Thomas [27] transformă ecuaţia Orr-Sommerfeld într-un sistem de ecuaţii cu diferenţe finite pe care-l integrează cu ajutorul unui calculator digital, R. S. Leite [28] pune la punct o tehnică de mare fineţe pentru cercetarea experimentală a stabilităţii curgerii plane Poiseuille.

Metoda propusă pentru rezolvarea problemei stabilităţii curgerii plane Poiseuille prin reducerea rezolvării ecuaţiei diferenţiale Orr-Sommerfeld la rezolvarea unei ecuaţii integrale Volterra de speţa a doua este simplă. Soluţia obţinută este exactă, la obţinerea ei nefiind impuse condiţii restrictive sau simplificatoare. Se menţionează că în literatură nu este evidenţiată o metodă de soluţionare exactă a ecuaţiei Orr-Sommerfeld. Se citează, de exemplu, lucrările lui C. C. Lin [8], H. Schlichting [9], J. T. Stuart [20] şi S. Chandrasekhar [30], Şt. N. Săvulescu [31], A. Georgescu [17], care fac o minuţioasă trecere în revistă a metodelor de rezolvare a ecuaţiei Orr-Sommerfeld. Prin reducerea problemei soluţionării ecuaţiei Orr-Sommerfeld la problema soluţionării unei ecuaţii integrale Volterra, pentru care sînt cunoscute procedee numerice, iterative, de rezolvare, metoda propusă permite utilizarea calculatorului numeric.

Metoda de rezolvare a problemei stabilităţii curgerii plane Poiseuille prin cercetarea problemei valorilor proprii ale ecuaţiei diferenţiale Orr-Sommerfeld cu ajutorul unui calculator analogic este o metodă utilă. Pe baza cercetării intensive a unui material bibliografic bogat se poate afirma că în literatură nu este semnalată modelarea pe calculatorul analogic a ecuaţiei Orr-Sommerfeld. În comparaţie cu alte lucrări, volumul de lucru necesitat de rezolvarea acestei probleme este relativ mic.

Metoda propusă pentru rezolvarea problemei stabilităţii hidrodinamice cu ajutorul calculatoarelor numerice se dovedeşte a fi utilă, alături de alte metode întîlnite în literatură. Algoritmul de calcul este construit pe baza utilizării unor rezultate din teoria sistemelor dinamice, iar programul pe calculator este simplu, conţinînd subrutine care se află, obişnuit, în memoria calculatorului.

Rezultatele obţinute prin aplicarea celor trei metode sînt în bună concordanţă între ele şi cu rezultatele obţinute de S. F. Shen [7]. Numărul Reynolds critic obţinut este acelaşi pentru fiecare din cele trei metode, $\mathcal{R}e_{cr} = 5\,300$, şi este foarte apropiat de valorile indicate în literatură ($\mathcal{R}e_{cr} = 5\,314$, C. C. Lin [13] şi $\mathcal{R}e = 5\,780$, L. M. Thomas [27]).

5. CONCLUZII

Metoda propusă pentru rezolvarea problemei stabilităţii curgerii plane Poiseuille prin reducerea rezolvării ecuaţiei Orr-Sommerfeld la rezolvarea unei ecuaţii integrale Volterra prezintă cîteva avantaje: construcţia soluţiei este simplă; la obţinerea soluţiei nu au fost considerate ipoteze simplificatoare sau restrictive; soluţia este exactă; metoda poate

fi transpusă pentru rezolvarea pe calculator numeric; curba neutrală $c_i = 0$ poate fi trasată grafic direct de calculator.

Metoda propusă pentru studiul stabilității curgerii plane Poiseuille bazată pe cercetarea problemei valorilor proprii ale ecuației diferențiale Orr-Sommerfeld cu ajutorul unui calculator analogic permite abordarea directă a problemei stabilității și anume spre deosebire de metodele clasice care determină mai întîi soluția ecuației Orr-Sommerfeld și numai după aceea, pentru fiecare pereche de valori α și $\mathcal{R}e$, determină valorile proprii ale problemei, metoda preconizată permite găsirea directă a acestor valori.

Metoda propusă pentru rezolvarea problemei stabilității curgerii plane Poiseuille cu ajutorul calculatoarelor numerice stabilește algoritmul de calcul care permite stabilirea unui program care dă posibilitatea obținerii unui număr mare de puncte de pe curba neutrală $c_i = 0$, astfel încît aceasta poate fi trasată suficient de precis și în acest fel se determină cu suficientă exactitate numărul Reynolds critic de stabilitate.

Aceste trei metode sînt utile pentru că permit rezolvarea efectivă a problemei de valori proprii asociate ecuației Orr-Sommerfeld. Volumul de lucru necesitat de fiecare din cele trei metode este relativ mic. Rezultatele obținute sînt în bună concordanță cu rezultatele teoretice și experimentale din literatură.

Primită în redacție la 29 aprilie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. W. Mc. F. Orr, *The stability or instability of the steady motions of a liquid*, Proc. R. Irish. Acad. A **27**, 9–27, 69–138 (1906–1907).
2. A. Sommerfeld, *Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegung*, Atti del Congr. Internat. dei Mat., Roma, (1908).
3. V. Panaitescu, *Asupra stabilității liniare a unei curgeri laminare plane*, St. cer. mec. apl., **30**, *3*, 549–558 (1971).
4. J. Florea, V. Panaitescu, *Sur l'étude de la stabilité du mouvement d'un fluide à l'aide des calculateurs analogiques*, Bul. Inst. politeh. București, **XXXV**, *3*, 75–90 (1973).
5. V. Panaitescu, *Contribuții la studiul mișcării fluidelor viscoase în domeniul numerelor Reynolds mici și mijlocii cu referire la tranziția de la mișcarea laminară la mișcarea turbulentă*, Teză de doctorat, București (1974).
6. V. Panaitescu, *Metodă de rezolvare a stabilității hidrodinamice prin obținerea unei soluții exacte a ecuației Orr-Sommerfeld*, Bul. Inst. politeh., București, sub tipar (1974).
7. S. F. Shen, *Calculated amplified oscilations in the plane Poiseuille and Blasius flows*, Journ. Aeronaut. Sci., **21**, *1*, 62–64 (1954).
8. C. C. Lin, *The theory of hydrodynamic stability*, Cambridge University Press (1955).
9. H. Schlichting, *Entstehung der Turbulenz*, *Handbuch der Physik* (ed. S. Flüge) Bd. VIII/1, Strömungsmechanik I, Springer-Verlag, Berlin — Göttingen — Heidelberg, 351–450 (1959).
10. H. Schlichting, *Boundary-layer theory* (cap. 16, 17), ed. a VI-a, Mc Graw-Hill (1968).
11. C. S. Yih, *Fluid Mechanics. A concise introduction to the theory*, Mc Graw-Hill Book Company (1969).
12. W. Heinsenberg *Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen*, Ann. Phys., **74**, *4*, 577–627 (1924).
13. C. C. Lin, *On the stability of two dimensional parallel flows*, Part. I, II, III, Quart. Appl. Math. *2*, 117–142; *3*, 218–234; *3*, 277–301 (1945, 1946).
14. W. H. Reid, *Asymptoic approximation in hydrodynamic stability*, *Non Equilibrium Thermodynamics, Variational Techniques and Stability*, Univ. Chicago (1966).

15. W. P. GRAEBEL, *On determination of the characteristic equations for the stability of parallel flows*, J. Fl. Mech., **24**, *3*, 497–508 (1966).
16. W. TOLLMIEN, *Über die Entstehung der Turbulenz*, *Nachr. der Gesell. der Wissensch.*, Götting., Math.-Phys. Klasse, *1*, 21–44 (1929).
17. A. GEORGESCU, *Contribuţii la studiul stabilităţii liniare a mişcării fluidelor*, St. cerc. mat., **22**, *9*, 1247–1333 (1970).
18. O. TIETJENS, *Beiträge zur Entstehung der Turbulent*, ZAMM, *5*, 200–217 (1925).
19. H. SCHLICHTING, *Amplitudenversteilung und Energiebilanz der kleinen Storungen bei der Plattenströmung*, Nach. Ges. Wiss. Gött. Math. Physik. Kl., Fachgruppe **I**, *1*, 47–48 (1935).
20. H. HOLSTEIN, *Über die äussere und innere Reibungschicht bei Störungen laminarer Strömungen*, Z. angew. Math. Mech., **30**, 25–49 (1950).
21. R. C. LOCK, *Hydrodynamic stability of the flow in the boundary layer between parallel streams*, Proc. Camb. Phil. Soc. **50**, 105–124 (1954).
22. C. C. LIN, *On uniformly valid asymptotic solutions of the Orr-Sommerfeld equation*, Proc. 9-th Intern. Congress. Appl. Mech., Bruxelles, **1**, 136–148 (1956).
23. J. WATSON, *On spatially-growning finite disturbances in plane. Poiseuille flow*, J. Fl. Mech., **14**, 211–221 (1962).
24. L. H. LEE, W. C. REYNOLDS, *A variational method for investigating the stability of parallel flow*, Stanford Univ. Termosciences Divisions, Dept. Mech. Eng. Rep. FM-*1* (1964).
25. P. R. NACHTSHEIM, *An initial-value method for the numerical treatment of the Orr-Sommerfeld equation for the case of plane Poiseuille flow*, NASA TN D-*2414* (1964).
26. K. T. KUEN, *On the asymptotic solution of the Orr-Sommerfeld equation by the method of multiple-scales*, J. Fluid Mech., **34**, 145–158 (1968).
27. L. H. THOMAN, *The stability of plane Poiseuille flow*, Physical Review, **91**, *4* (1953).
28. R. J. LEITE, *An experimental investigation of the stability of Poiseuille flow*, J. Fl. Mech., *5*, 81–96 (1959).
29. J. T. STUART, *Hydrodynamic stability*, Appl. Mech. Review, *7* (1966).
30. S. CHANDRASEKHAR, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Clarendon Press, Oxford (1961).
31. Ş. N. SĂVULESCU, *Tranziţia de la scurgerea laminară la cea turbulentă*, Editura Academiei R.S.R., Bucureşti 1968.

FUNCȚII DE RUGOZITATE PENTRU SISTEMATIZAREA CALCULULUI REZISTENȚEI HIDRAULICE A CONDUCTELOR TEHNICE

de V. GHEORGHIU

Institutul politehnic „Traian Vuia" Timișoara

În cercetarea rezistenței hidraulice a conductelor apar două probleme : funcția de rugozitate și calculul coeficientului λ.

Conductanța hidraulică — ca mărime pregătitoare — are ecuația de definiție $\varkappa = 1/2\sqrt{\lambda}$ în regim mixt, și valorile limită :

$$\lim \varkappa = \varkappa_0 \quad (k \to 0,\ s \to -\infty) \qquad \text{și} \qquad \lim \varkappa = \varkappa_r \quad (\mathcal{R}e \to \infty,\ s \to +\infty),$$

relații în care $s = \varkappa_0 - \varkappa_r$ este parametrul de rugozitate al conductei.

Noile funcții de rugozitate se obțin prin introducerea diferențelor de conductanțe hidraulice

$$\Delta_0 = \varkappa_0 - \varkappa = \log(1 + 10^s) \qquad \text{și} \qquad \Delta_r = \varkappa_r - \varkappa = \log(1 + 10^{-s})$$

și pot servi la calculul direct al coeficientului λ prin relația generală

$$\varkappa = \lim_{|s| \to \infty} \varkappa - \Delta = 1/2\sqrt{\lambda},$$

cu interpretări distincte pentru $s > 0$ și $s < 0$.

Corecția

$$\Delta = \log(1 + 10^{-|s|}) = 0{,}31\ e^{-2|s|}$$

este neglijabilă pentru $|s| \geqslant 1{,}3$, condiție care definește practic regimul mixt la intervalul $s \in [-1{,}3,\ 1{,}3]$.

Cu acest ultim rezultat se completează o variantă sistematizată a relației funcție de rugozitate — rezistență hidraulică la conductele tehnice.

1. INTRODUCERE

Relația criterială a pierderii de presiune în conducte

$$\mathcal{E}_u = \frac{l}{d}\,\lambda\,(\mathcal{R}e,\ K) \tag{1}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 2, 1976, P. 207–219

are valabilitate practică în funcţie de cunoaşterea ecuaţiei coeficientului de rezistenţă

$$\lambda = f(\mathcal{R}e, K). \tag{2}$$

În ipoteza rugozităţii nisipului, remarcabilele cercetări experimentale ale lui Nikuradze au dus la prima reprezentare completă a fenomenului de rezistenţă hidraulică în conducte, sub forma unei familii de curbe λ $(\mathcal{R}e, K)$ de parametru K.

L. Prandtl dă o nouă interpretare rezultatelor lui Nikuradze, ajungînd, pe calea analizei dimensionale şi a similitudinii hidrodinamice, la conceptul „funcţiei de rugozitate"

$$y = f(x), \tag{3}$$

o expresie simplă a modelului matematic, cu două variabile caracteristice.

Prima verificare a existenţei funcţiei (3), fără cunoaşterea formei analitice, s-a făcut prin interpretarea grafică a curbelor lui Nikuradze.

Pe linia directoare a acestor cercetări clasice s-au elaborat multe lucrări, pentru elucidarea trecerii de la cazul particular al rugozităţii nisipului, la problemele generale ale rugozităţii tehnice.

În lucrare se aduc contribuţii la cercetarea rugozităţii tehnice, problemă importantă pentru hidraulica şi economia conductelor.

2. RELAŢIA MODEL FIZIC—MODEL MATEMATIC LA CONDUCTELE TEHNICE

2.0. Modelul fizic al mişcării în conductele cilindrice circulare este dat de un nucleu turbulent axial, limitat de un strat laminar la perete, cu efecte determinante asupra evoluţiei fenomenului. Într-adevăr, turbulenţa, ca rezultantă a viscozităţii fluidului şi rugozităţii pereţilor, se dezvoltă în regim neted, tranzitoriu sau pătratic, după cum acoperirea laminară a rugozităţilor este totală, parţială sau neglijabilă. Dar nu numai atenuarea laminară a efectului rugozităţii ci şi structura suprafeţei pereţilor influenţează evoluţia fenomenului.

În graficul funcţiei de rugozitate — varianta Prandtl — cu variabilele

$$H_x = K\,\mathcal{R}e\sqrt{\lambda} = 2\sqrt{2}\,u_* k/\nu \qquad \text{şi} \qquad y = 1/\sqrt{\lambda} + 2\log K,$$

se evidenţiază următoarele aspecte (fig. 1-A):

a. Curba rugozităţii uniforme a nisipului se prezintă cu cele trei faze distincte ale turbulenţei, în domeniul finit al variabilelor. Arcul cu inflexiune al regimului tranzitoriu este tangent la dreapta rugozităţii nule din punct de vedere hidraulic şi la dreapta rugozităţii totale.

b. Curba rugozităţii neuniforme a conductelor tehnice are o variaţie monotonă şi se înscrie asimptotic în unghiul format de dreptele reprezen-

tative ale regimurilor simple. Convergența asimptotică este însă rapidă, așa că, din punct de vedere practic, se pot stabili limitele unui regim turbulent tranzitoriu, prin condiționarea abaterii maxime a coeficientului λ.

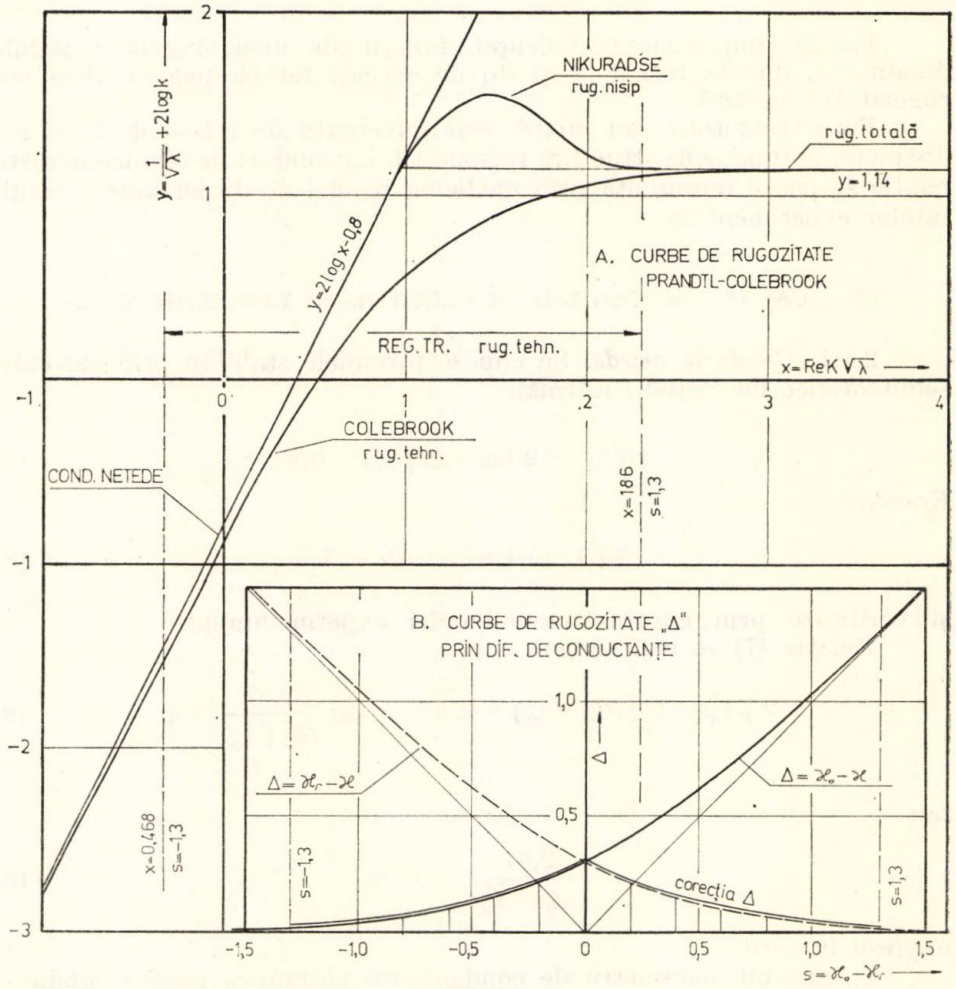


Fig. 1

În concluzie, modelul matematic al rezistenței hidraulice la conductele tehnice, va cerceta relațiile cu privire la :

— faza turbulenței netede, ca regim limită pentru $K \to 0$, cu relația

$$\lambda = f(\mathcal{R}e), \tag{4}$$

— faza tranzitorie sau mixtă, sub acțiunea viscozității și a rugozității parțiale, cu relația

$$\lambda = f(\mathcal{R}e, K), \tag{5}$$

— faza turbulenței pătratice, ca regim limită pentru $\mathcal{R}e \to \infty$ cu relația

$$\lambda = f(K). \tag{6}$$

Fazele simple ale turbulenței, funcții ale unei singure variabile dominante, duc la relații (4) și (6) de aceeași formă, pentru nisip sau rugozitatea tehnică.

Faza tranzitorie sau mixtă, este guvernată de relații de tipul (5) distincte, în funcție de structura rugozității. La conductele tehnice, această relație se poate reprezenta prin medierea bandei de dispersiune a rezultatelor experimentale.

2.1. ECUAȚIILE COEFICIENTULUI DE REZISTENȚĂ ÎN TURBULENȚA SIMPLĂ

2.1.1. *Conducte netede.* Se cunosc formulele stabilite prin cercetări semiteoretice de Prandtl-Kármán

$$1/\sqrt{\lambda_0} = 2 \log (\mathcal{R}e \sqrt{\lambda_0}) - 0{,}8 \tag{7}$$

Konakov

$$1/\sqrt{\lambda_0} = 1{,}8 \log \mathcal{R}e - 1{,}5 \tag{8}$$

și verificate prin cuprinzătoare lucrări experimentale.

Relația (7) se mai scrie:

$$1/2\sqrt{\lambda_0} = \log (\mathcal{R}e \sqrt{\lambda_0}) - 0{,}4 = -\log \frac{2{,}51}{\mathcal{R}e \sqrt{\lambda_0}} = \varkappa_0 \tag{9}$$

sau

$$\frac{2{,}51}{\mathcal{R}e \sqrt{\lambda_0}} = 10^{-\varkappa_0}, \tag{10}$$

expresii în care

$\varkappa_0$ este un parametru de conductanță hidraulică pentru conducte netede.

2.1.2. *Conducte rugoase.* În regimul turbulent pătratic al conductelor rugoase se aplică formula lui Nikuradze

$$1/2\sqrt{\lambda_x} = 1{,}14 - 2 \log K \tag{11}$$

și de aci rezultă

$$1/2\sqrt{\lambda_r} = 0{,}57 - \log K = -\log \frac{K}{3{,}72} = \varkappa_r, \tag{12}$$

parametrul de conductanță hidraulică al conductelor rugoase.

De asemenea, din (11) rezultă

$$K/3{,}72 = 10^{-\varkappa_r}, \tag{13}$$

o relație, care poate fi utilizată la determinarea rugozității nisipoase echivalente, în aceleași condiții de model matematic, pentru o conductă tehnică dată.

Dacă se face operația (9)—(12):

$$s = \varkappa_0 - \varkappa_r = \log \frac{K\,\mathcal{R}e\sqrt{\lambda}}{9{,}34} = \log \frac{x}{9{,}34}, \tag{14}$$

rezultă

$$x = 9{,}34 \cdot 10^{s} \qquad \text{sau} \qquad s = \log x - 0{,}97, \tag{14 a}$$

în care $x = K\,\mathcal{R}e\sqrt{\lambda}$ este abscisa în funcția de rugozitate de tipul Prandtl $s = \varkappa_0 - \varkappa_r$ este un nou parametru de rugozitate al conductei.

2.2. ECUAȚIA REZISTENȚEI HIDRAULICE ÎN REGIMUL TURBULENT TRANZITORIU AL CONDUCTELOR TEHNICE

Ținînd seama de modelul fizic al rugozității tehnice și procedînd prin sumarea (10) + (13) a elementelor turbulenței mixte se obține:

$$10^{-\varkappa} = 10^{-\varkappa_0} + 10^{-\varkappa_r} \tag{15}$$

sau logaritmînd,

$$1/2\sqrt{\lambda} = -\log\,[2{,}51/\mathcal{R}e\sqrt{\lambda} + K/3{,}72], \tag{16}$$

o ecuație a coeficientului de rezistență, elaborată de Colebrook-White și verificată în condițiile de mediere ale rezultatelor experimentale, în regimul tranzitoriu.

În (15), prin generalizare, s-a scris:

$$\varkappa = 1/2\sqrt{\lambda} \qquad \text{sau} \qquad \lambda = 1/4\ \varkappa^2 \tag{17}$$

pentru conducta dată în regim mixt.

2.3. VARIANTE ALE FUNCȚIEI DE RUGOZITATE TEHNICĂ

Expresiile (15) și (16) formează, pînă în prezent, singurele ecuații cunoscute ale rezistenței hidraulice, valabile pe întreg domeniul turbulent al rugozității tehnice.

Prin particularizare la limită, pentru $K \to 0$, respectiv $\mathcal{R}e \to \infty$, formula (16) trece în formulele (7), respectiv (11) ale conductelor netede sau rugoase.

În concluzie, pe baza relațiilor (15) și (16), se pot obține următoarele concretizări ale funcției de rugozitate (3), în domeniul rugozității naturale.

2.2.1. *Varianta Prandtl a funcției de rugozitate.* Rezultă din (16), care devine

$$1/\sqrt{\lambda} = -2 \log K/3{,}72 - 2 \log [9{,}34/K \mathcal{R}e \sqrt{\lambda} + 1]$$

sau

$$y = 1/\sqrt{\lambda} + 2 \log K = 1{,}14 - 2 \log [9{,}34/x + 1], \tag{18}$$

și este reprezentată grafic în figura 1-A.

Curba Prandtl admite ca asimptotă dreapta conductelor netede, respectiv dreapta rugozității totale.

Într-adevăr,

$$\lim_{x \to 0} y = y_0 = 1/\sqrt{\lambda_0} + 2\log K = 2\log x - 0{,}8$$

$\rightarrow$ dreapta rugozității nule, și

$$\lim_{x \to \infty} y = y_r = 1/\sqrt{\lambda_r} + 2\log K = 1{,}14$$

$\rightarrow$ dreapta rugozității pătratice.

Dreptele y_0 și y_r se intersectează în punctul de coordonate $x = 9{,}34$ și $y = 1{,}14$.

Curba este strict crescătoare și se înscrie asimptotic în unghiul format de cele 2 drepte.

2.2.2. *Varianta diferenței* $(\varkappa_0 - \varkappa)$ *în funcție de* s.

Se obține, multiplicînd relația (15) cu $10^{\varkappa_0}$,

$$10^{\varkappa_0 - \varkappa} = 1 + 10^{\varkappa_0 - \varkappa_r} \tag{19}$$

sau

$$\Delta_0 = \varkappa_0 - \varkappa = \log(1 + 10^s), \tag{20}$$

o concretizare simplă a funcției (3).

Curba, monoton crescătoare, este înscrisă asimptotic în unghiul format de semiaxa $(-s)$ și de bisectoarea primului cadran (fig. 1-B).

După cum se vede,

$$\lim_{s \to -\infty} \Delta_0 = \lim_{s \to -\infty} \log (1 + 10^s) = 0 \tag{21}$$

$\rightarrow$ semiaxa negativă a absciselor,

$$\lim_{s \to \infty} (\Delta_0 - s) = \lim_{s \to \infty} \log (1 + 10^{-s}) = 0 \tag{22}$$

$\rightarrow$ prima bisectoare $\Delta_0 = s$.

Rezultă valorile asimptotice ale conductanței:

$$\begin{matrix} \varkappa \to \varkappa_0 \\ s \to -\infty \end{matrix} \quad \text{și} \quad \begin{matrix} \varkappa \to \varkappa_r, \\ s \to +\infty. \end{matrix} \tag{23}$$

2.2.3. *Varianta diferenței* $(\varkappa_r - \varkappa)$ *în funcție de* s. Se multiplică ambii membri ai relației (15) cu $10^{\varkappa_r}$

$$10^{\varkappa_r - \varkappa} = 1 + 10^{\varkappa_r - \varkappa_0}$$

sau

$$\Delta_r = \varkappa_r - \varkappa = \log(1 + 10^{-s}), \tag{24}$$

o altă formă nouă a funcției de rugozitate.

Curba reprezentativă, monoton descrescătoare, este înscrisă asimptotic în unghiul format de bisectoarea cadranului al doilea și de semiaxa pozitivă a absciselor (fig. 1-B).

Într-adevăr,

$$\lim_{s \to -\infty} (\Delta_r + s) = \lim_{s \to -\infty} \log (1 + 10^s) = 0 \tag{25}$$

$\to$ a doua bisectoare $\Delta_r = -s$,

$$\lim_{s \to \infty} \Delta_r = \lim_{s \to \infty} \log (1 + 10^{-s}) = 0 \tag{26}$$

$\to$ semiaxa pozitivă a absciselor.

Rezultă valorile asimptotice:

$$\begin{matrix} \varkappa \to \varkappa_0 \\ s \to -\infty, \end{matrix} \quad \text{și} \quad \begin{matrix} \varkappa \to \varkappa_r \\ s \to \infty. \end{matrix} \tag{27}$$

Noile funcții de rugozitate (20) și (24) au o formă simplă și se bucură de proprietățile:

— simetrie în raport cu axa ordonatelor;

— abateri asimptotice

$$(\Delta - \Delta_{as}),$$

egale la $\pm s$ și

— convergență asimptotică rapidă.

3. CALCULUL COEFICIENTULUI DE REZISTENȚĂ

Se vor stabili relațiile de calcul și apoi, se vor cerceta domeniile de aplicare ale formulelor.

3.1. RELAȚII DE CALCUL

Ținînd seama de evoluția curbelor de rugozitate și de valorile numerice din tabela 1, se pot trage următoarele concluzii cu privire la relațiile de calcul ale coeficientului.

Tabela 1

s	$-\infty$	$-1{,}3$	0	$+1{,}3$	$+\infty$
x	0	0,468	9,34	1,86	∞
Δ_0	0	0,02	0,3	1,32	∞
Δ_r	∞	1,32	0,3	0,02	0
$\delta\lambda/\lambda$	0	0,011		0,011	0
Formule	$\varkappa = \varkappa_0$	$\varkappa = \varkappa_0 - \Delta_0$	$\varkappa = \varkappa_r - \Delta_r$	$\varkappa = \varkappa_r$	

3.1.1. Se vor considera ramurile curbelor de rugozitate Δ_0 și Δ_r care tind asimptotic către axa absciselor (fig. 1-B). În conformitate cu relațiile (20) și (24), se pot utiliza formulele:

$$\varkappa = \varkappa_0 - \Delta_0 \text{ pentru } s \in (-\infty, 0) \tag{28}$$

și

$$\varkappa = \varkappa_r - \Delta_r \text{ pentru } s \in [0, +\infty). \tag{29}$$

3.1.2. Se vede imediat că, pentru valorile suficient de mari ale parametrului de rugozitate $|s|$, corecția $\Delta \to 0$ și expresiile (28) și (29) trec în formule simple

$$\varkappa = \varkappa_0 \text{ pentru } s < -|s_0|, \tag{30}$$

$$\varkappa = \varkappa_r \text{ pentru } s > |s_r|. \tag{31}$$

Valorile s_0 și s_r, care limitează din punct de vedere practic domeniul turbulent mixt al conductelor tehnice, se vor determina prin condiționarea abaterii relative maxime a coeficientului λ, cînd se neglijează corecțiile Δ_0 și Δ_r.

Valorile numerice ale funcțiilor Δ_0 și Δ_r, utilizate în relațiile (28) și (29), se calculează cu formula

$$\Delta = \log (1 + 10^{-|s|}), \qquad |s| \in [0,\ 1{,}3], \tag{32}$$

și se pot aproxima prin exponențiala

$$\Delta_e = 0{,}31\ e^{-2|s|} \tag{33}$$

dacă se lucrează cu table de funcții exponențiale (tab. 2).

Valorile Δ_e, luate cu trei cifre zecimale, pot servi la calculul coeficientului λ.

Tabela 2

(14)	$s=\varkappa_0-\varkappa_r$	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3
(20)	$\Delta=\log(1+10)^{-\lvert s\rvert}$	0,2539	0,1764	0,1193	0,0790	0,0515	0,0332	0,0212
(33)	$\Delta=0{,}31e^{-2\lvert s\rvert}$	0,2538	0,1701	0,1140	0,0765	0,0512	0,0344	0,0230
	$\varepsilon=\Delta-\Delta_e$	0,0001	0,0063	0,0053	0,0025	0,0003	−0,0012	0,0018

3.2. DOMENIUL PRACTIC AL RUGOZITĂȚII MIXTE LA CONDUCTELE TEHNICE

S-a ajuns în 3.1. la o prezentare mai simplă a aparatului matematic, prin introducerea conductanțelor și diferențelor de conductanțe hidraulice. Pentru definirea domeniilor de valabilitate ale formulelor (28) și (29) — prin limitarea erorii asupra coeficientului λ — se deduce din (17), prin diferențiere și interpretare finită, relația

$$\left|\frac{\delta\lambda}{\lambda}\right| = 2\left|\frac{\delta\varkappa}{\varkappa}\right| \tag{34}$$

între abaterile relative ale mărimilor λ și $\varkappa$, cînd se trece de la curbă la asimptotă.

Eroarea relativă maximă asupra coeficientului λ se va lua

$$\left|\frac{\delta\lambda}{\lambda}\right| \leqslant 2\% \tag{35}$$

cînd $-|s_0| \geqslant s \geqslant s_r$, și se vor aplica formulele (30) și (31) ale turbulenței simple.

3.2.1. *Domeniul practic de valabilitate a formulei* $\varkappa = \varkappa_r - \Delta_r$.

Din punct de vedere teoretic, funcția de bază (24) e definită în domeniul real al variabilei s. Pe considerente de sistematizare a calculului, se utilizează numai o ramură a curbei $\Delta_r(s)$ care tinde asimptotic către semiaxa pozitivă a absciselor.

În sfîrșit, cînd se trece — cu limitarea abaterii relative — de la curbă la asimptotă, domeniul de valabilitate se restrînge la un interval practic $[0, s_r]$ de turbulență mixtă, cu multe aplicații tehnice.

În această ultimă ipoteză, relația (34) devine:

$$\delta\lambda/\lambda = 2(\varkappa_r - \varkappa)/\varkappa_r = 2\Delta_r/\varkappa_r \tag{36}$$

sau

$$\delta\lambda/\lambda = 2\ \log\ (1 + 10^{-s})/(0{,}57 - \log\ K), \tag{37}$$

și se poate utiliza la determinarea valorii $s = s_r$ de separare practică a domeniilor de turbulență mixtă și pătratică, pe baza condiției (35).

Calculele numerice s-au organizat în tabela 3, din care se deduce $s_r = 1{,}33$ și $x_r = 200$, în concordanță cu rezultatele cunoscute (punctul lui Moody).

Tabela 3

(14)	$s = \varkappa_0 - \varkappa_r$	1,3			1,33	1,4
(15)	$x = 9{,}34 \cdot 10^s$	186			200	235
	$K = k/d$	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-3}	10^{-3}
(12)	$\varkappa_r = 0{,}57 - \log K$	2,57	3,57	4,57	3,57	3,57
(24)	$\Delta_r = \log(1 + 10^{-s})$	0,0212			0,0199	0,0167
(33)	$\Delta_e = 0{,}31\, e^{-2\lvert s\rvert}$	0,0230			0,0217	0,0188
(29)	$\varkappa = \varkappa_r - \Delta_r$	2,549	3,549	4,549	3,550	3,553
	$\varkappa_e = \varkappa_r - \Delta_e$	2,547	3,547	4,547	3,548	3,551
(17)	$\lambda = 1/4\, \varkappa^2$	0,03848	0,01985	0,01208	0,01984	0,01985
	$\lambda_e = 1/4\, \varkappa_e^2$	0,03854	0,0198	0,01209	0,01986	0,01983
	$\lambda_r = 1/4\, \varkappa_r^2$	0,03785	0,01962	0,01197	0,01962	0,01962
(36)	$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{2\Delta_r}{\varkappa_r}$	0,0165	0,0119	0,0093	0,0112	0,0094

Este de remarcat că, dacă se rotunjește rezultatul la patru cifre zecimale, coeficientul de rezistență λ poate fi calculat la valori egale, fie cu Δ_r logaritmic (24), fie cu Δ_e exponențial (33).

De asemenea, λ fiind funcție de variabilele s și K, condiția (35),

$$\delta\lambda/\lambda \leqslant 2\% \text{ pentru } s \geqslant s_r,$$

se verifică pe un interval de rugozități relative

$$K \in (10^{-2},\ 10^{-4})$$

întîlnit în practică.

În conformitate cu datele din tabelele 3, s-ar putea admite și

$$s_r = 1{,}3,$$

cu o rugozitate relativă maximă

$$K_{\max} = 3 \cdot 10^{-2},$$

și un număr Reynolds

$$\mathcal{R}e_{\min} = 4 \cdot 10^{+4}.$$

3.2.2. *Domeniul practic de valabilitate a formulei*

$$\varkappa = \varkappa_0 - \Delta_0$$

Curbele de rugozitate Δ_0 și Δ_r fiind simetrice în raport cu axa ordonatelor (fig. 1-B), se aplică metoda utilizată sub 3.2.1. funcției Δ_0, determinîndu-se un interval $[-|s_0|, 0]$ practic de valabilitate a formulei (28) pe semiaxa negativă a variabilei s.

În acest caz, rel. (34) trece în forma :

$$\delta\lambda/\lambda = 2\,(\varkappa_0 - \varkappa)/\varkappa_0 = 2\Delta_0/\varkappa_0 \tag{38}$$

sau

$$\delta\lambda/\lambda = 2\ \log(1 + 10^s)\ /\ (0{,}9 \log \mathcal{R}e - 0{,}75), \tag{39}$$

expresii în care, pentru $s = s_0 < 0$, se pune condiția,

$$|\,\delta\lambda/\lambda\,|_{max} \leqslant 2\%,$$

de separare a domeniului de turbulență netedă, de zona mixtă.

Relațiile de calcul și valorile numerice au fost sistematizate în tabela 4.

Tabela 4

(14)	$s = \varkappa_0 - \varkappa_r$	$-1{,}4$	$-1{,}33$	$-1{,}3$		
(15)	$x = 9{,}34.10^s$	0,372	0,437	0,468		
	$\mathcal{R}e = vd/\nu$	10^5	10^5	10^4	10^5	10^6
(9)	$\varkappa_0 = 0{,}9 \log \mathcal{R}e - 0{,}75$	3,75	3,75	2,85	3,75	4,65
(20)	$\Delta_0 = \log(1 + 10^s)$	0,0169	0,0198	0,0212		
(33)	$\Delta_e = 0{,}31\ e^{-2\,\lvert s\rvert}$	0,0188	0,0217	0,0230		
(28)	$\varkappa = \varkappa_0 - \Delta_0$	3,733	3,730	2,829	3,729	4,629
	$\varkappa_e = \varkappa_0 - \Delta_e$	3,731	3,728	2,827	3,727	4,627
(17)	$\lambda = 1/4.\varkappa^2$	0,01794	0,01797	0,03123	0,01798	0,01167
	$\lambda_e = 1/4.\varkappa_e^2$	0,01796	0,01799	0,03128	0,01800	0,01168
	$\lambda_0 = 1/4.\varkappa_0^2$	0,01777	0,01777	0,03078	0,01777	0,01156
(38)	$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{2\Delta_0}{\varkappa_0}$	0,0090	0,0106	0,0149	0,0113	0,0091

Din cercetarea tabelei 4 rezultă unele constatări, similare cu cele arătate sub 3.2.1 :

— la patru cifre zecimale, calculele pentru λ se pot efectua la rezultate egale, cu Δ_0 sau Δ_e;

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848

— coeficientul de rezistenţă λ fiind funcţie de două variabile — în acest caz de s şi $\mathcal{R}e$, — condiţia limitării erorii (39) la 2%, pentru $s \leqslant s_0 < 0$, se verifică pe intervalul

$$\mathcal{R}e \in [10^4, 10^6]$$

utilizat în practică;

— în conformitate cu datele din tabela 4 se poate admite

$$s_0 = -1{,}3 \quad \text{şi} \quad x = 0{,}468,$$

cu valori

$$\mathcal{R}e_{min} = 2320 \quad \text{şi} \quad K_{max} = 10^{-3}.$$

4. CONCLUZII

În cercetarea rezistenţei hidraulice a conductelor apar două probleme: perfectarea modelului matematic şi sistematizarea calculului coeficientului λ, ca aspect aplicativ al primei probleme.

4.1. Se pot obţine noi variante ale funcţiei de rugozitate — o formă evoluată a modelului matematic prin introducerea conductanţelor hidraulice, — cu următoarele relaţii de definiţie:

— conductanţa netedă $\varkappa_0 = 1/2\sqrt{\lambda_0} = 0{,}9 \log \mathcal{R}e - 0{,}75$,

— conductanţa rugoasă $\varkappa_r = 1/2\sqrt{\lambda_r} = 0{,}57 - \log K$,

— conductanţa mixtă $\varkappa = 1/2\sqrt{\lambda} = -\log (10^{-\varkappa_0} + 10^{-\varkappa_r})$.

Noile funcţii de rugozitate — formate cu diferenţele acestor mărimi — sînt:

$$\Delta_0 = \varkappa_0 - \varkappa = \log (1 + 10^s),$$

$$\Delta_r = \varkappa_r - \varkappa = \log (1 + 10^{-s}),$$

în care

$$s = \varkappa_0 - \varkappa_r$$

este argumentul de rugozitate al conductei.

Aceste funcţii au proprietăţi remarcabile şi se pretează direct la calculul coeficientului de rezistenţă λ.

4.2. Din punct de vedere teoretic, în desfăşurarea fenomenului de turbulenţă a conductelor tehnice, există o singură fază: turbulenţa mixtă, încadrată de două stări-limită de turbulenţă simplă, pentru $|s| \to \infty$.

În condiţiile calculului aplicativ, se consideră ramurile curbelor Δ cu convergenţă asimptotică rapidă către axa (s) şi, pe baza relaţiilor

$$\Delta = \Delta_0 = \Delta_r = \log (1 + 10^{-|s|}) = 0{,}31\ e^{-2|s|} \leqslant 0{,}025 \qquad (40)$$

pentru $|s| \geqslant 1{,}3$, se ajunge la o restrîngere practică a intervalului de turbulenţă mixtă.

În final, intervin următoarele cazuri și relații în calculul coeficientului λ:

1. Conducte netede: $s \leqslant -1{,}3 \Rightarrow \varkappa = \varkappa_0$.
2. Regim mixt: $-1{,}3 < s \leqslant 0 \Rightarrow \varkappa = \varkappa_0 - \Delta$.
3. Regim mixt: $0 \leqslant s < 1{,}3 \Rightarrow \varkappa = \varkappa_r - \Delta$.
4. Conducte rugoase: $s \geqslant 1{,}3 \Rightarrow \varkappa = \varkappa_r$.

În aceste formule $\lambda = 1/4\ \varkappa^2$, eroarea relativă $\delta\lambda/\lambda \leqslant 0{,}02$ în regimurile 1. și 4., iar corecția Δ se calculează din (40) sau se citește tabelar.

Prin relațiile 1—4 — de formă simplă și cu intervale bine definite — se aduce contribuția principală a lucrării, pentru sistematizarea calculului coeficientului λ la conductele tehnice.

Primită la redacție la 10 februarie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. L. PRANDTL, *Führer durch die Strömungslehre*, Vieweg — Braunschweig, 1965.
2. H. PRESS și R. SCHRÖDER, *Hydromechanik im Wasserbau*, W. Ernst — Berlin — München, 1966.
3. H. RICHTER, *Rohrhydraulik*, Springer — Berlin (Göttingen) Heidelberg, 1958.

UNELE REZULTATE NOI OBȚINUTE PRIN UTILIZAREA FUNCȚIEI LIAPUNOV ÎN STUDIUL CASTELULUI DE ECHILIBRU SIMPLU

de D. ARSENIE

Institutul politehnic „Gh. Asachi" Iași

În lucrare se face un studiu al oscilațiilor care apar în castele de echilibru simple utilizînd pentru aceasta metoda funcției Liapunov. Se regăsește pe această cale condiția de stabilitate a lui Thoma și se obțin unele rezultate noi referitoare la energia oscilațiilor, la decrementul logaritmic și la factorul de amortizare.
Se face o discuție referitoare la coeficientul la stabilitate al oscilațiilor și se arată că formula Jaeger este neacoperitoare, ea indicînd o amortizare mai bună decît are loc în realitate.

1. STABILIREA SISTEMULUI ÎN PRIMĂ APROXIMAȚIE

În cazul manevrei parțiale rapide a vanei de reglaj, modelul matematic al fenomenului oscilațiilor în masă, care iau naștere ca urmare a manevrei menționate, este reprezentat, în cazul unui reglaj automat la putere constantă, de ecuația [1]:

$$\frac{LF}{gf}\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \frac{K}{2g}\left|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right|\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + \frac{K\sigma N_1}{\eta g F(H+z)}\left[1 - \frac{LF}{Kf(H+z)}\right]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + z + \frac{K\sigma^2 N_1^2}{2g\eta^2\gamma^2F^2(H+z)^2} = 0. \tag{1}$$

S-au utilizat notațiile din lucrările [12], [13], [14]:

L este lungimea galeriei de aducțiune,
f — secțiunea transversală a galeriei de aducțiune,
F — secțiunea transversală a castelului de echilibru,
g — accelerația gravitațională,
η — randamentul global al centralei, considerat constant,
H — sarcina brută a centralei,
K, P_f, λ_e — coeficienți, caracterizînd pierderea de sarcină pe aducțiune:

$$z_0 = -P_f\frac{w_0^2}{2g} = -\frac{K}{2g}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2_{t=t_0} = -\lambda_e\frac{L}{d}\frac{w_0^2}{2g},$$

N_1 — puterea centralei înainte de efectuarea manevrei,
$N_2 = \sigma N_1$ — puterea centralei după efectuarea manevrei,
γ — greutatea specifică a apei,

z — cota nivelului apei în castelul de echilibru, axa Oz fiind orientată ascendent,

t — timpul, notîndu-se $t_0, t_1, \ldots, t_j, t_{j+1}, \ldots$ momentele în care nivelul apei în castelul de echilibru atinge un extrem local şi cu $T_1, T_2, \ldots, T_{j+1}, \ldots$ intervalele de timp corespunzătoare, denumite şi cvasi-semiperioade şi definite prin relaţiile $T_{j+1} = t_{j+1} - t_j$,

$\zeta = \frac{z}{Z_*}$; $\tau = \frac{t}{T_*}$ — variabile adimensionale,

$Z_* = \frac{LF}{Kf} = \frac{\mathrm{d}f}{\lambda_e F}$ — mărime raţională de referinţă avînd dimensiune de lungime,

$T_* = \sqrt{\frac{LF}{gf}}$ — mărime raţională de referinţă avînd dimensiunea de timp,

d — diametrul galeriei de aducţiune,

w_0 — viteza apei pe galeria de aducţiune în regimul permanent iniţial,

$\chi = \frac{H}{Z_*}$ — parametru adimensional,

$\beta = \frac{k\sigma N_1}{\gamma\eta FH}\sqrt{\frac{f}{gLF}} = \frac{P_f \sigma N_1}{\gamma\eta fH}\sqrt{\frac{F}{Lgf}}$ — parametru adimensional,

$\beta = \frac{\lambda_e L\sigma N_1}{\gamma\eta dfH}\sqrt{\frac{F}{Lgf}}$. Cu aceste notaţii, modelul matematic (1) capătă forma adimensională (2):

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{1}{2}\left|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau}\right|\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\beta}{1+\frac{\zeta}{\chi}}\left[1 - \frac{1}{\chi}\,\frac{1}{1+\frac{\zeta}{\chi}}\right]\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau} + \zeta + \frac{\beta^2}{2}\,\frac{1}{\left(1+\frac{\zeta}{\chi}\right)^2} = 0. \tag{2}$$

Dacă mişcarea se amortizează în timp, nivelul apei corespunzător situaţiei în care apa din castelul de echilibru este în repaus se notează ζ_∞ şi se poate determina din ecuaţia de mai sus în care se consideră, evident, $\frac{\mathrm{d}\zeta}{\mathrm{d}\tau} = 0$ şi $\frac{\mathrm{d}^2\zeta}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$

$$\zeta_\infty + \frac{\beta^2}{2}\,\frac{1}{\left(1+\frac{\zeta_\infty}{\chi}\right)^2} = 0, \qquad \zeta_\infty \cong -\frac{\beta^2}{2}. \tag{3}$$

În studiul stabilității mișcării se face la început translația [1], [2]:

$$\Psi = \zeta - \zeta_\infty, \tag{4}$$

care mută originea axei verticale de la nivelul hidrostatic la nivelul corespunzător poziției finale de repaus.

În noua variabilă, ecuația cvasi-oscilațiilor capătă forma:

$$\frac{d^2\Psi}{d\tau^2} + \frac{1}{2}\left|\frac{d\Psi}{d\tau}\right|\frac{d\Psi}{d\tau} + \frac{\beta}{1+\dfrac{\Psi+\zeta_\infty}{\chi}}\left[1 - \frac{1}{\chi}\,\frac{1}{1+\dfrac{\Psi+\zeta_\infty}{\chi}}\right]\frac{d\Psi}{d\tau} + \Psi +$$

$$+ \zeta_\infty + \frac{\beta^2}{2}\,\frac{1}{\left(1+\dfrac{\Psi+\zeta_\infty}{\chi}\right)^2} = 0. \tag{5}$$

Se observă că soluția banală $\Psi \equiv 0$ este o soluție a ecuației (5), această soluție corespunzînd poziției de echilibru a sistemului auto-oscilant:

$$\Psi = 0\,;\quad \frac{d\Psi}{d\tau} = 0\,;\quad \frac{d^2\Psi}{d\tau^2} = 0. \tag{6}$$

În continuare, se cercetează stabilitatea acestei poziții de echilibru căreia, din punct de vedere fizic, îi corespunde regimul hidrostatic în castelul de echilibru.

În terminologia utilizată în teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale, care studiază din punct de vedere matematic stabilitatea soluțiilor, ecuația(5) se numește și ecuația mișcării perturbate, mișcarea reprezentată de (5) fiind interpretată ca o perturbare a echilibrului, reprezentat de soluția banală.

Ecuația (5) este echivalentă cu următorul sistem neliniar scris în formă normală:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \nu,$$

$$\frac{d\nu}{d\tau} = -\Psi - \zeta_\infty - \frac{1}{2}|\nu|\,\nu - \frac{\beta}{1+\dfrac{\Psi+\zeta_\infty}{\chi}}\left[1 - \frac{1}{\chi}\,\frac{1}{1+\dfrac{\psi+\zeta_\infty}{\chi}}\right]\nu -$$

$$- \frac{\beta^2}{2}\,\frac{1}{\left(1+\dfrac{\Psi+\zeta_\infty}{\chi}\right)^2}. \tag{7}$$

Dezvoltînd în serie Mc-Laurin expresia care apare în membrul drept al celei de-a doua ecuaţii a sistemului de mai sus se obţine, utilizînd şi relaţia (3),

$$f(\Psi, \nu) = f(0, 0) + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial \Psi}\Psi + \frac{\partial f(0, 0)}{\partial \nu}\nu + R(\Psi, \nu),$$

$$f(0, 0) = 0,$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \Psi} = -\left[1 - \frac{\beta^2}{\chi}\frac{1}{\left(1 + \frac{\zeta_\infty}{\chi}\right)^3}\right] = -(1 - a^2 b), \tag{8}$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial \nu} = -\frac{\beta}{1 + \frac{\zeta_\infty}{\chi}}\left[1 - \frac{1}{\chi}\frac{1}{1 + \frac{\zeta_\infty}{\chi}}\right] = -a(1 - b),$$

$$a = \frac{\beta}{1 + \frac{\zeta_\infty}{\chi}}; \quad b = \frac{1}{\chi}\frac{1}{1 + \frac{\zeta_\infty}{\chi}},$$

$$R(\Psi, \nu) = -\frac{1}{2}|\nu|\nu -$$

$$- \frac{\beta\Psi\nu\left[\left(1 + \frac{\zeta_\infty}{\chi}\right)(\chi + \zeta_\infty - 2) + \frac{\Psi}{\chi}(\chi + \zeta_\infty - 1)\right]}{\chi^2\left(1 + \frac{\zeta_\infty}{\chi}\right)^2\left(1 + \frac{\zeta_\infty + \psi}{\chi}\right)^2} -$$

$$- \frac{\beta^2\left(3 + 3\frac{\zeta_\infty}{\chi} + 2\frac{\Psi}{\chi}\right)\Psi^2}{2\chi^2\left(1 + \frac{\zeta_\infty}{\chi}\right)^3\left(1 + \frac{\zeta_\infty + \Psi}{\chi}\right)^2}.$$

Notînd cu $\rho = \sqrt{\Psi^2 + \nu^2}$, este cunoscut faptul că dacă

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{R(\Psi, \nu)}{\rho} = 0, \tag{9}$$

atunci [3], [7], comportarea în vecinătatea punctului singular (0, 0) a traiectoriilor sistemului (7) este aceeaşi cu a traiectorilor sistemului în primă aproximaţie de mai jos:

$$\frac{d\Psi}{d\tau} = \nu,$$

$$\frac{d\nu}{d\tau} = -(1 - a^2 b)\Psi - a(1 - b)\nu, \tag{10}$$

şi această comportare poate fi redusă la cîteva tipuri caracteristice [3], [5], [11], după care punctul singular este denumit focar, nod cu o tangentă, nod cu două tangente, centru focar şi nod stelar, (nod izotrop).

În problema de faţă se verifică uşor cu ajutorul regulei lui Hopital că relaţia (9) este într-adevăr satisfăcută.

2. STABILITATEA SOLUŢIEI BANALE A SISTEMULUI ÎN PRIMĂ APROXIMAŢIE

În esenţă, procedeul prin care a fost obţinut sistemul în primă aproximaţie este un procedeu de liniarizare şi lui îi corespunde fizic cazul micilor oscilaţii în castelul de echilibru. Teorema fundamentală a stabilităţii după primă aproximaţie [2] arată că dacă soluţia banală a sistemului în prima aproximaţie (10) este uniform asimptotic stabilă, atunci neglijarea termenilor de grad superior în studiul stabilităţii e admisă, şi soluţia sistemului (7) va fi şi ea asimptotic stabilă. Cu alte cuvinte, stabilitatea la mici oscilaţii va implica şi stabilitatea la mari oscilaţii, dacă, după cum se va vedea, parametrii nu vor depăşi anumite valori limită.

Demonstrarea stabilităţii asimptotice a soluţiei banale sistemului în primă aproximaţie constă, conform unei teoreme cunoscute [2], [4], la a demonstra că toate rădăcinile ecuaţiei caracteristice ale acestui sistem au parte reală negativă. Atunci, în baza unei alte teoreme [4] cunoscute, rezultă că stabilitatea asimptotică este şi uniformă sau după o altă terminologie soluţia este stabilă „în mare".

Ecuaţia caracteristică a sistemului în prima aproximaţie, sub formă de determinant este

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1+a^2b & -a(1-b)-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + a(1-b)\lambda + 1 - a^2b = 0. \quad (11)$$

Discriminantul acestei ecuaţii este

$$\Delta = a^2(1+b)^2 - 4. \quad (12)$$

Deoarece sarcina centralei este totdeauna cu mult mai mare decît sarcina pierdută pe galeria de aducţiune, rezultă că se pot considera totdeauna valabile inegalităţile:

$$-z_\infty \ll H \Rightarrow -\zeta_\infty \ll \chi \Rightarrow a > 0,\ b > 0. \quad (13)$$

Pentru ca rădăcinile ecuaţiei caracteristice să aibă partea reală negativă este necesar şi suficient ca să fie satisfăcute următoarele două inegalităţi:

$$1 - a^2b > 0 \Rightarrow \frac{\beta^2}{\chi} \frac{1}{\left(1+\frac{\zeta_\infty}{\chi}\right)^3} < 1 \Rightarrow -z_\infty < \frac{1}{3} H,$$

$$a(1-b) > 0 \Rightarrow \chi\left(1+\frac{\zeta_\infty}{\chi}\right) > 1 \Rightarrow Z_* < H + z_\infty \Rightarrow F > \frac{Lf}{P_f(H+z_\infty)} =$$

$$= \frac{df}{\lambda_e(H+z_\infty)} = F_{Th}, \quad (14)$$

în care s-a utilizat şi ecuaţia (3).

Se face observaţia că pentru z_0 trebuie considerată valoarea cea mai defavorabilă care corespunde debitului maxim trecut prin centrală în regim permanent.

Prima dintre relaţiile (14), din considerente economice, este realizată în cazul centralelor hidroelectrice, iar cea de-a doua reprezintă cunoscuta condiţie a lui Thoma.

În cazul satisfacerii relaţiilor (13), dacă $\Delta < 0$, mişcarea are un caracter oscilatoriu, amortizîndu-se treptat, iar dacă $\Delta \geqslant 0$, mişcarea capătă un caracter aperiodic, pierderile de energie foarte mari nu mai permit nivelului apei să oscileze în jurul nivelului final de repaus, ci doar să se apropie permanent de acest nivel (acest ultim caz nu prezintă importanţă practică deoarece necesită secţiuni excepţional de mari ale castelului de echilibru). Avînd în vedere stabilitatea uniform asimptotică a soluţiei banale conform unei teoreme cunoscute [2], [4] rezultă că există o funcţie Liapunov avînd anumite proprietăţi, între care aceea de a fi pozitiv definită, cu derivată negativ definită în raport cu timpul, derivata fiind calculată în virtutea sistemului de primă aproximaţie.

Deoarece energia mişcării oscilatorii este reprezentată printr-o funcţie pozitiv definită se va considera drept derivată a funcţiei Liapunov chiar această energie luată cu semn schimbat.

Energia potenţială a mişcării oscilatorii, calculată luînd drept plan de referinţă planul de echilibru al oglinzii apei din castelul de echilibru spre care mişcarea tinde în mod asimptotic, are expresia

$$E_p = \frac{1}{2}\,\rho g F\,(z - z_\infty)^2. \tag{15}$$

Considerînd energia de referinţă raţională,

$$E_* = \frac{1}{2}\,\frac{\rho g L^2 F^3}{K^2 f^2}, \tag{16}$$

se obţine forma adimensională a energiei potenţiale:

$$\mathscr{E}_p = \frac{E_p}{E_*} = (\zeta - \zeta_\infty)^2 = \Psi^2. \tag{17}$$

Energia cinetică se calculează considerînd că o particulă de lichid de volum unitar, care în castelul de echilibru are energia cinetică $\frac{\rho}{2}\left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$, în galeria de aducţiune va avea energia $\frac{\rho}{2}\left(\frac{F}{f}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2$. Rezultă atunci, neglijînd conform ipotezelor simplificatoare uzuale energia cinetică a apei din castelul de echilibru şi reţinînd-o doar pe cea a apei din galerie, care ia parte la mişcarea oscilatorie,

$$E_c = \frac{1}{2}\,\rho L f\left(\frac{F}{f}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2. \tag{18}$$

Considerînd aceeaşi energie de referinţă raţională se obţine energia cinetică sub formă adimensională :

$$\mathscr{E}_c = \frac{E_c}{E_*} = \left(\frac{d\zeta}{d\tau}\right)^2 = \nu^2. \tag{19}$$

Notînd cu $\mathscr{V}$ funcţia Liapunov a micilor oscilaţii, rezultă că se consideră în cele ce urmează :

$$\frac{d\mathscr{V}}{d\tau} = -(\Psi^2 + \nu^2), \tag{20}$$

derivata fiind luată în virtutea sistemului în primă aproximaţie.

Se scrie sub formă vectorială sistemul în primă aproximaţie

$$\frac{d\vec{v}}{d\tau} = A\vec{x}\ ;\vec{x} = \begin{pmatrix}\Psi\\ \nu\end{pmatrix}\ ;\ A = \begin{pmatrix}0 & 1\\ a^2b - 1 & a(b-1)\end{pmatrix}. \tag{21}$$

Forma pătratică (20) se poate exprima sub formă de produs scalar

$$\frac{d\mathscr{V}}{d\tau} = < C\vec{x}, \vec{x} > \equiv -(\Psi^2 + \nu^2) \Rightarrow C = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}. \tag{22}$$

Scriind şi funcţia Liapunov sub formă de produs scalar

$$\mathscr{V} = < B\vec{x}, \vec{x} >, \tag{23}$$

se demonstrează că matricea B este simetrică şi satisface ecuaţia matriceală :

$$A^*B + BA = C,\ A^* = \text{transpusa matricei } A. \tag{24}$$

Rezolvînd ecuaţia de mai sus, rezultă

$$B = \begin{pmatrix} \dfrac{2 + a^2 - 5a^2b + a^2b^2 + a^4b^2}{2a(1-b)(1-a^2b)} & \dfrac{1}{2(1-a^2b)} \\ \dfrac{1}{2(1-a^2b)} & \dfrac{2 - a^2b}{2a(1-b)(1-a^2b)} \end{pmatrix}. \tag{25}$$

În sfîrşit, funcţia Liapunov rezultă de forma :

$$\mathscr{V} = \frac{(1-a^2b)(2-a^2b)\Psi^2 + [a(1-b)\Psi + \nu]^2 + (1-a^2b)\nu^2}{2a(1-b)(1-a^2b)}. \tag{26}$$

Expresia găsită pentru funcția Liapunov permite o confirmare a rezultatelor obținute pînă în acest punct. Într-adevăr, condițiile necesare și suficiente ca funcția Liapunov să fie pozitiv definită și, în consecință, soluția banală a sistemului în primă aproximație să fie asimptotic uniform stabilă, sînt :

$$a(1-b)>0, \qquad 1-a^2b>0, \tag{27}$$

adică tocmai condițiile obținute pe altă cale în relația (14).

Pînă aici s-au regăsit o serie de rezultate în principiu cunoscute, deduse însă prin alte metode. În cele ce urmează se vor obține unele rezultate noi.

3. CÎTEVA INEGALITĂȚI OBȚINUTE CU AJUTORUL FUNCȚIEI LIAPUNOV

Pentru a stabili rezultate noi se face apel la următoarea inegalitate importantă din teoria formelor pătratice [4], [6] :

$$-\frac{\mathscr{V}}{\lambda_1} \leqslant -(\Psi^2+\nu^2) \leqslant -\frac{\mathscr{V}}{\lambda_2}, \tag{28}$$

în care λ_1, λ_2 sînt, respectiv, numărul propriu cel mai mic și cel mai mare al matricei B, soluții ale ecuației caracteristice

$$|B-\lambda E|=0, \text{ sau}$$

$$\lambda^2+\frac{4+a^2-6a^2b+a^2b^2+a^4b^2}{2a(1-b)(1-a^2b)}\lambda+$$

$$+\frac{4+a^2-10a^2b+a^2b^2+7a^4b^2-a^4b-a^4b^3-a^6b^3}{4a^2(1-b)^2(1-a^2b)^2}=0. \tag{29}$$

Deoarece termenul liber se simplifică cu factorul $(1-a^2b)$, ecuația se poate scrie sub forma convenabilă :

$$(1-a^2b)\lambda^2+\frac{4+a^2-6a^2b+a^2b^2+a^4b^2}{2a(1-b)}\lambda+$$

$$+\frac{4+a^2-6a^2b+a^2b^2+a^4b^2}{4a^2(1-b)^2}=0. \tag{30}$$

Cele două rădăcini sînt date de formula :

$$\lambda_{1,2}=\frac{(2-a^2b^2)+a^2(1-b)^2}{4a(1-b)(1-a^2b)}\left[1\mp a\sqrt{\frac{(1-b)^2+a^2b^2}{(2-a^2b)^2+a^2(1-b)^2}}\right]. \tag{31}$$

Pe de altă parte, inegalitățile (28) se pot pune sub o altă formă, ținînd cont de modul în care a fost introdusă derivata funcției Liapunov :

$$-\frac{\mathcal{V}}{\lambda_1} \leqslant \frac{d\mathcal{V}}{d\tau} \leqslant -\frac{V}{\lambda_2} \Rightarrow -\frac{d\tau}{\lambda_1} \leqslant \frac{d\mathcal{V}}{\mathcal{V}} \leqslant -\frac{d\tau}{\lambda_2}. \tag{32}$$

După cum au arătat unele cercetări [7], [13], [14], mișcarea, oscilatorie cu amortizare pătratică se apropie mult de cea cu amortizare liniară din momentul în care nivelul apei în castelul de echilibru atinge primul nivel extrem. Din acest motiv se va integra ultima ecuație considerînd drept moment inițial momentul τ_1 în care este atins acest prim nivel extrem :

$$\mathcal{V}_1 e^{-\frac{\tau-\tau_1}{\lambda_1}} \leqslant \mathcal{V} \leqslant \mathcal{V}_1 e^{-\frac{\tau-\tau_1}{\lambda_2}}. \tag{33}$$

Valoarea funcției Liapunov în acest moment inițial se calculează, ținînd cont că viteza de mișcare a apei în castel este nulă :

$$\mathcal{V}_1 = \frac{2 + a^2 - 5a^2b + a^2b^2 + a^4b^2}{2a(1-b)(1-a^2b)} \Psi_1^2 = k^2 \Psi_1^2. \tag{34}$$

Utilizînd din nou inegalitățile (28) și introducînd energia mișcării sub formă adimensională se obține, ca un prim rezultat, următoarea evaluare a variației în timp a energiei mișcării oscilatorii :

$$\frac{k^2}{\lambda_2} \mathcal{E}_1 e^{-\frac{\tau-\tau_1}{\lambda_1}} \leqslant \mathcal{E} \leqslant \frac{k^2}{\lambda_1} \mathcal{E}_1 e^{-\frac{\tau-\tau_1}{\lambda_2}}. \tag{35}$$

Pe de altă parte, se poate obține o evaluare a modului de evoluție în timp al nivelelor extreme scriind relația de mai sus la un moment τ_j, corespunzător nivelului extrem Ψ_j :

$$\frac{k}{\sqrt{\lambda_2}} e^{-\frac{\tau-\tau_1}{2\lambda_1}} \leqslant \left|\frac{\Psi_j}{\Psi_1}\right| \leqslant \frac{k}{\sqrt{\lambda_1}} e^{-\frac{\tau-\tau_1}{2\lambda_2}}. \tag{36}$$

În studiul cvasi-oscilațiilor, în special al celor cu amortizare liniară se obișnuiește [7], [8], [9] a se caracteriza amortizarea cu ajutorul decrementului logaritmic și al factorului de amortizare. Decrementul logaritmic se definește ca logaritmul natural al raportului a două niveluri extreme consecutive de același sens :

$$\delta = \ln \frac{\Psi_j}{\Psi_{j+2}}. \tag{37}$$

Pentru a se obține expresia decrementului logaritmic se va integra între momentele τ_j și τ_{j+2} relația (32):

$$\frac{k}{\sqrt{\lambda_2}} e^{-\frac{\tau_{j+2}-\tau_j}{2\lambda_1}} \leqslant \frac{\Psi_{j+2}}{\Psi_j} \leqslant \frac{k}{\sqrt{\lambda_1}} e^{-\frac{\tau_{j+2}-\tau_j}{2\lambda_2}}, \tag{38}$$

respectiv, prin logaritmare:

$$\delta_{\min} = \frac{\tau_{j+2}-\tau_j}{2\lambda_2} + \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_1}{k^2} \leqslant \delta \leqslant \frac{\tau_{j+2}-\tau_j}{2\lambda_1} + \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_2}{k^2} = \delta_{\max}. \tag{39}$$

În fine, o ultimă relație se va stabili în legătură cu factorul de amortizare. Considerînd că nivelele maxime, respectiv minime, se găsesc pe curbe de ecuație $\pm A e^{-\alpha t}$ și utilizînd relația existentă în cazul amortizării liniare între decrementul logaritmic și factorul de amortizare [8]

$$\delta = \alpha(\tau_{j+2} - \tau_j) T_*, \tag{40}$$

se obține următoarea evaluare a factorului de amortizare:

$$\alpha_{\min} = \frac{1}{2T_*}\left[\frac{1}{\lambda_2} + \frac{1}{\tau_{j+2}-\tau_j} \ln \frac{\lambda_1}{k^2}\right] \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2T_*}\left[\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\tau_{j+2}-\tau_j} \ln \frac{\lambda_2}{k^2}\right] = \alpha_{\max}. \tag{41}$$

4. DISCUȚIE PRIVIND INFLUENȚA COEFICIENTULUI DE SIGURANȚĂ LA STABILITATE AL OSCILAȚIILOR

Coeficientul de siguranță la stabilitate al oscilațiilor se definește ca raportul:

$$n = \frac{F}{F_{Th}}, \tag{42}$$

în care F_{Th} este secțiunea minimă a castelului, calculată cu formula Thoma.

Este rațional a se considera drept parametrii de referință acei parametrii ai amenajării în ipoteza că s-ar adopta chiar secțiunea Thoma pentru castelul de echilibru. În acest fel parametrii care caracterizează funcționarea cu un castel de secțiune oarecare, devin funcție de coeficientul de siguranță și anume:

$$Z_* = \frac{1}{n} Z_{*Th}; \qquad T_* = \sqrt{n}\, T_{*Th},$$
$$\chi = n \chi_{Th}; \qquad \beta = \sqrt{n}\, \beta_{Th}. \tag{43}$$

În plus, se mai face observația că se pot face următoarele aproximări:

$$\chi_{Th} = \frac{H}{Z_{*Th}} = \frac{H\lambda_e F_{Th}}{df} = \frac{H}{H + Z_\infty} \cong 1,$$

$$a \cong \sqrt{n}\,\beta_{Th}; \qquad b \cong n,$$

$$\lambda_{1,2} \cong \frac{1}{\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}} \mp \frac{1}{2}; \quad k^2 \cong \frac{1}{\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}}, \tag{44}$$

$$\tau_{j+2} - \tau_j \cong 2\pi \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_{Th}^2 \frac{(n+1)^2}{n}}},$$

$$\ln\left[1 \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}\right] \cong \pm \frac{1}{2}\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}.$$

Rezultă în final următoarea evaluare pentru decrementul logaritmic:

$$\delta_{min} \leqslant \delta \leqslant \delta_{max},$$

$$\delta_{\min} \cong \frac{\pi}{\sqrt{1 - \beta_{Th}^2 \frac{(n+1)^2}{n}}} \cdot \frac{2\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}}{2 + \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}} - \frac{1}{4}\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}, \tag{45}$$

$$\delta_{\max} \cong \frac{\pi}{\sqrt{1 - \beta_{Th}^2 \frac{(n+1)^2}{n}}} \frac{2\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}}{2 - \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}.$$

Relațiile la care s-a ajuns permit o comparație cu rezultatele obținute de Jaeger în lucrarea [1] în care, utilizîndu-se în esență un procedeu de liniarizare se ajunge la următoarea expresie explicită a decrementului logaritmic:

$$\delta_J = 2\pi p_{01}\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \frac{1}{\sqrt{1 - p_{01}^2 \frac{(n+1)^2}{n}}}. \tag{46}$$

Legătura între parametrul p_{01} din această formulă și parametrul β_{Th} din prezenta lucrare este:

$$p_{01} = \frac{-z_0}{w_0\sqrt{\frac{LF}{gF_{Th}}}} = \frac{P_f \sigma N_1}{\gamma \eta H f}\sqrt{\frac{F_{Th}}{Lgf}} = \beta_{Th}. \tag{47}$$

După cum arată chiar autorul respectivei lucrări, măsurătorile efectuate în amenajări și pe modele au condus la concluzia că formula nu este acoperitoare în sensul că la o valoare măsurată a decrementului logaritmic s-au obținut cu formula (46) valori mai mici ale parametrului n sau, cu alte cuvinte înlocuind valoarea n efectivă formula (46) conduce la valori δ mai mari decît cele măsurate, diferența fiind mai mare la sarcini parțiale.

Așa cum va rezulta din cele ce urmează această neconcordanță se justifică și din punct de vedere teoretic pe baza rezultatelor obținute în prezenta lucrare.

Într-adevăr, ar trebui să fie satisfăcută condiția:

$$\delta_J \leqslant \delta_{max}, \tag{48}$$

care conduce după simplificările de rigoare la:

$$1 \leqslant \frac{1}{2 - \left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th}} + \frac{1}{8\pi}\sqrt{1 - \beta_{Th}^2 \frac{(n+1)^2}{n}}. \tag{49}$$

Inegalitatea de mai sus conduce, cu erori acceptabile la:

$$\left(\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\beta_{Th} \geqslant 1 \Rightarrow \beta_{Th} \geqslant \frac{\sqrt{n}}{n-1}. \tag{50}$$

La valori ale lui β_{Th} care satisfac inegalitatea (50) formula (46) nu mai este aplicabilă deoarece cantitatea care apare sub radical în relația (46) devine negativă. Rezultă că în general $\delta_J > \delta_{max}$, ceea ce este eronat și anume diferența între δ_J și δ_{max} crește cu scăderea lui β_{Th}. Din punct de vedere fizic aceasta înseamnă trecerea la sarcini parțiale justificîndu-se astfel teoretic constatările experimentale ale lui Jaeger.

În cele ce urmează se face o comparație a rezultatelor numerice obținute prin utilizarea formulelor analizate. Astfel, pentru exemplul prezentat chiar în lucrarea [1], avînd următorii parametrii caracteristici:

$$L = 5900 \text{ m}, f = 17{,}25 \text{ m}^2, F_{Th} = 18{,}9 \text{ m}^2, Q = 40 \text{ m/s}, H = 247 \text{ m},$$

$$p_{01} = 0{,}1102,$$

rezultatele comparative sînt redate în tabela de mai jos:

Tabela 1

n	δ_J	δ_{min}	δ_{max}	δ_J/δ_{max}
1	0	0	0	–
1,5	0,293	0,132	0,160	1,83
2	0,501	0,222	0,281	1,78
3	0,824	0,348	0,472	1,74

Din acest exemplu se constată că valorile decrementului logaritmic obținute prin utilizarea formulei Jaeger sînt mult mai mari decît cele maxime obținute prin utilizarea funcției Liapunov de aceea este de așteptat ca ele să nu se verifice experimental.

CONCLUZII

În lucrare se face un studiu al oscilațiilor care apar în castele de echilibru simple utilizînd pentru aceasta metoda funcției Liapunov. Se regăsește pe această cale condiția de stabilitate a lui Thoma și se obțin unele rezultate noi referitoare la energia oscilațiilor, de decrementul logaritmic și la factorul de amortizare.

Se face o discuție referitoare coeficientului la stabilitate al oscilațiilor și se arată că formula Jaeger este neacoperitoare, ea indicînd o amortizare mai bună decît are loc în realitate.

Primită la redacție la 21 iunie 1973

BIBLIOGRAFIE

1. Ch. Jaeger, *Hydraulique technique*, Ed. Dunod, Paris, 1954.
2. A. Halanay, *Teoria calitativă a ecuațiilor diferențiale*, Ed. Academiei R.S.R., 1963.
3. G. Sansone, R. Conti, *Non-linear differential equations*, Ed. Pergamon Press, Oxford-London-New York-Paris, 1964.
4. E. A. Barbașin, *Vvedenie v teoriu ustoicivosti*, Ed. „Nauka", Moskva, 1967.
5. D. V. Ionescu, *Ecuații diferențiale și integrale*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1972.
6. R. Bellman, *Introducere în analiza matriceală*, Ed. tehnică, București, 1969.
7. F. Dincă, C. Teodoru, *Vibrații neliniare și aleatoare*, Ed. Academiei R.S.R., București, 1969.
8. Gh. Silaș, *Mecanică — Vibrații mecanice*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1968.
9. M. Rădoi, E. Deciu, D. Voiculescu, *Elemente de vibrații mecanice*, Ed. tehnică, București, 1973.
10. M. Popescu, *Probleme actuale în domeniul hidraulicii castelelor de echilibru*, ISCH, Studii de hidraulică, vol. XXI, București, 1969.
11. L. Sideriadis, *Méthodes de topologie qualitative : applications à l'étude des cheminées d'équilibre*, La Houille Blanche, *4* (1962).
12. D. Arsenie, *O formă rațională a ecuației oscilațiilor nivelului de apă în castele de echilibru simple și unele concluzii ce rezultă din aceasta*, Hidrotehnica, *11* (1971).
13. D. Arsenie, *Determinarea analitică a nivelurilor extreme în castele de echilibru simple, în cazul închiderii rapide și totale a obturatorului*, Hidrotehnica, *8* (1972).
14. D. Arsenie, *Problema timpului în mișcarea cvasi-oscilatorie în masa care apare la închiderea bruscă a obturatorului unei aducțiuni cu castel de echilibru simplu*, Hidrotehnica, *5* (1973).

DEPLASAREA RELATIVĂ A CENTRULUI DE MASĂ AL AVIONULUI ECHIPAT CU MOTOARE AEROREACTOARE

de M. M. NIȚĂ
Academia Militară
GH. DRĂGĂNOIU
Institutul politehnic București

Se stabilește o formulă pentru viteza relativă a centrului de masă al avionului, echipat cu motoare aeroreactoare, față de un triedru legat de învelișul aparatului. Avionul se consideră sistem de masă variabilă prin captare și emisie simultane de particule.

Avioanele moderne, echipate cu sisteme de propulsie aeroreactoare de mare tracțiune, sînt caracterizate prin valori însemnate ale consumului de combustibil; în timpul funcționării sistemului de propulsie mase mari de lichid, aer, gaze, sînt vehiculate în corpul aparatului.

Așadar, la întocmirea ecuațiilor de mișcare, în studiul calităților de zbor etc. trebuie să se țină seama de deplasarea centrului de masă al aparatului, de variația momentelor de inerție și de deplasarea triedrului de axe principale în raport cu un sistem de axe legat de înveliș.

În cele ce urmează ne propunem să stabilim o relație pentru calculul vitezei relative a centrului de masă față de un triedru $BXYZ$ legat invariabil de învelișul aparatului, considerînd avionul ca sistem de masă variabilă prin separare și captare simultană de particule.

Se consideră avionul constituit dintr-o parte solidă de masă m_s, din combustibilul de masă m_c și din particulele gazoase (aer sau produse de ardere) de masă m_g, astfel că, masa m a aparatului la un moment dat se va exprima prin

$$m = m_s + m_c + m_g, \tag{1}$$

iar vectorul de poziție, $\bar{R}_0$, al centrului de masă în raport cu triedrul $BXYZ$ se obține din relația

$$m\bar{R}_0 = m_s\bar{R}_s + m_c\bar{R}_c + m_g\bar{R}_g, \tag{2}$$

unde $\bar{R}_s$, $\bar{R}_c$, $\bar{R}_g$ reprezintă, respectiv, vectorii de poziție ai centrelor de masă ai părții solide, combustibilului lichid și particulelor de gaze.

Din (2) se obține viteza relativă a centrului de masă al avionului:

$$\frac{\partial\bar{R}_0}{\partial t} = \frac{1}{m}\left[\frac{\partial(m_c\bar{R}_c)}{\partial t} + \frac{\partial(m_g\bar{R}_g)}{\partial t} - \bar{R}_0\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\right]. \tag{3}$$

În relația (3) și în continuare, operatorii de derivare ai variabilelor vectoriale indică derivata locală în raport cu triedrul $BXYZ$.

Se poate scrie:

$$m_c = \sum_{j=1}^{p} \int_{W_l^j} \rho_l \, d\tau + \sum_{i=1}^{q} \int_{W_l^i} \rho_l \, d\tau, \tag{4}$$

unde ρ_l este densitatea combustibilului lichid, iar W_l^j sau W_l^i este volumul unui compartiment (rezervor, conducte etc.) ocupat de lichid la un moment dat; indicii i, j definesc, respectiv, compartimentele comutate și cele necomutate în circuitul de consum.

Avînd în vedere că integralele din partea dreaptă a egalității (4) sînt definite pe domenii variabile prin deplasarea suprafețelor libere S_l^j, S_l^i și ținînd seama de incompresibilitatea lichidului, rezultă

$$\frac{dm_c}{dt} = \sum_{j=1}^{p} \int_{S_l^j} \rho_l \bar{V}_l \cdot \bar{n} \, d\sigma + \sum_{i=1}^{q} \int_{S_l^i} \rho_l \bar{V}_l \cdot \bar{n} \, d\sigma, \tag{5}$$

unde s-a notat cu $\bar{V}_l$ viteza unei particule de pe suprafața liberă S_l^j sau S_l^i, iar cu $\bar{n}$, versorul normalei la această suprafață, orientat spre exteriorul domeniului W_l^j sau W_l^i.

Evident, pentru cele q compartimente necomutate în circuitul de consum se poate scrie:

$$\int_{S_l^i} \rho_l \bar{V}_l \cdot \bar{n} \, d\sigma = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, q). \tag{6}$$

În ceea ce privește integralele definite pe domeniile S_l^j se observă că în valoare absolută acestea reprezintă masa lichidului conținut în volumul eliberat prin deplasarea suprafeței libere S_l^j în unitatea de timp, care, în baza condiției de continuitate, este egală cu debitul de combustibil, Q_l^j, în compartimentul W_l^j, adică

$$\int_{S_l^j} \rho_l \bar{V} \cdot \bar{n} \, d\sigma = - Q_l^j, \tag{7}$$

astfel că relația (5) devine:

$$\frac{dm_c}{dt} = - \sum_{j=1}^{p} Q_l^j = - Q_l, \tag{8}$$

unde Q_l reprezintă debitul total de combustibil.

Pentru momentul static al părții lichide se scrie expresia:

$$m_c \bar{R}_c = \sum_{j=1}^{p} \int_{W_l^j} \bar{R} \, \rho_l \, d\tau + \sum_{i=1}^{q} \int_{W_l^i} \bar{R} \, \rho_l \, d\tau, \tag{9}$$

unde cu $\bar{R}$ s-a notat vectorul de poziţie al unei particule de lichid. Aşadar

$$\frac{\partial(m_c\bar{R}_c)}{\partial t} = \sum_{j=1}^{P}\int_{S_l^j}\bar{R}\,\rho_l\,(\bar{V}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{q}\int_{W_l^i}\bar{R}\,\rho_l\,\mathrm{d}\tau. \tag{10}$$

Se introduc notaţiile:

$$\bar{R}_{L_j} = \frac{\int_{S_l^j}\bar{R}\,\rho_l(\bar{V}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{S_l^j}\rho_l\,\bar{V}\cdot\bar{n}\,\mathrm{d}\sigma}, \quad \bar{R}_L = \frac{\sum_{j=1}^{P} Q_l^j\,\bar{R}_{L_j}}{\sum_{j=1}^{P} Q_l^j}. \tag{11}$$

Se observă că punctul L_j, definit de vectorul $\bar{R}_{L_j}$, reprezintă centrul de masă al combustibilului conţinut în volumul eliberat prin deplasarea suprafeţei libere în unitatea de timp; dacă produsul $\rho_l^{\bar{V}\cdot\bar{n}}$ este acelaşi în toate punctele suprafeţei S_l^j, vectorul $\bar{R}_{L_j}$ defineşte centrul de masă al suprafeţei S_l^j, iar vectorul $\bar{R}_L$, centrul de masă al tuturor suprafeţelor libere din compartimentele comutate în circuitul de consum.

Cu notaţiile (11), relaţia (10) devine:

$$\frac{\partial(m_c\bar{R}_c)}{\partial t} = -\,Q_l\bar{R}_L + \frac{\partial}{\partial t}\sum_{i=1}^{q}\int_{W_l^i}\bar{R}\,\rho_l\,\mathrm{d}\tau. \tag{12}$$

Această expresie poate fi adusă şi la altă formă. În acest scop se consideră un domeniu, $\mathcal{D}$, mărginit de suprafaţa Σ prin care particulele de fluid pot intra sau ieşi din domeniu, şi se notează cu $\bar{\mathcal{S}}$ şi $\bar{\mathcal{S}}_1$ momentul static al particulelor de fluid conţinute în $\mathcal{D}$ la momentul t şi, respectiv, $t + \Delta t$ [2].

Fie S^* un sistem de masă constantă asociat sistemului real, constituit din particulele cuprinse în domeniul $\mathcal{D}$ la momentul t; dacă se notează cu $\bar{\mathcal{S}}^*$ şi $\bar{\mathcal{S}}_1^*$ momentul static al acestui sistem la momentele t şi, respectiv, $t + \Delta t$, atunci

$$\bar{\mathcal{S}}^* = \bar{\mathcal{S}}$$

$$\bar{\mathcal{S}}_1^* = \bar{\mathcal{S}}_1 + \Delta t\int_{\Sigma}\bar{R}\,\rho(\bar{V}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma, \tag{13}$$

unde $\bar{R}$ este vectorul de poziţie al unei particule de pe suprafaţa Σ, $\bar{V}$ — viteza acestei particule, iar $\bar{n}$, versorul normalei în punctul respectiv la suprafaţa Σ orientat spre exterior.

Din (13) se obţine

$$\Delta\bar{\mathcal{S}}^* = \Delta\bar{\mathcal{S}} + \Delta t\int_{\Sigma}\bar{R}\,\rho(\bar{V}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma,$$

unde $\Delta\bar{\mathscr{S}}^* = \bar{\mathscr{S}}_1^* - \bar{\mathscr{S}}^*$, $\Delta\bar{\mathscr{S}} = \bar{\mathscr{S}}_1 - \bar{\mathscr{S}}$; împărțind cu Δt termenii acestei egalități și trecînd la limită ($\Delta t \to 0$), rezultă

$$\frac{\partial\bar{\mathscr{S}}^*}{\partial t} = \frac{\partial\bar{\mathscr{S}}}{\partial t} + \int_\Sigma \bar{R}\rho(\bar{V}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma. \tag{14}$$

S-a folosit operatorul de derivare locală, vectorii din (13) fiind definiți în raport cu triedrul $BXYZ$.

Întrucît $\bar{\mathscr{S}}^*$ este momentul static al unui sistem de masă constantă, derivata sa în raport cu timpul reprezintă impulsul sistemului; în cazul de față această derivată reprezintă impulsul relativ $\bar{H}_r$, corespunzător mișcării fluidului față de triedrul $BXYZ$.

Totodată, întrucît

$$\bar{\mathscr{S}} = \int_\mathscr{D} \bar{R}\rho\,\mathrm{d}\tau,$$

se poate scrie

$$\frac{\mathrm{d}\bar{\mathscr{S}}}{\mathrm{d}t} = \int_\mathscr{D} \bar{R}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau,$$

astfel că (14) devine în final:

$$\bar{H}_r = \int_\mathscr{D} \bar{R}\frac{\partial\rho}{\partial t}\,\mathrm{d}\tau + \int_\Sigma \bar{R}\rho(\bar{V}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma. \tag{15}$$

În calculul celei de-a doua integrale din (15), pentru sistemul de particule de combustibil lichid conținute în compartimentele comutate în circuitul de consum, se definesc suprafețele $S_a^k (k = 1, 2, \ldots s)$ prin care particulele de lichid părăsesc sistemul considerat.

Se presupune că în punctele acestei suprafețe are loc amestecul particulelor de lichid cu particulele de aer sau de gaze (la sistemele cu postcombustie) și transformarea instantanee a acestui amestec în gaze.

Prin urmare, avînd în vedere că $\dfrac{\partial\rho_l}{\partial t} = 0$ relația (15) aplicată combustibilului conținut în compartimentele comutate în circuitul de consum, devine

$$\bar{H}_{rl}^* = \sum_{j=1}^{P} \int_{S_l^j} \bar{R}\rho_l(\bar{V}\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma + \sum_{k=1}^{s} \int_{S_a^k} \bar{R}\rho_l(\bar{V}_a\cdot\bar{n})\,\mathrm{d}\sigma, \tag{16}$$

unde $\bar{H}_{rl}^*$ este impulsul relativ al particulelor de lichid conținute în sistemul menționat, iar cu $\bar{V}_a$ s-a notat viteza unei particule de lichid pe suprafața de amestec S_a^k.

Se introduc notaţiile :

$$\bar{R}_{A_k} = \frac{\int_{S_a^k} \bar{R}\,\rho_l(\bar{V}_a \cdot \bar{n})\,\mathrm{d}\sigma}{\int_{S_a^k} \rho_l \bar{V}_a \cdot \bar{n}\,\mathrm{d}\sigma}, \quad \bar{R}_A = \frac{\sum_{k=1}^{s} Q_c^k \bar{R}_{A_k}}{\sum_{k=1}^{s} Q_c^k}. \tag{17}$$

în care

$$Q_c^k = \int_{S_a^k} \rho_l \bar{V}_a \cdot \bar{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

este debitul combustibilului care străbate suprafaţa S_a^k, transformîndu-se în gaze.

Evident,

$$\sum_{j=1}^{P} Q_l^j = Q_l = \sum_{k=1}^{s} Q_c^k = Q_c, \tag{18}$$

astfel că relaţia (16), în care se ţine seama de (8), (11), (17) şi (18) devine

$$\bar{H}_{rl}^{*} = Q_c(\bar{R}_A - \bar{R}_L). \tag{19}$$

De asemenea, impulsul relativ $\bar{H}_{rl}^{0}$ al particulelor de lichid din compartimentele necomutate în circuitul de consum este dat de

$$\bar{H}_{rl}^{0} = \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{q} \int_{W_l^i} \bar{R}\,\rho_l\,\mathrm{d}\tau. \tag{20}$$

Cu (19) şi (20), ţinînd seama de (18), relaţia (12) devine :

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_c \bar{R}_c) = \bar{H}_{rl} - Q_c \bar{R}_A, \tag{21}$$

unde $\bar{H}_{rl}$ este impulsul relativ al tuturor particulelor de lichid,

$$\bar{H}_{rl} = \bar{H}_{rl}^{*} + \bar{H}_{rl}^{0}. \tag{22}$$

Pentru calculul celui de-al doilea termen din (3) se scrie :

$$m_g = \int_{W_a} \rho_a\,\mathrm{d}\tau + \int_{W_g} \rho_g\,\mathrm{d}\tau, \tag{23}$$

unde ρ_a este densitatea aerului, ρ_g densitatea gazelor, iar W_a, W_g volumele de aer, respectiv de gaze, pe care se calculează cele două integrale.

Din (23), ținînd seama că $W_a = \text{const.}$, $W_g = \text{const.}$, rezultă

$$\frac{dm_g}{dt} = \int_{W_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} d\tau + \int_{W_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} d\tau. \tag{24}$$

Condiția de continuitate a curgerii aerului se exprimă prin:

$$\int_{W_a} \frac{\partial \rho_a}{\partial t} d\tau = Q_i - Q_a, \tag{25}$$

unde Q_i este debitul aerului în secțiunile de intrare S_i^h $(h = 1, \ldots, n)$, iar Q_a, debitul aerului la traversarea suprafețelor de amestec, adică

$$Q_i = \sum_{h=1}^{t} Q_i^h = -\sum_{h=1}^{t} \int_{S_i^h} \rho_a \bar{V}_{a_i} \cdot \bar{n} \, d\tau; \quad Q_a = \sum_{k=1}^{r} Q_a^k = \sum_{k=1}^{r} \int_{S_a^k} \rho_a \bar{V}_{a_a} \cdot \bar{n} \, d\sigma,$$

unde cu $\bar{V}_{a_i}$ s-a notat viteza unei particule de aer în secțiunea de intrare, iar cu $\bar{V}_{a_a}$, viteza particulei în secțiunea de amestec.

La fel, condiția de continuitate pentru curgerea gazelor are forma:

$$\int_{W_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} d\tau + \sum_{k=1}^{r} \int_{S_a^k} \rho_g \bar{V}_{g_a} \cdot \bar{n} \, d\sigma + \sum_{l=1}^{s} \int_{S_e^l} \rho_g \bar{V}_e \cdot \bar{n} \, d\sigma = 0, \tag{26}$$

unde $\bar{V}_{g_a}$, $\bar{V}_e$ reprezintă viteza unei particule de gaz pe suprafața de amestec S_a^k, respectiv în secțiunea de ieșire S_e^l.

În ipoteza că la traversarea suprafețelor de amestec lichidul se transformă instantaneu în gaze, se poate scrie:

$$\sum_{k=1}^{r} \int_{S_a^k} \rho_g \bar{V}_{g_a} \cdot \bar{n} \, d\sigma = -Q_c - Q_a, \tag{27}$$

astfel că relația (26) devine:

$$\int_{W_g} \frac{\partial \rho_g}{\partial t} d\tau = Q_c + Q_a - Q_e, \tag{28}$$

unde Q_e este debitul curgerii gazelor în secțiunile de ieșire:

$$Q_e = \sum_{l=1}^{s} Q_e^l = \sum_{l=1}^{s} \int_{S_e^l} \rho_g \bar{V}_e \cdot \bar{n} \, d\sigma.$$

Introducînd expresiile (25) și (28) în (24), rezultă

$$\frac{dm_g}{dt} = Q_i + Q_c - Q_e \tag{29}$$

și deci

$$\frac{dm}{dt} = \frac{dm_c}{dt} + \frac{dm_g}{dt} = Q_i - Q_e. \tag{30}$$

Dacă $\frac{\partial \rho_a}{\partial t} = \frac{\partial \rho_g}{\partial t} = 0$, atunci $Q_i + Q_c = Q_e$

și deci

$$\frac{dm}{dt} = -Q_c. \tag{31}$$

Ținînd seama de expresia momentului static al particulelor de aer și gaze,

$$m_g \bar{R}_g = \int_{W_a} \bar{R}\rho_a \, d\tau + \int_{W_g} \bar{R}\rho_g \, d\tau,$$

rezultă

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_g \bar{R}_g) = \int_{W_a} \bar{R}\frac{\partial \rho_a}{\partial t} \, d\tau + \int_{W_g} \bar{R}\frac{\partial \rho_g}{\partial t} \, d\tau. \tag{32}$$

Totodată, relația (15), scrisă pentru sistemul de particule de aer și gaze, devine :

$$\bar{H}_{ra} = \int_{W_a} \bar{R}\frac{\partial \rho_a}{\partial t} \, d\tau + \sum_{h=1}^{t} \int_{S_i^h} \bar{R}\rho_a(\bar{V}_{a_i}\cdot\bar{n}) d\sigma + \sum_{k=1}^{r} \int_{S_a^k} \bar{R}\rho_a(\bar{V}_{a_a}\cdot\bar{n}) \, d\sigma; \tag{33}$$

$$\bar{H}_{rg} = \int_{W_g} \bar{R}\frac{\partial \rho_g}{\partial t} \, d\tau + \sum_{k=1}^{r} \int_{S_a^k} \bar{R}\rho_g(\bar{V}_{ga}\cdot\bar{n}) \, d\sigma + \sum_{l=1}^{s} \int_{S_e^l} \bar{R}\rho_g(\bar{V}_e\cdot\bar{n}) \, d\sigma. \tag{34}$$

Dacă densitățile particulelor de aer, lichid, gaze, ca și produsele $\bar{V}_{a_a}\cdot\bar{n}$, $\bar{V}_{a'}\cdot\bar{n}$, $\bar{V}_{g_a}\cdot\bar{n}$ sînt distribuite la fel pe suprafața de amestec S_a^k, atunci :

$$\int_{S_a^k} \bar{R}\rho_a(\bar{V}_{a_a}\cdot\bar{n}) \, d\sigma + \int_{S_a^k} \bar{R}\rho_g(\bar{V}_{g_a}\cdot\bar{n}) \, d\sigma = -Q_c^k \bar{R}_{A_k}. \tag{35}$$

Cu notațiile

$$\bar{R}_{I_h} = \frac{\int_{S_i^h} \bar{R}\rho_a(\bar{V}_{a_i}\cdot\bar{n}) \, d\sigma}{\int_{S_i^h} \rho_a(\bar{V}_{a_i}\cdot\bar{n}) \, d\sigma}; \quad \bar{R}_I = \frac{\sum_{h=1}^{t} Q_i^h \bar{R}_{I_h}}{\sum_{h=1}^{t} Q_i^h}, \tag{36}$$

$$\bar{R}_{E_l} = \frac{\int_{S_e^l} \bar{R}\rho_g(\bar{V}_e\cdot\bar{n}) \, d\sigma}{\int_{S_e^l} \rho_g(\bar{V}_e\cdot\bar{n}) \, d\sigma}; \quad \bar{R}_E = \frac{\sum_{l=1}^{s} Q_e^l \bar{R}_{E_l}}{\sum_{l=1}^{s} Q_e^l}, \tag{37}$$

introducînd (33) și (34) în (32) și ținînd seama de (35) cu (17), (36) și (37) rezultă în final:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m_g \bar{R}_g) = \bar{H}_{r_a} + \bar{H}_{r_g} + Q_i \bar{R}_I - Q_e \bar{R}_E + Q_c \bar{R}_A. \tag{38}$$

Cu acest rezultat, și ținînd seama de (21) și (30), relația (3) devine:

$$\frac{\partial \bar{R}_0}{\partial t} = \frac{1}{m}[\bar{H}_r + Q_i(\bar{R}_I - \bar{R}_0) - Q_e(\bar{R}_E - \bar{R}_0)], \tag{39}$$

unde $\bar{H}_r$ este impulsul relativ al particulelor de lichid, aer și gaze:

$$\bar{H}_r = \bar{H}_{rl} + \bar{H}_{r_a} + \bar{H}_{r_g}.$$

În cazul sistemului rachetă, deoarece $Q_i = 0$, relația (39) se modifică în consecință, obținîndu-se rezultatul semnalat de alți autori în [1], [3], [4].

Primită la redacție la 15 martie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. F. R. Gantmaher, L. M. Levin, *Teoria poleta neupravliaemih raket*, Fizmatghiz, Moscova, 1959.
2. A. A. Lebedev, L. S. Cernobrovkin, *Dinamika poleta*, Mașinostroenie, Moscova, 1973.
3. M. M. Niță, D. St. Andreescu, *Zborul rachetei*, Ed. militară, București, 1964.
4. R. A. Rankin, *The Mathematical Theory of the motion of rotated and unrotated rockets*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London; Mathematical and Phisical Sciences, London, 1949.

MODELE RECTANGULARE PENTRU STAREA PLANĂ DE EFORTURI

de GELU ONU

Institutul de proiectări auto, navale și aeriene București

În lucrare sînt descrise patru elemente finite dreptunghiulare, de tip deplasare pură, destinate calculului șaibelor elastice, omogene și izotrope.
În afară de translațiile nodurilor se iau în considerație, ca grade de libertate, rotirile laturilor la noduri, obținîndu-se modele cu 12 sau 16 deplasări generalizate. Sînt prezentate, în formă închisă, matricele de rigiditate și matricele de transformare a deplasărilor nodale în deformații specifice.
Studiate în vederea încorporării lor într-un program de calcul automat a tablierelor de pod, acestor modele li se întrevăd și alte utilizări practice: la calculul diafragmelor cu goluri, a frontoanelor, consolelor scurte, colțurilor de cadru etc.

1. INTRODUCERE

Determinarea stărilor de deformație și efort în structurile complexe se realizează prin metode numerice de calcul, metode aproximative, aproximația fiind introdusă fie la nivelul soluției ecuațiilor scrise pentru structura reală, fie la nivelul modelului mecanic echivalent înlocuitor.

Din rîndul procedeelor de calcul care apelează la discretizarea structurii, metoda elementelor finite are o utilizare largă în mecanica construcțiilor, fiind una din principalele beneficiare ale progreselor realizate în ultimile două decenii în dezvoltarea mijloacelor de calcul automat.

După cum este cunoscut, în această metodă de calcul, continuumul este divizat într-un număr de elemente discrete, interconectate într-un număr finit de noduri. Pentru ca modelul mecanic astfel obținut să fie echivalent cu structura reală, este necesar ca forțele nodale să echivaleze cît mai exact tensiunile efective de pe conturul elementelor finite. Acest lucru depinde în cea mai mare măsură de calitatea elementelor finite folosite, în ultimă instanță, de funcțiile deplasare sau efort introduse pentru a defini relațiile existente între forțele și deplasările nodurilor. Prin utilizarea unor elemente finite de tip deplasare pură se obține o structură înlocuitoare mai rigidă, în timp ce utilizarea elementelor de tip echilibru pur conduce la un model mecanic echivalent mai elastic decît structura reală [11].

În general, prin mărirea numărului de elemente finite se obține un model mecanic care echivalează mai bine structura reală. În cazul modelelor deplasare pură avînd cîmp de deformație aproximativ constant, convergența soluției este monotonă, rația șirului de valori obținute

printr-o discretizare progresivă a structurii putînd fi determinată anticipat prin calcul [32].

Primele elemente finite utilizate în elasticitatea plană se datoresc lui Argyris şi grupului Turner. Introducînd conceptul de element finit, în [33] autorii prezintă, printre altele, un model triunghiular de tip deplasare pură şi, de asemenea, un model echilibru pentru dreptunghi. Anterior, uzînd de o abordare bazată pe considerente energetice [1], Argyris obţine matricea de rigiditate a unui model deplasare dreptunghiular conform, model studiat apoi şi de Melosh [22]. Aceste trei elemente finite se găsesc detaliat prezentate şi în [20]. În [11] este descris modul în care se poate obţine matricea de rigiditate a unui model echilibru pur pentru triunghi.

Modelul deplasare al patrulaterului oarecare este studiat în [29] şi apoi în [17] prin utilizarea unui sistem de coordonate neortogonale. Pentru acest tip de element finit, în [33], se propune divizarea în elemente triunghiulare şi combinarea rigidităţilor triunghiurilor componente.

În [2] este prezentat un model deplasare pentru paralelogram şi, de asemenea, un model pentru patrulaterul oarecare prin particularizarea căruia se obţine elementul finit dreptunghiular din [1].

O comparaţie a elementelor finite rectangulare cu opt grade de libertate, prilejuită de prezentarea unui model echilibru de şaibă pătrată, este făcută în [15], autorii susţinînd superioritatea modelelor echilibru.

Luînd în consideraţie diferite stări posibile de tensiune în elementul finit, în [18] sînt prezentate opt modele derivate din cel descris în [15]. Posibilitatea de a obţine modele echilibru diferite pentru aceeaşi configuraţie mecanică a elementului reiese şi din comentariul lui Hartz [14] la referatul [15], acesta arătînd că prin luarea în consideraţie a unor moduri diferite de deformare virtuală a modelului, se pot obţine matrice de rigiditate diferite.

Această primă categorie de elemente finite se caracterizează prin numărul minim de noduri şi coordonate generalizate. Patrulaterele au opt grade de libertate, iar triunghiul, şase. Fiind utilizate funcţii deplasare cu un număr de parametri egal cu numărul gradelor de libertate, valoarea acestor parametri se determină direct din condiţii puse la noduri. Cîmpul eforturilor unitare este constant în cazul modelelor triunghiulare şi are o variaţie liniară parţială în cazul patrulaterelor.

Aceste tipuri de elemente finite şi-au găsit aplicaţii în diverse domenii ale tehnicii fiind încorporate în programe de calcul a structurilor aerospaţiale, a diafragmelor, barajelor, fundaţiilor etc.([7], [39], [26], [34], [13], [36] etc.).

Totuşi, prin utilizarea acestor modele nu s-au obţinut întotdeauna rezultate satisfăcătoare. Astfel, de exemplu, utilizînd elemente finite rectangulare cu opt grade de libertate şi luînd în consideraţie numai o discretizare longitudinală, nu se poate realiza un model mecanic echivalent consolei sau grinzii simplu rezemate. Cu elemente finite îmbunătăţite, acest lucru este realizabil.

Îmbunătăţirea performanţelor elementelor finite se realizează prin introducerea unor funcţii deplasare de grad superior, care pentru a genera modele conforme, trebuie să fie, pe cît posibil, completă [8]. Sporirea numărului termenilor funcţiilor deplasare sau efort, solicită

introducerea unor coordonate generalizate suplimentare, ceea ce presupune, fie adăugarea unor noduri în plus, fie luarea în considerație a noi grade de libertate. Dacă totuși numărul parametrilor este mai mare decît numărul gradelor de libertate disponibile, parametrii excedentari se pot determina prin minimizarea energiei de deformație a elementului [25].

Acest procedeu este folosit în [38] pentru a obține matricea de rigiditate a unui patrulater oarecare. În [26] este prezentat un algoritm, general aplicabil, pentru determinarea matricei de rigiditate prin minimizarea energiei de deformație.

În multe lucrări, [12] și [3] pentru triunghi, [5] pentru paralelogram, [17] pentru patrulaterul oarecare etc., sînt studiate modele cu noduri suplimentar introduse la mijlocul laturilor, fără a se spori numărul gradelor de libertate la nod. În toate cazurile, fiind asigurată variația liniară a deformațiilor în lungul laturilor, se semnalează o îmbunătățire apreciabilă a calităților elementelor finite.

O familie de elemente finite cu patru laturi curbilinii, cu sau fără noduri intermediare, este prezentată în [9]. Prin cîteva exemple de calcul, autorii demonstrează eficiența acestor modele arătînd, de exemplu, că o consolă rectangulară cu raportul $l/h = 3$, încărcată la vîrf cu forță sau moment, poate fi modelată cu numai trei elemente finite cu cîte 24 grade de libertate, obținîndu-se soluția din elasticitate.

După cum se arată în [39] și [31] elementele finite cu două grade de libertate la nod prezintă două inconveniente:

— sînt greu încorporate în plăci curbe subțiri (vezi și [13]);

— nu admit încărcări cu momente concentrate.

Ca o consecință a acestui ultim fapt, trebuie menționată imposibilitatea conectării acestor elemente cu bare rigide la încovoiere, neputînd fi satisfăcute condițiile de încastrare punctuală.

Prin luarea în considerație a derivatelor, aceste neajunsuri sînt eliminate și totodată este facilitată posibilitatea alegerii unor funcții deplasare de ordin superior.

Zienkiewicz [39] sugerează introducerea unui singur grad de libertate suplimentar la fiecare nod $\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) \Big/ 2$, ceea ce ar elimina inconvenientele amintite.

În [31] autorii studiază un model deplasare triunghiular pentru care aleg drept funcții deplasare două polinoame cu cîte nouă parametri. La fiecare nod sînt luate în considerație cîte șase deplasări generalizate (u, v, $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial x$, $(\partial u/\partial y + \partial v/\partial x)$, $(\partial u/\partial y - \partial v/\partial x)/2$), u și v fiind deplasările orientate după direcțiile axelor unui sistem cartezian de referință. Elementul este conform, iar matricea de rigiditate se obține prin integrare numerică (v. [17], [39]).

În [38] este prezentat succint un element dreptunghiular cu trei necunoscute la nod (u, v, $\partial v/\partial x$), destinat calculului inimilor tablierelor metalice chesonate, fără a i se da însă matricea de rigiditate.

Referatul [19] descrie un model deplasare dreptunghiular, cu 12 grade de libertate, destinat calculului diafragmelor. Autorul folosește drept funcții-deplasare două polinoame incomplete de gradul trei, cu cîte 6 parametri nedeterminați. La fiecare nod sînt luate în considerație trei

grade de libertate (u, v, $\partial v/\partial x$ sau $-\partial u/\partial y$). După cum rezultă din figura 1, sînt utilizate două tipuri de elemente care, așezate alternativ atît pe latura x cît și pe latura y a diafragmei, asigură continuitatea în ambele direcții. Nu sînt date expresii analitice pentru calculul elementelor ma-

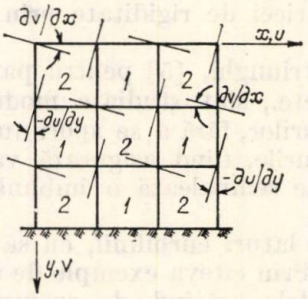


Fig. 1. — Discretizarea unei console scurte cu modelul Mc Leod.

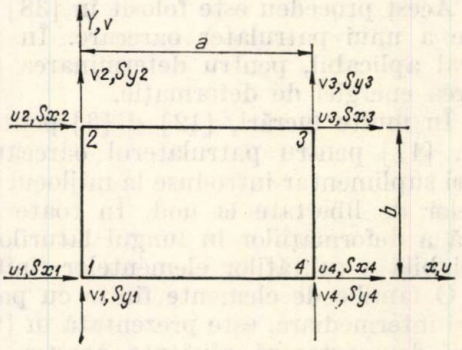


Fig. 2.— Modelul Argyris-Melosh

tricei de rigiditate. Principalul inconvenient al acestui model îl constituie faptul că nu poate fi introdus în semistructurile rezultate din utilizarea simetriei.

Într-un comentariu [24], pe marginea referatului lui I. Mac Leod, se semnalează existența la Universitatea din Glasgow a unui program care utilizează un model rectangular cu patru grade de libertate la fiecare nod (două translații și două rotații). Un model similar este prezentat în [23]. Se menționează că nici matricea de rigiditate a modelului, nici matricea de transformare a deplasărilor nodale în deformații specifice, nu sînt date în aceste lucrări.

În cele ce urmează vor fi prezentate patru modele deplasare rectangulare, îmbunătățite prin sporirea numărului coordonatelor generalizate. Față de modelul Argyris-Melosh ([1], [22], fig. 2) cu două grade de libertate la nod, modelele prezentate aici au trei sau patru deplasări generalizate la fiecare nod.

Luînd în considerație derivatele $\partial v/\partial x$ și $\partial u/\partial y$ ca grade de libertate suplimentare, și eliminînd neajunsurile modelului descris în [19], aceste elemente finite oferă posibilitatea unei mai bune modelări a structurii echivalente.

Cele patru modele, descrise succint în continuare, au fost denumite $U\theta XY$, $U\theta$, $U\theta X$ și $U\theta Y$.

2. MODELUL $U\theta XY$ (fig. 3)

La fiecare nod 'i' sînt luate în considerație patru grade de libertate :

— translațiile u_i, v_i ;

— rotirile laturilor elementului în imediata vecinătate a nodului $(\partial v/\partial x)_i$, $(\partial u/\partial y)_i$.

Convenţia de semne pentru deplasări este cea obişnuită : translaţiile sînt pozitive cînd se produc în sensul pozitiv al axelor, iar rotirile cînd au sens trigonometric. Forţele şi momentele sînt pozitive cînd au sensul deplasărilor pozitive.

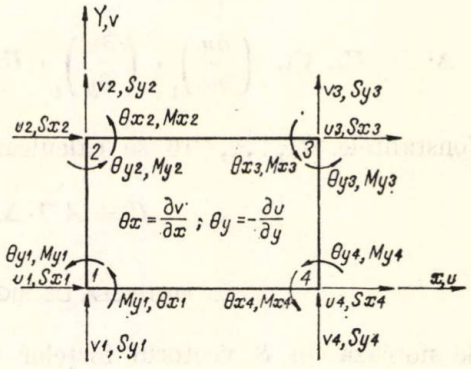


Fig. 3. — Modelul $U\theta XY$

2.1. FUNCŢIILE DEPLASARE

Cîmpul deplasărilor este descris de polinoamele (1)

$$u = C1 + C2\cdot x + C3\cdot y + C4\cdot xy + C5\cdot y^2 + C6\cdot xy^2 + C7\cdot y^3 + C8\cdot xy^3,$$
$$v = C9 + C10\cdot y + C11\cdot x + C12\cdot xy + C13\cdot x^2 + C14\cdot yx^2 + C15\cdot x^3 + C16\cdot yx^3. \tag{1}$$

Funcţiile alese asigură compatibilitatea deplasărilor elementelor în lungul laturilor comune. Luînd $y = k = \text{const.}$, relaţiile (1) devin :

$$u^* = (C1 + C3\cdot k + C5\cdot k^2 + C7\cdot k^3) + (C2 + C4\cdot k + C6\cdot k^2 + C8\cdot k^3)x,$$
$$v^* = (C9 + C10\cdot k) + (C11 + C12\cdot k)x + (C13 + C14\cdot k)x^2 + (C15 + C16\cdot k)x^3. \tag{1'}$$

După cum se vede, u^* este o funcţie lineară în x care poate fi definită prin două translaţii ale nodurilor în direcţia x ; v^* este o funcţie de gradul 3 în x, care poate fi unic determinată prin două translaţii ale nodurilor în direcţia Y, împreună cu două condiţii puse derivatelor $\partial v/\partial x$, la aceleaşi noduri.

Proba că elementul este conform, se obţine procedînd similar şi în direcţia Y ($x = \text{const.}$).

Valorile celor 16 constante ($C1, C2, \ldots, C16$) se determină direct, din condiţii puse la noduri :

$$u = u_i,\ v = v_i,\ \frac{\partial y}{\partial x} = \theta_{xi},\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\theta_{yi} \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{2}$$

Sau, în formă matriceală,

$$A\cdot C = \Delta. \tag{2'}$$

În (2'), A este o matrice pătrată (16×16) ale cărei elemente, derivate din polinoamele (1), au valori corespunzătoare condițiilor puse la noduri,

C este vectorul parametrilor $C1, C2, \ldots C16$, iar

Δ — vectorul deplasărilor nodale.

$$\Delta^T = \left| U_1,\ V_1,\ \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_1,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1,\ U_2, \ldots, \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_4,\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_4 \right|.$$

Constantele $C1, \ldots, C16$ se calculează cu relația (3).

$$C = A^{-1} \cdot \Delta. \tag{3}$$

2.2. MATRICEA DE RIGIDITATE

Se notează cu S vectorul forțelor nodale corespunzătoare deplasărilor Δ.

$$S^T = |\, Sx_1,\ Sy_1,\ Mx_1,\ My_1,\ Sx_2, \ldots, Mx_4,\ My_4 \,|.$$

Admițînd cunoscută distribuția reală a eforturilor unitare produse de deplasările nodurilor, vectorul forțelor nodale se poate determina aplicînd teorema deplasării unitare [1]

$$S = \int_v \varepsilon^T \cdot \sigma \cdot dv, \tag{4}$$

ε reprezintă matricea deformațiilor specifice compatibile cu un set complet de deplasări unitare aplicate nodurilor, pe direcția forțelor nodale

Egalitatea (5) exprimă relația deformații-deplasări

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \partial u/\partial x \\ \partial v/\partial y \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Ținînd seama de (3), pentru cîmpul deplasărilor descris de polinoamele (1), ε se exprimă succesiv:

$$\varepsilon = B^* \cdot C = B^* \cdot A^{-1} \cdot \Delta = B \cdot \Delta, \tag{6}$$

B este matricea de influență a deplasărilor nodale asupra deformațiilor specifice, obținută din condiția de satisfacere a compatibilității interne a elementului (vezi anexa 1)

Admiţînd, în mod aproximativ, că matricea B reprezintă, în acelaşi timp, matricea de transformare a deplasărilor în deformaţii cu păstrarea echilibrului interior, eforturile unitare se calculează cu relaţia (7):

$$\sigma = D \cdot \varepsilon = D \cdot B \cdot \Delta, \tag{7}$$

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{vmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1-\nu}{2} \end{vmatrix},$$

este matricea de elasticitate pentru starea plană de eforturi.

Ţinînd seama de (6) şi (7), (4′) furnizează relaţia finală de calcul a forţelor nodale în funcţie de deplasările nodurilor:

$$S = K \cdot \Delta. \tag{4′}$$

Notînd cu t grosimea constantă a modelului, matricea de rigiditate a elementului finit este dată de relaţia

$$K = t \cdot \int_0^a \int_0^b B^T \cdot D \cdot B \cdot \mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{8}$$

Elementele matricei de rigiditate K (16×16), exprimate analitic sînt reproduse în anexa 1.

3. MODELUL $U\theta$ (fig. 4)

Acest model are 12 grade de libertate. La fiecare nod, pe lîngă translaţiile u_i şi v_i, se ia în consideraţie şi media derivatelor $\left(\dfrac{\partial v}{2\partial x} - \dfrac{\partial u}{2\partial y}\right)_i$.

Considerînd cîmpul deplasărilor descris tot de polinoamele (1), condiţiile pentru determinarea celor 16 parametri se scriu astfel:

$$u = u_i, \quad v = v_i, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \theta_i,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\theta_i \quad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{9}$$

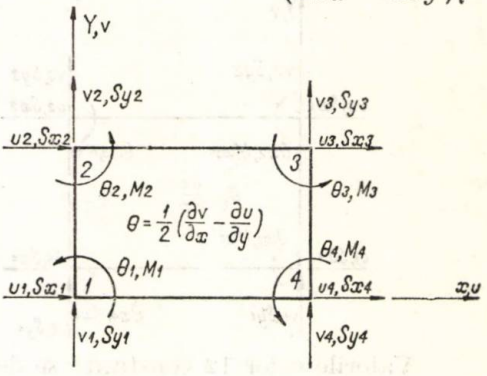


Fig. 4. — Modelul $U\theta$

Natura condiţiilor (9) facilitează determinarea elementelor matricelor B şi K ale modelului $U\theta$ direct din matricele similare ale modelului $U\theta XY$.

Pentru aceasta, se va considera mai întîi vectorul deplasărilor nodale Δ avînd 16 componente, la fiecare nod fiind luate în consideraţie, pe lîngă translaţii, cîte două rotiri: $\theta xi = \theta i$ şi $\theta yi = \theta i$.

În acest caz matricele B şi K corespunzătcare sînt identice cu cele date în anexa 1.

Trecînd la vectorul Δ cu 12 componente, matricele B şi K se modifică. Se vede imediat că noua matrice de influenţă a deplasărilor asupra deformaţiilor se obţine din matricea B dată în anexa 1, adunînd la coloanele 3, 7, 11 şi 15, coloanele 4, 8, 12 şi, respectiv, 16. Comprimînd matricea, astfel modificată, prin eliminarea coloanelor 4, 8, 12 şi 16, se obţine forma finală a matricei B (3×12) pentru modelul $U\theta$.

Similar se procedează şi cu matricea de rigiditate, operaţia de condensare fiind efectuată atît pe coloane cît şi pe linii.

4. MODELUL $U\theta X$ (fig. 5)

Modelul din figură are trei grade de libertate la fiecare nod. Pentru a-i determina caracteristicile de rigiditate se admite cîmpul deplasărilor descris de polinoamele (10).

$$u = C1 + C2 \cdot x + C3 \cdot xy + C4 \cdot y,$$
$$v = C5 + C6 \cdot y + C7 \cdot x + C8 \cdot xy + C9 \cdot x^2 + C10 \cdot yx^2 + C11 \cdot x^3 + C12 \cdot yx^3. \tag{10}$$

Acest cîmp asigură compatibilitatea deformaţiilor elementelor adiacente în lungul laturilor comune. Compatibilitatea deplasărilor modelului în lungul laturilor paralele cu direcţia OX se probează la fel ca în cazul modelului $U\theta XY$. Pentru a verifica compatibilitatea în direcţia OY se va lua $x = k = \text{const.}$, şi, înlocuind în (10), se obţine :

$$u^* = (C1 + C2k) + (C4 + C3 \cdot k)\, y,$$
$$v^* = (C5 + C7 \cdot k + C9 \cdot k^2 + C11 \cdot k^3) + (C6 + C8 \cdot k + C10 \cdot k^2 + C12k^3) \cdot y. \tag{10'}$$

După cum se vede, atît u^* cît şi v^* sînt funcţii lineare care pot fi unic determinate prin două translaţii ale nodurilor în direcţia OX, respectiv OY.

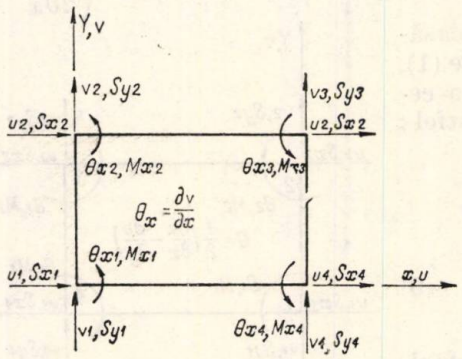


Fig. 5. — Modelul $U\theta X$

Valorile celor 12 constante se determină din condiţii puse la noduri :

$$U = U_i,\ V = V_i,\ \frac{\partial v}{\partial x} = \theta i\ \ (i = 1, 2, 3, 4). \tag{11}$$

Procedînd în continuare la fel ca în cazul modelului $U\theta XY$, se obţine matricea B (3×12) de transformare a deplasărilor în deformaţii şi matricea de rigiditate K (12×12) a elementului finit. Cele două matrice sînt reproduse în anexa 2.

5. MODELUL $U\theta Y$ (fig. 6)

După cum se vede din figură, al treilea grad de libertate de la fiecare nod este rotirea $\theta_i = -\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_i$, fapt care impune considerarea funcţiilor deplasare sub forma:

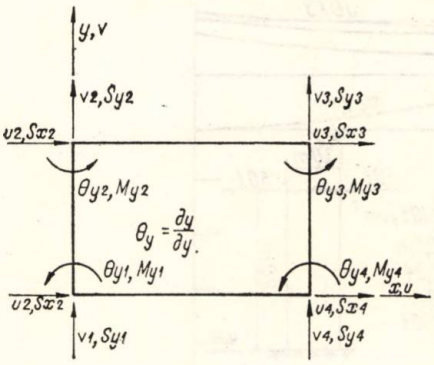


Fig. 6. — Modelul $U\theta Y$

$$u = C1 + C2 \cdot y + C3 \cdot xy + C4 \cdot x + \\ + C5 \cdot y^2 + C6 \cdot xy^2 + C7 \cdot y^3 + C8 \cdot xy^3, \tag{12}$$

$$v = C9 + C10 \cdot y + C11 \cdot xy + C12 \cdot x.$$

Această reprezentare a cîmpului deplasărilor permite să se determine direct matricea de rigiditate a modelului examinat, din matricea K dată în anexa 2.

Pentru aceasta, se efectuează o rotire cu 180° în jurul diagonalei 1—3 a modelului din figura 5, schimbînd totodată şi semnele celor patru rotiri de la noduri. Procedînd corespunzător cu matricea K a modelului $U\theta X$ se obţine matricea de rigiditate a elementului $U\theta Y$.

6. EXEMPLE

Pentru a se releva influenţa avută asupra soluţiei de modul în care se realizează discretizarea structurii şi, totodată, pentru a fi scoase în evidenţă unele caracteristici ale modelelor examinate, vor fi prezentate cîteva exemple ilustrative.

6.1. Se consideră o consolă (fig. 7) constituită dintr-un număr variabil de elemente finite, aranjate astfel ca numărul necunoscutelor să fie menţinut constant (un exemplu similar este prezentat în [19]). În figura 7 este reprezentată variaţia săgeţii la vîrful consolei, în funcţie de raportul β dintre laturile elementelor finite. Cu Nx şi Ny s-a notat numărul elementelor finite, din modelul mecanic după direcţia ox, respectiv oy. Este reprezentată, de asemenea, cea mai mică valoare a săgeţii la vîrf obţinută prin teoria elasticităţii ([10], [30]).

După cum se vede, exceptînd modelul $U\theta X$, elementele finite care ţin seama de rotirile la noduri, dau rezultate mult mai bune decît modelul Argyris-Melosh. Se constată, de asemenea, că pentru valori ale lui β mai mari decît 1, săgeţile obţinute cu $U\theta XY$, $U\theta$ şi $U\theta Y$, spre deosebire de modelul MacLeod, sînt puţin influenţate de modul în care se realizează discretizarea consolei.

În figura 8 este reprezentată variaţia săgeţilor la vîrful aceleiaşi console în funcţie de un alt mod de realizare a discretizării. De această dată se menţine constant $\beta = 1$, săgeţile fiind reprezentate în funcţie de

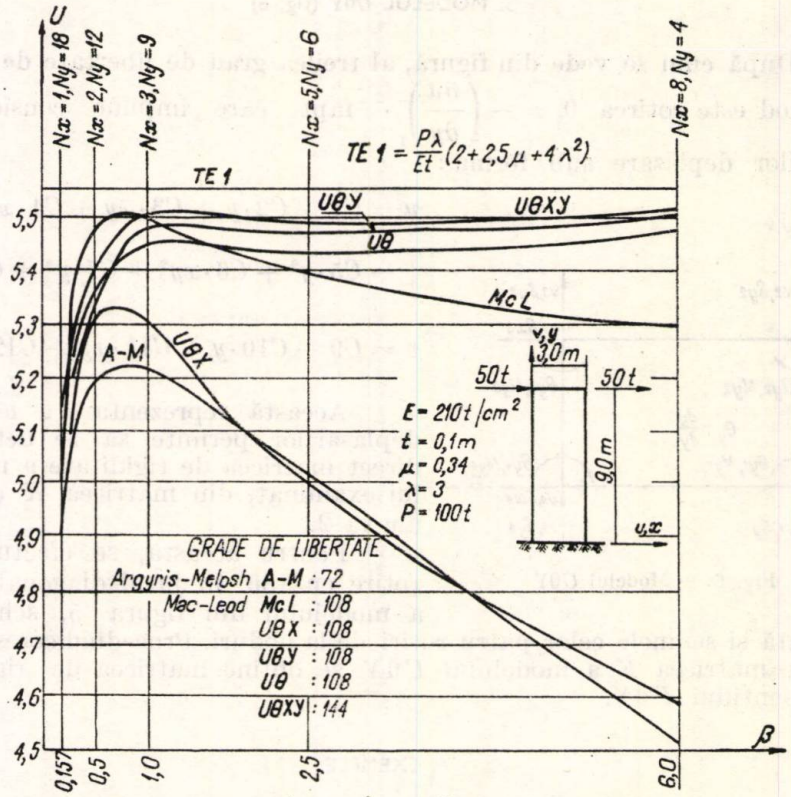


Fig. 7. — Variația săgeții la vîrful unei console în funcție de raportul β.

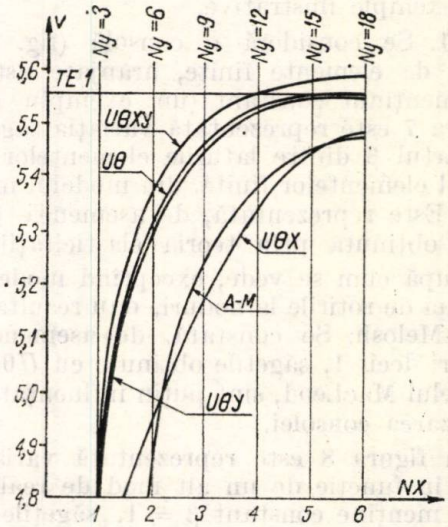
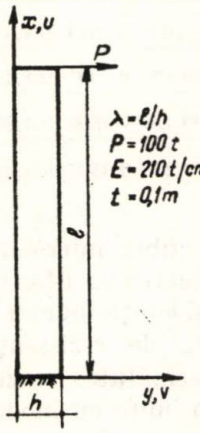


Fig. 8. — Variația săgeții la vîrful unei console în funcție de numărul elementelor finite, pentru β = constant.

numărul elementelor de pe latura ox. În toate cazurile se constată o convergență monotonă, rezultatele obținute cu $U\theta XY$, $U\theta$ și $U\theta Y$ fiind superioare celor obținute cu modelele A-M și $U\theta X$.

6.2. Se consideră o consolă încărcată cu o sarcină concentrată la vîrf. Modelul mecanic echivalent constituit prin discretizarea consolei numai în direcția x, a fost alcătuit din 3, 5, 7 și 8 elemente pătrate de tip A-M, $U\theta XY$, $U\theta$ și $U\theta X$. În tabelul nr. 1 sînt trecute săgețile la

Tabelul 1

	λ	3		5		7		8		μ
		în cm	în %	în cm	în %	în cm	în %	în cm	în %	
	TE1	5,550	100	24,485	100	66,283	100	98,571	100	0,34
		5,429	97,82	24,483	99,175	66,000	99,573	98,247	99,671	
	A-M	3,619	65,207	16,187	66,110	43,987	66,362	65,500	66,401	
	$U\theta XY$	5,327	95,982	24,173	98,726	66,137	99,629	98,333	99,759	0
	$U\theta$	5,303	95,550	24,158	98,665	66,012	99,591	98,323	99,748	
	$U\theta X$	5,275	95,045	24,059	98,260	65,958	99,510	98,103	99,525	

vîrful consolei pentru cele 16 ipoteze de alcătuire și de asemenea săgețile date de teoria elasticității (TE1).

După cum se vede, elementele finite care iau în considerație rotirile la noduri dau rezultate superioare modelului Argyris — Melosh. Pentru valori ale lui λ mai mari decît 5, soluția dată de acestea diferă de soluția din elasticitate cu mai puțin de 2%.

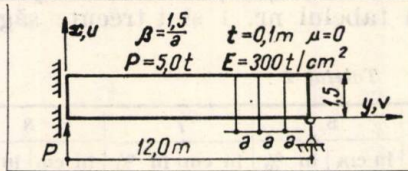
6.3. Tabelul nr. 2 a fost întocmit pentru a arăta influența pe care o are valoarea raportului β asupra soluției, în cazul grinzilor modelate prin discretizare unidirecțională. Sînt date săgețile în originea sistemului de axe, în două ipoteze de încărcare. După cum se vede, pentru $0{,}6667 < \beta < 1{,}333$, abaterile de la valorile corespunzătoare lui $\beta = 1$ sînt tolerabile în cazul modelelor $U\theta XY$, $U\theta$ și $U\theta Y$.

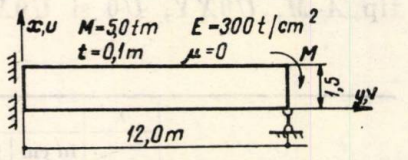
Din tabel rezultă, de asemenea, că este contraindicată utilizarea modelului $U\theta X$ în cazul în care axa oy este orientată în lungul deschiderii. Evident, dacă sistemul de axe se rotește cu 90°, modelul $U\theta Y$ devine neutilizabil.

6.4. În tabelul nr. 3 au fost trecute săgețile produse de o încărcare cu momente pe reazeme, calculate prin teoria elasticității (ipoteza 1)

şi cu ajutorul metodei elementelor finite, utilizînd modelul $U\theta XY$, în celelalte trei ipoteze. Rezultatele obţinute arată că cele patru ipoteze de calcul sînt practic echivalente.

Tabelul 2





	β = 1,0		β = 1,3333		β = 0,6667		β = 1,0		β = 1,3333		β = 0,6667	
	cm	%	cm	%	cm	%	cm	%	cm	%	cm	%
$U\theta XY$	3,4443	100	3,4111	99,036	3,5142	102,029	0,4251	100	0,4234	99,600	0,4314	101,480
$U\theta$	3,4444	100	3,4134	99,099	3,5111	101,940	0,4244	100	0,4239	99,872	0,4307	101,480
$U\theta Y$	3,4390	100	3,4081	99,101	3,4948	101,620	0,4248	100	0,4226	99,482	0,4303	101,290
$U\theta X$	2,2930	100	1,8145	79,130	2,8591	124,690	0,2841	100	0,2250	79,200	0,3537	124,430

6.5. Tabelul nr. 4 cuprinde eforturile unitare σ_y la fibra inferioară a unei grinzi simplu rezemate, pentru două ipoteze de încărcare. Eforturile obţinute prin metoda elementelor finite, luînd în consideraţie numai o discretizare longitudinală, sînt comparate cu cele date de rezistenţa materialelor. După cum se vede, exceptînd zonele din vecinătatea reazemelor şi a punctelor de aplicaţie a sarcinilor, soluţiile obţinute cu modelele $U\theta XY$, $U\theta$ şi $U\theta Y$ sînt asemănătoare cu cele date de Rezistenţa Materialelor.

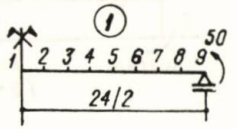
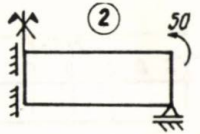
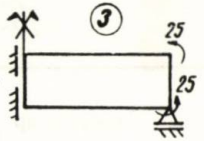
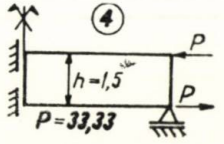
6.6. În figura 9 este reprezentată variaţia efortului unitar longitudinal la fibra extremă a unei diafragme simetrice cu un şir de goluri, încărcată cu o sarcină concentrată la vîrf. Acest exemplu a fost tratat în [19], dimensiunile şi încărcarea din figură rezultînd din transformarea unităţilor de măsură americane în unităţi M.K.S.

Modelul mecanic al lui Mc Leod conţine 126 elemente finite cu 504 grade de libertate. Utilizînd modelul $U\theta XY$ şi o discretizare ca cea reprezentată cu linie întreruptă în figura 9*a*, s-a obţinut un model mecanic cu 70 de elemente finite şi 336 grade de libertate care, prin folosirea antisimetriei de încărcare şi structură, se reduc la jumătate.

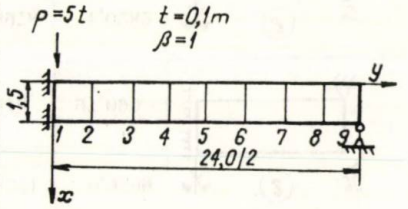
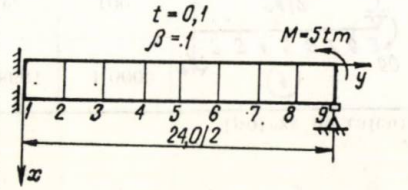
Pentru comparaţie s-a reprezentat, de asemenea, variaţia eforturilor unitare obţinute în ipoteza diafragmei fără goluri şi a utilizării unui cadru echivalent (fig. 9*b*).

Din compararea celor patru diagrame rezultă că metoda elementelor finite conduce, pentru exemplul examinat, la rezultate apropiate de cele obţinute utilizînd cadrul echivalent.

Tabelul 3

		1	2	3	4	5	6	7	8	Secțiune de calcul / Ipoteza de calcul
Săgeți	cm	4,2667	4,2000	4,0000	3,6667	3,2000	2,6000	1,8667	1,0000	
	%	100	100	100	100	100	100	100	100	
	cm	4,2444	4,1775	3,9768	3,6424	3,1742	2,5724	1,8371	0,9709	
	%	99,479	99,464	99,420	99,338	99,194	98,938	98,416	97,090	
	cm	4,3053	4,2384	4,0377	3,7032	3,2350	2,6332	1,8978	1,0282	
	%	100,905	100,915	100,943	100,996	101,094	101,277	101,680	102,820	
	cm	4,2830	4,2161	4,0154	3,6809	3,2128	2,6110	1,8756	1,0066	
	%	100,383	100,383	100,385	100,388	100,400	100,423	100,479	100,660	

Tabelul 4

	Punctul în care s-a calculat efortul σy:									Ipoteza de încărcare
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	
R.M.	160.00	140.00	120.00	100.00	80.00	60.00	40.00	20.00	0.00	
UθXY	150.94	140.66	120.33	100.27	80.23	60.21	39.97	21.38	13.04	
UθY	150.38	140.38	120.36	100.29	80.24	60.21	40.12	20.06	10.04	
Uθ	151.06	140.69	120.33	100.33	80.23	60.20	39.94	21.56	13.44	
UθX	99.96	93.33	79.92	66.45	53.22	36.85	26.69	16.69	7.12	
R.M.	13.33	13.33	13.13	13.33	13.33	13.33	13.33	13.33	13.33	
UθXY	13.36	13.37	13.37	13.37	13.36	13.34	13.53	11.70	9.66	
UθY	13.38	13.38	13.38	13.37	13.36	13.36	13.35	13.34	13.37	
Uθ	13.38	13.38	13.38	13.37	13.36	13.30	13.98	9.36	4.00	
UθX	8,86	8,86	8.86	8.89	8.83	8.97	8.86	7.57	6.42	

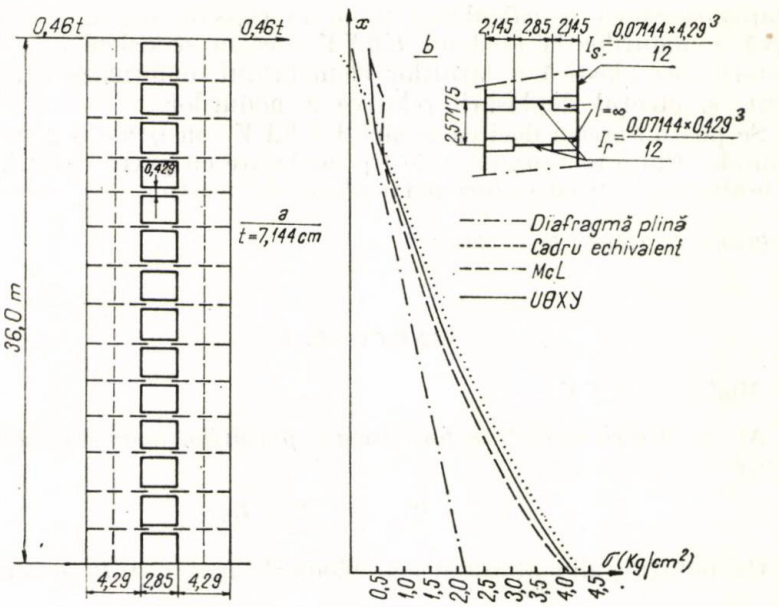


Fig. 9. — Variația efortului unitar longitudinal în fibra extremă a unei diafragme cu un șir de goluri.

7. CONCLUZII

În încheiere, se consideră util să se sublinieze următoarele:

— Principala destinație a modelelor $U\theta X$ și $U\theta Y$ o constituie modelarea grinzilor cu secțiune dreptunghiulară, sau apropiată de aceasta. Dacă grinzile sînt prevăzute cu tălpi late, sau fac parte dintr-o structură spațială, tablier de pod de exemplu, este necesar să se ia în considerație valoarea reală a coeficientului de contracție transversală.

După cum s-a menționat la punctul 6.3. utilizarea modelului $U\theta X$ (sau $U\theta Y$) se va face în funcție de orientarea sistemului axelor de coordonate.

— Modelele $U\theta XY$ și $U\theta X$ sînt indicate pentru calculul șaibelor rectangulare cu raportul laturilor mai mic decît trei. Dacă starea de eforturi este apropiată de cea corespunzătoare încovoierii pure, modelul $U\theta$ este de preferat, realizîndu-se și o economie la timpul de funcționare al calculatorului.

— Îmbunătățirea performanțelor elementelor finite care iau în considerație rotirile la noduri, se reflectă în primul rînd asupra ameliorării deplasărilor calculate; pentru o aceeași discretizare a structurii se obțin valori mult mai apropiate de deplasările reale, decît cele calculate utilizînd modelul Argyris-Melosh. În al doilea rînd, se semnalează o îmbunătățire a relațiilor de calcul a eforturilor unitare în interiorul elementului finit.

În anexa nr. 3 sînt date expresiile eforturilor σx, σy și τ la colțurile elementelor finite pentru modelele $A-M$, $U\theta XY$, $U\theta$, $U\theta X$ și $U\theta Y$. După cum se vede σ_x și σ_y se determină în același mod în toate cazurile, în timp ce efortul τ are expresii diferite. Dacă la modelul Argyris-Melosh

lunecarea specifică se calculează luînd în considerație numai translația relativă a nodurilor la modelul $U\theta XY$ aceasta se calculează în funcție de deformarea elastică a laturilor elementului, deformare care include, evident, și efectul deplasării relative a nodurilor.

Se poate aprecia deci că modelul $U\theta XY$ constituie o generalizare a elementelor finite rectangulare de tip deplasare cu patru noduri, celelalte modele discutate fiind cazuri particulare ale acestuia.

Primită în redacție la 3 iunie 1974

ANEXA NR. 1

Modelul $U\theta XY$

Al. 1. *Matricea de transformare a deplasărilor nodurilor în deformații specifice*

$$B = |\,B1,\ B2,\ B3,\ B4\,|.$$

Cu notațiile din anexa nr. 4, blocurile matricei B se scriu astfel:

$$B1 = \begin{vmatrix} -(1+2\eta)\dfrac{\eta'^2}{a} & 0 & 0 & \eta\eta'^2\beta \\ 0 & -(1+2\xi)\xi'^2/b & -\xi\xi'^2\beta^{-1} & 0 \\ -6\eta\eta'\xi'/b & -6\xi\xi'\eta'/a & (1-3\xi)\xi'\eta' & -(1-3\eta)\xi'\eta' \end{vmatrix},$$

$$B2 = \begin{vmatrix} -(1+2\eta')\eta^2/a & 0 & 0 & -\eta^2\eta'\beta \\ 0 & (1+2\xi)\xi'^2 & \xi\xi'^2\beta^{-1} & 0 \\ 6\eta\eta'\xi'/b & -6\xi\xi'\eta/a & (1-3\xi)\xi'\eta & -(1-3\eta')\eta\xi' \end{vmatrix},$$

$$B3 = \begin{vmatrix} (1+2\eta')\eta^2/a & 0 & 0 & \eta^2\eta^2\beta \\ 0 & (1+2\xi')\xi^2/b & -\xi^2\xi'\beta^{-1} & 0 \\ 6\eta\eta'\xi/b & 6\xi\xi'\eta/a & (1-3\xi')\xi\eta & -(1-3\eta')\eta\xi \end{vmatrix},$$

$$B4 = \begin{vmatrix} (1+2\eta)\eta'^2/a & 0 & 0 & -\eta\eta'^2\beta \\ 0 & -(1+2\xi')\xi^2/b & \xi^2\xi'\beta^{-1} & 0 \\ -6\eta\eta'\xi/b & 6\xi\xi'\eta'/a & (1-3\xi')\xi\eta' & -(1-3\eta)\eta'\xi \end{vmatrix}.$$

Al. 2. *Matricea de rigiditate*

$$K = \frac{E\cdot t}{12(1-\nu^2)}\cdot \begin{vmatrix} K11 & K21^T \\ K21 & K22 \end{vmatrix}.$$

$K11 =$

$\frac{156}{35}\beta+\frac{12(1-\nu)}{5}\beta^{-1}$						
$\frac{3+3\nu}{2}$	$\frac{156}{35}\beta^{-1}+\frac{12(1-\nu)}{5}\beta$					
$-\frac{1-3\nu}{4}a$	$\left(\frac{22}{35}\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$\left(\frac{4}{35}\beta^{-1}+\frac{4(1-\nu)}{15}\beta\right)a^2$				
$-\left(\frac{22}{35}\beta+\frac{1-\nu}{5}\beta^{-1}\right)b$	$\frac{1-3\nu}{4}b$	$-\frac{1+\nu}{24}ab$	$\left(\frac{4}{35}\beta+\frac{4(1-\nu)}{15}\beta^{-1}\right)b^2$			
$\frac{54}{35}\beta-\frac{12(1-\nu)}{5}\beta^{-1}$	$-\frac{3-9\nu}{2}$	$\frac{1+\nu}{4}a$	$\left(\frac{-13}{35}\middle\vert\beta+\frac{1-\nu}{5}\beta^{-1}\right)b$	$\frac{156}{35}\beta+\frac{12(1-\nu)}{5}\beta^{-1}$		
$\frac{3-9\nu}{2}$	$-\frac{156}{35}\beta^{-1}+\frac{6(1-\nu)}{5}\beta$	$\left(-\frac{22}{35}\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{a}\beta\right)a$	$-\frac{1-3\nu}{4}b$	$-\frac{3+3\nu}{2}$	$\frac{156}{35}\beta^{-1}+\frac{12(1-\nu)}{5}\beta$	
$-\frac{1+\nu}{4}a$	$\left(-\frac{22}{35}\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$	$\left(\frac{-4}{35}\beta^{-1}+\frac{2(1-\nu)}{15}\beta\right)a^2$	$\frac{1+\nu}{24}ab$	$\frac{1-3\nu}{4}a$	$\left(\frac{22}{35}\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$\left(\frac{4}{35}\beta^{-1}+\frac{4(1-\nu)}{15}\beta\right)a^2$
$\left(\frac{13}{35}\beta-\frac{1-\nu}{5}\beta^{-1}\right)b$	$-\frac{1-3\nu}{4}b$	$\frac{1+\nu}{24}ab$	$-\left(\frac{3}{35}\beta+\frac{1-\nu}{15}\beta^{-1}\right)b^2$	$\left(\frac{22}{35}\beta+\frac{1-\nu}{5}\beta^{-1}\right)b$	$\frac{1-3\nu}{4}\cdot b$	$-\frac{1+\nu}{24}ab$

SIMETRIC

$K21 =$

$-\left(\frac{54}{35}\beta+\frac{6(1-\nu)}{5}\beta^{-1}\right)$	$-\frac{3+3\nu}{2}$	$-\frac{1+\nu}{4}a$	$\left(\frac{13}{35}\beta+\frac{1-\nu}{10}\beta^{-1}\right)b$	$\frac{-156}{35}\middle\vert\beta+\frac{6(1-\nu)}{5}\beta^{-1}$	$-\frac{3-9\nu}{2}$	$-\frac{1-3\nu}{4}a$	$\left(\frac{-22}{35}\beta+\frac{1-\nu}{10}\beta^{-1}\right)b$
$-\frac{3+3\nu}{2}$	$-\frac{54}{35}\beta^{-1}-\frac{6(1-\nu)}{5}\beta$	$-\left(\frac{13}{35}\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$	$\frac{1+\nu}{4}\cdot b$	$\frac{3-9\nu}{2}$	$\frac{54}{35}\beta^{-1}-\frac{12(1-\nu)}{5}\beta$	$\left(\frac{13}{35}\beta^{-1}-\frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$-\frac{1+\nu}{4}b$
$\frac{1+\nu}{4}a$	$\left(\frac{13}{35}\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$	$\left(\frac{3}{35}\beta^{-1}-\frac{1-\nu}{30}\beta\right)a^2$	$-\frac{1+\nu}{24}ab$	$-\frac{1-3\nu}{4}a$	$\left(\frac{-13}{35}\middle\vert\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$\left(\frac{-3}{35}\middle\vert\beta^{-1}-\frac{1-\nu}{15}\beta\right)a^2$	$\frac{1+\nu}{24}ab$
$-\left(\frac{13}{35}\beta-\frac{1-\nu}{10}\beta^{-1}\right)b$	$-\frac{1+\nu}{4}b$	$-\frac{1+\nu}{24}ab$	$\left(\frac{3}{35}\beta-\frac{1-\nu}{30}\beta^{-1}\right)b^2$	$\left(-\frac{22}{35}\beta+\frac{1-\nu}{10}\beta^{-1}\right)b$	$\frac{1+\nu}{4}b$	$\frac{1+\nu}{24}ab$	$\left(\frac{-4}{35}\middle\vert\beta+\frac{2(1-\nu)}{15}\beta^{-1}\right)b^2$
$-\frac{156}{35}\beta+\frac{6(1-\nu)}{5}\beta^{-1}$	$\frac{3-9\nu}{2}$	$\frac{1-3\nu}{4}a$	$\left(\frac{22}{35}\beta-\frac{1-\nu}{10}\beta^{-1}\right)b$	$\frac{-54}{35}\middle\vert\beta-\frac{6(1-\nu)}{5}\beta^{-1}$	$\frac{3+3\nu}{2}$	$\frac{1+\nu}{4}a$	$\left(\frac{-13}{35}\middle\vert\beta-\frac{1-\nu}{10}\beta^{-1}\right)b$
$-\frac{3-9\nu}{2}$	$\frac{54}{35}\beta^{-1}-\frac{12(1-\nu)}{5}\beta$	$\left(\frac{13}{35}\beta^{-1}-\frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$-\frac{1+\nu}{4}b$	$\frac{3+3\nu}{2}$	$-\frac{54}{35}\beta^{-1}-\frac{6(1-\nu)}{5}\beta$	$-\left(\frac{13}{35}\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$	$\frac{1+\nu}{4}b$
$\frac{1-3\nu}{4}a$	$\left(-\frac{13}{35}\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$-\left(\frac{3}{35}\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{15}\right)a^2$	$\frac{1+\nu}{24}ab$	$-\frac{1+\nu}{4}a$	$\left(\frac{13}{35}\beta^{-1}+\frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$	$\left(\frac{3}{35}\beta^{-1}-\frac{1-\nu}{30}\beta\right)a^2$	$-\frac{1+\nu}{24}ab$
$\left(\frac{22}{35}\beta-\frac{1-\nu}{10}\beta^{-1}\right)b$	$\frac{1+\nu}{4}b$	$\frac{1+\nu}{24}ab$	$\left(\frac{-4}{35}\beta+\frac{2(1-\nu)}{15}\beta^{-1}\right)b^2$	$\left(\frac{13}{35}\beta+\frac{1-\nu}{10}\beta^{-1}\right)b$	$-\frac{1+\nu}{4}b$	$-\frac{1+\nu}{24}ab$	$\left(\frac{3}{35}\beta-\frac{1-\nu}{30}\beta^{-1}\right)b^2$

Submatricele $K11$ și $K21$ sînt reproduse în întregime în continuarea anexei.

Submatricea $K22$ se obține din submatricea $K11$:

$$K22 = (-1^M)\cdot(-1)^N \cdot K11,$$

$$M = 1 + INT\left(\frac{i+1}{2}\right),$$

$$N = 1 + INT\left(\frac{j+1}{2}\right),$$

i, j sînt indicii de linie și coloană ai submatricei.

ANEXA NR. 2

Modelul $U\theta X$

A2.1. *Matricea de transformare a deplasărilor nodurilor în deformații specifice*

$$B = |\, B1,\ B2,\ B3,\ B4\,|.$$

Cu notațiile din anexa nr. 4, blocurile matricei B se scriu astfel:

$$B1 = \begin{vmatrix} -\eta'/a & 0 & 0 \\ 0 & -(1+2\xi)\xi'^2/b & -\xi\xi'^2\beta^{-1} \\ -\xi'/b & -6\xi'\eta'\xi/a & (1-3\xi)\xi'\eta' \end{vmatrix},$$

$$B2 = \begin{vmatrix} -\eta/a & 0 & 0 \\ 0 & (1+2\xi)\xi'^2/b & \xi\xi'^2\beta^{-1} \\ \xi'/b & -6\xi\xi'\eta/a & (1-3\xi)\xi'\eta \end{vmatrix},$$

$$B3 = \begin{vmatrix} \eta/a & 0 & 0 \\ 0 & (3-2\xi)\xi^2/b & -\xi^2\xi'/\beta^{-1} \\ \xi/b & 6\xi\xi'\eta/a & -(2-3\xi)\xi\eta \end{vmatrix},$$

$$B4 = \begin{vmatrix} \eta'/a & 0 & 0 \\ 0 & -(3-2\xi)\xi^2/b & \xi^2\xi'\beta^{-1} \\ -\xi/b & 6\xi\xi'\eta'/a & -(2-3\xi)\xi\eta' \end{vmatrix}.$$

$K11 =$

$4\beta + 2(1-\nu)\beta^{-1}$					
$\frac{3}{2}(1+\nu)$	$\frac{156}{35}\beta^{-1} + \frac{12}{5}(1-\nu)\beta$	SIMETRIC			
$-\frac{1}{4}(1-3\nu).a$	$\left(\frac{22}{35}\beta^{-1} + \frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$\left(\frac{4}{35}\beta^{-1} + \frac{4(1-\nu)}{15}\beta\right)a^2$			
$2\beta - 2(1-\nu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$\frac{1}{4}(1+\nu)a$	$4\beta + 2(1-\nu)\beta^{-1}$		
$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{156}{35}\beta^{-1} + \frac{6(1-\nu)}{5}\beta$	$\left(\frac{-22}{35}\beta^{-1} + \frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$\frac{156}{35}\beta^{-1} + \frac{12(1-\nu)}{5}\beta$	
$-\frac{1}{4}(1+\nu)a$	$\left(\frac{-22}{35}\beta^{-1} + \frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$	$\left(\frac{-4}{35}\beta^{-1} + \frac{2(1-\nu)}{15}\beta\right)a^2$	$\frac{1}{4}(1-3\nu)a$	$\left(\frac{22}{35}\beta^{-1} + \frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$\left(\frac{4}{35}\beta^{-1} + \frac{4(1-\nu)}{15}\beta\right)a^2$

$K12 =$

$-2\beta - (1-\nu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{1}{4}(1+\nu)a$	$-4\beta + (1-\nu)\beta^{-1}$	$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$-\frac{1}{4}(1-3\nu)a$
$-\frac{3}{2}(1+\nu)$	$\frac{-54}{35}\beta^{-1} - \frac{6(1-\nu)}{5}\beta$	$-\left(\frac{13}{35}\beta^{-1} + \frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$\frac{54}{35}\beta^{-1} - \frac{12(1-\nu)}{5}\beta$	$\left(\frac{13}{35}\beta^{-1} - \frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$
$\frac{1}{4}(1+\nu)a$	$\left(\frac{13}{35}\beta^{-1} + \frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$	$\left(\frac{3}{35}\beta^{-1} - \frac{1-\nu}{30}\beta\right)a^2$	$-\frac{1}{4}(1-3\nu).a$	$\left(\frac{-13}{35}\beta^{-1} + \frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$\left(\frac{-3}{35}\beta^{-1} - \frac{1-\nu}{15}\beta\right)a^2$
$-4\beta + (1-\nu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$\frac{1}{4}(1-3\nu)a$	$-2\beta - (1-\nu)\beta^{-1}$	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	$\frac{1}{4}(1+\nu)a$
$-\frac{3}{2}(1-3\nu)$	$\frac{54}{35}\beta^{-1} - \frac{12(1-\nu)}{5}\beta$	$\left(\frac{13}{35}\beta^{-1} - \frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$\frac{3}{2}(1+\nu)$	$-\frac{54}{35}\beta^{-1} - \frac{6}{5}(1-\nu)\beta$	$\left(\frac{-13}{35}\beta^{-1} + \frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$
$\frac{1}{4}(1-3\nu)a$	$\left(\frac{-13}{35}\beta^{-1} + \frac{1-\nu}{5}\beta\right)a$	$\left(\frac{-3}{35}\beta^{-1} - \frac{1-\nu}{15}\beta\right)a^2$	$-\frac{1}{4}(1-\nu)a$	$\left(\frac{13}{35}\beta^{-1} + \frac{1-\nu}{10}\beta\right)a$	$\left(\frac{3}{35}\beta^{-1} - \frac{1-\nu}{30}\beta\right)a^2$

Eforturi unitare la colțurile elementelor finite

	$A-M$	$U\theta XY$	$U\theta$	$U\theta X$	$U\theta Y$
τ	$\tau_1 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{V4-V1}{a} - \frac{U1-U2}{b}\right)$	$\tau_1 = \frac{E}{2(1+\nu)}(\theta_{x1}-\theta_{y1})$	0	$\tau_1 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\theta_{x1} - \frac{U1-U2}{b}\right)$	$\tau_1 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{V4-V1}{a} - \theta_{y1}\right)$
	$\tau_2 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{V3-V2}{a} - \frac{U1-U2}{b}\right)$	$\tau_1 = \frac{E}{2(1+\nu)}(\theta_{x2}-\theta_{y2})$		$\tau_2 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\theta_{x2} - \frac{U1-U2}{b}\right)$	$\tau_2 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{V3-V2}{a} - \theta_{y2}\right)$
	$\tau_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{V3-V2}{a} - \frac{U4-U3}{b}\right)$	$\tau_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}(\theta_{x3}-\theta_{y3})$		$\tau_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\theta_{x3} - \frac{U4-U3}{b}\right)$	$\tau_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{V3-V2}{a} - \theta_{y1}\right)$
	$\tau_4 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\frac{V4-V1}{a} - \frac{U4-U3}{b}\right)$	$\tau_4 = \frac{E}{2(1+\nu)}(\theta_{x4}-\theta_{y4})$		$\tau_4 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left(\theta_{x4} - \frac{U4-U3}{b}\right)$	$\tau_4 = \frac{E}{2(1-\nu)}\left(\frac{V4-V1}{a} - \theta_{y4}\right)$
σ_x	$\sigma_{x1} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{U4-U1}{a} + \frac{\nu(V2-V1)}{b}\right)$			$\sigma_{x2} = \frac{E}{1-y^2}\left(\frac{U3-U2}{a} + \frac{\nu(V2-V1)}{b}\right)$	
	$\sigma_{x3} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{U3-U2}{a} + \frac{\nu(V3-V4)}{b}\right)$			$\sigma_{x4} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{U4-U1}{a} + \frac{\nu(V3-V4)}{b}\right)$	
σ_y	$\sigma_{y1} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{V2-V1}{b} + \frac{\nu(U4-U1)}{a}\right)$			$\sigma_{y2} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{V2-V1}{b} + \frac{\nu(U3-U2)}{a}\right)$	
	$\sigma_{y3} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{V3-V4}{b} + \frac{\nu(U3-U2)}{a}\right)$			$\sigma_{y4} = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{V4-V4}{b} + \frac{\nu(U4-U1)}{a}\right)$	

A2.2. *Matricea de rigiditate*

$$K = \frac{E \cdot t}{12(1-\nu^2)} \begin{vmatrix} K11 & K21^T \\ K21 & K22 \end{vmatrix}.$$

Submatricile $K11$ și $K21$ sînt reproduse în întregime în continuarea anexei :

$K22$ se obține din submatricea $K11$:

$$K22 = (-1)^M \cdot (-1)^N \cdot K11,$$

$$M = INT\left(\frac{i}{3}\right) + INT\left(\frac{i}{4}\right),$$

$$N = INT\left(\frac{j}{3}\right) + INT\left(\frac{j}{4}\right),$$

i, j, sînt indicii de linie și coloană ai submatricei.

ANEXA NR. 4

NOTAȚII

a reprezintă latura elementului în direcția ox,
b — latura elementului în direcția oy,
t — grosimea elementului,
E — modul de elasticitate,
μ, ν — coeficientul lui Poisson,

$$\beta = \frac{b}{a},$$

$$\xi = \frac{x}{a},$$

$$\xi' = 1 - \xi,$$

$$\eta = \frac{y}{b},$$

$$\eta' = 1 - \eta.$$

BIBLIOGRAFIE

1. Argyris J. H. *Energy Theorems and structural analysis*, Aircraft Eng. Vol. 26 (1954) pg. 383 și vol. 27 (1955), p. 42, 80, 145.
2. Argyris, J. H., *Matrix methods of structural analysis*, editor B. Fraeijs de Veubeke, Pergamon Press, Oxford 1964.
3. Argyris J. H., *Triangular elements with linearly varying strain for the matrix displacement method*, J. Roy Aero. Soc., **69**, 711 (1965).
4. Argyris J. H., *Arbitrary quadrilateral spar webs for the matrix displacement method*, J. Roy. Aero. Soc., **70**, 359 (1966).
5. Argyris J. H., *Membrane paralellogram element with linearly varying edge strain, for the matrix displacement method*, J. Roy. Aero. Soc., **70**, 599 (1966).

6. Belei A., *Utilizarea metodei elementului finit și a analizei matriceale în calculul tensiunilor termice*, St. cerc. mec. apl., *6* (1972).
7. Clough, R. W., *The finite element in structural mechanics*, cap. VII din Stress Analysis, editată de Zienkiewics și Holister. Wiley, 1965.
8. Dunne, C. P., *Complete polynomial displacement fields for finite element method*, The Aeronautical Journal, **72** 245 (1964).
9. Ergatoudis I., B. M. Irons, O. C. Zienkiewicz, *Curved, isoparametric, quadrilateral elements for finite element analysis*, Int. J. Solids Struct., *4* 31 (1968).
10. Filonenko-Borodich, *Theory of elasticity*, Mir Publishors Moscow, 1968.
11. Fraeijs de Veubeke, *Upper and lower bounds in matrix structural analysis — in Matrix methods of structural analysis*, editor B. Fraeijs de Veubeke, Pergamon Press, Oxford 1964.
12. Fraeijs de Veubeke, *Displacement and equilibrium models in the finite element method*, cap. IX din Stress Analysis, editată de Zienkiewicz și Holister, Wiley, 1965.
13. Haftka R. T., J. C. Robinson, *Effect of out-of-planeness membrane quadrilateral finite elements*, AIAA Journal **11**, 742 (1973).
14. Hartz B. J., *Comentarii la „Bounding plane stress solutions by finite elements"* de R. F. Hooley și P. D. Hibbert, J. S. D., **93**, 547 (1967).
15. Hooley R. F., Hibbert P. D., *Bounding plane stress Solutions by finite elements*, J.S.D., **92**, 39 (1966).
16. Hooley R. F., P. D. Hibbert, *Stress concentration in timber beams*, J.S.D., **93**, 127 (1967).
17. Irons B. M., *Numerical integration applied to finite element method*, Conferința „Calculatoarele în calculul structurilor", Newcastle, iulie 1966.
18. Khanna J., Hooley R. F., *Comparison and evaluation of stiffness matrices*, AIAA Journal, *4* (1966).
19. Mac Leod I. A., *New rectangular finite element for shear wall analysis*, J.S.D., **95**, 399 (1969).
20. Massonett Ch., G. Deprez, R. Maquoi, R. Muller, G. Fonder, *Calculul structurilor la calculatoare electronice*, Traducere din limba franceză, Ed. Tehnică, București, 1974.
21. Mazilu, P., *Statica Construcțiilor* Vol. II E. T. Buc. 1959.
22. Melosh J. R., *Basis for Derivation of Matrices for the Direct Stiffness Method*, AIAA Journal, **1** 1631 (1963).
23. Mc Millan C. M., G. A. Butlin, *An improved finite element for analysis of plane coupled shear walls-Civil Engineering*, & Public Works Review, December 1971.
24. Pole M. G., *comentarii la „New Rectangular Finite Element for Shear Wall Analysis"* de I. Mac Leod, J.S.D., **96**, 140 (1970).
25. Pian T.H.H., *Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution*, AIAA Journal, **2**, 1333 (1964).
26. Przemieniecki, J. S., *Theory of matrix structural analysis*, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1968.
27. Rozin, L. A., *Osnovi metoda konecinih elementov v teorii uprugosti*, ed. L.P.I 1972.
28. Smirnov A. F., *Stabilitatea statică și dinamică a construcțiilor*, Traducere din limba rusă, Edit. Tehnică a Transporturilor, București, 1951.
29. Taig I. C., *Structural Analysis by the Displacement Method*, English Electric Aviation Raport S. O. 17, Warton, 1961.
30. Teodorescu P. P., *Probleme plane în Teoria Elasticității* — Vol. 1, E.A. 1960.
31. Tocher J. L., B. J. Hartz, *Higher-order finite element for plane stress*, J. Eng. Mech. Div. EM4, 1967, p. 149.
32. Tong P., T. H. H. Pian, *The convergence of finite element method in solving linear elastic problems*, Int. J. Solids Struct, Vol. 3 (1967) p. 865.
33. Turner M. J., R. W. Clough, H. C. Martin, L. J. Topp, *Stiffness and deflection analysis of complex structures*, J. Aeron. Sci., **23**, 805 (1956).
34. Topa N., *Utilizarea metodei elementelor finite în calculul unor construcții hidrotehnice*, Hidrotehnica, **15**, 299 (1970).
35. Topa N., M. Ghermănescu *Le concept de noeud élastique dans le calcul des partiques*, Mécanique Appliquée, *4*/1973).
36. Uhov B. S., *Rasciot soorujenii i osnovanii metodom konecinih elementov*, Moskwa, 1973.
37. Visarion V., Cr. Stănescu, N. Grădinaru, R. Iovănescu, *Element diferențial-finit de placă curbă de rotație*, St. cerc. mec. apl., *6* (1972).
38. Willam K. J., Scordelis A. C., *Cellular structures of arbitrary plan geometry*, J.S.D., **98**, 1377 (1972).
39. Zienkiewicz O. C., Y. K. Cheung, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, Mc Graw-Hill, 1967.

ANALIZA STĂRII DE EFORTURI A TOARTEI CAPULUI HIDRAULIC

de N. POSEA, C. MANEA

Institutul de petrol şi gaze Ploieşti

Se prezintă un procedeu de calcul pentru determinarea exactă a eforturilor şi tensiunilor în orice secţiune a toartei capului hidraulic, care constituie elementul de legătură dintre garnitura de prăjini şi cîrligul macaralei unei instalaţii de foraj.
Algoritmul stabilit, luînd ca parametri toate elementele geometrice ale structurii analizate, este transpus într-un program automat de calcul, cu ajutorul căruia dimensiunile toartei pot fi optimizate.
Lucrarea mai cuprinde o analiză a stării-limită plastice, care permite precizarea coeficientului real de siguranţă şi experienţele efectuate pe toarta capului hidraulic a instalaţiei *F*-500, ale căror date verifică în întregime rezultatele teoretice.

Toarta capului hidraulic (biglul) împreună cu cîrligul macaralei constituie elementele de legătură ale echipamentului de manevră al unei instalaţii de foraj, de a căror comportare depinde atît buna funcţionare a instalaţiei, cît şi evitarea unor accidente.

Pornind de la aceste considerente, lucrarea de faţă prezintă, pentru toarta capului hidraulic a unei instalaţii de foraj, o metodă exactă de calcul, care permite atît determinarea tensiunilor şi deformaţiilor în stadiul de exploatare, cît şi evaluarea corectă a coeficientului de siguranţă, prin luarea în considerare a proprietăţilor plastice ale materialului din care se confecţionează toarta.

Algoritmul realizat este transpus într-un program pentru un calculator cifric, a cărui utilizare uşurează şi, în acelaşi timp, îmbunătăţeşte munca de proiectare pentru calculul biglului oricărei instalaţii de foraj.

1. DETERMINAREA EFORTURILOR SECŢIONALE ÎN TOARTA CAPULUI HIDRAULIC

Biglul unei instalaţii de foraj (fig. 1) se prinde prin două buloane de corpul capului hidraulic şi pentru calculul eforturilor se schematizează la sistemul din figura 2*a* care este o dată static nedeterminat.

Întrucît raza interioară a cîrligului macaralei este practic egală cu raza interioară a porţiunii curbe a toartei (STAS 8473—68), în timpul funcţionării toarta şi cîrligul macaralei se vor afla în contact pe întreaga lungime curbă E-C-E' (fig. 2*a*).

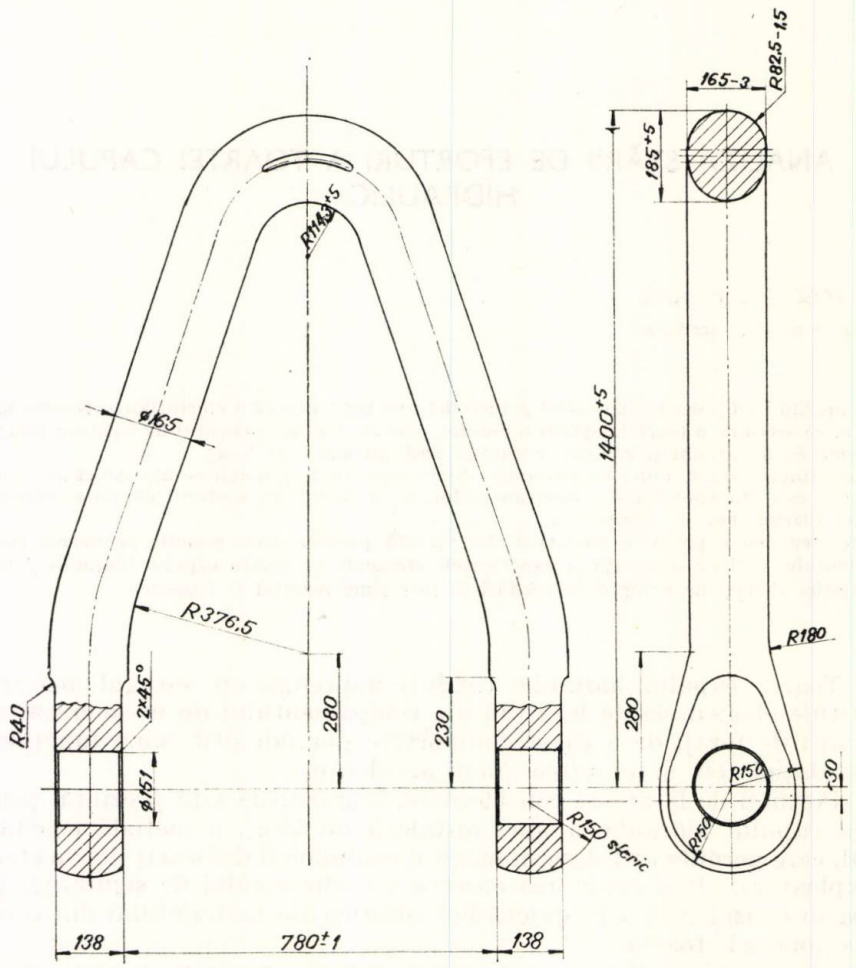


Fig. 1

În consecință, toarta este acționată de o sarcină distribuită (fig. 2*b*), a cărei lege de variație se consideră de forma

$$p(\beta) = p_0 \cos j\beta. \tag{a}$$

Notînd cu F forța la cîrlig și folosind condițiile evidente,

$$p(\alpha) = 0 \quad \text{pentru} \quad \beta = \alpha,$$

$$p_0 \int_0^{\alpha} (\cos j\beta \cdot \cos \beta)\, r\, d\beta = 0{,}5\, F,$$

se obțin constantele :

$$j = \frac{\pi}{2\alpha}; \qquad p_0 = \frac{j^2 - 1}{2j \cos \alpha} \cdot \frac{F}{r},$$

care, introduse în (a), determină intensitatea sarcinii distribuite pe toarta capului hidraulic în funcție de sarcina la cîrlig

$$p(\beta) = \frac{\left(\frac{\pi}{2\alpha}\right)^2 - 1}{\frac{\pi}{\alpha}\cos\alpha}\,\frac{F}{r}\cos\frac{\pi}{2\alpha}\beta. \tag{1}$$

Pentru rezolvarea sistemului static nedeterminat se aplică metoda generală a eforturilor [1].

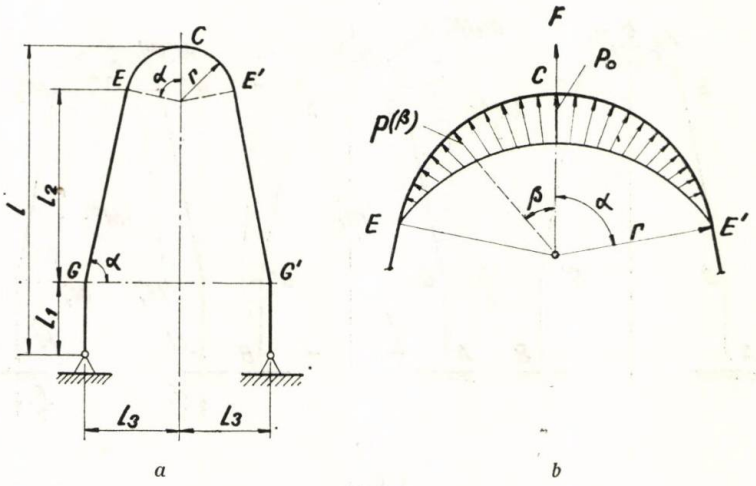


Fig. 2

Alegînd forma de bază din figura 3*a* se determină în mod independent diagrama m_1 (fig. 3*b*) produsă de $X_1 = 1$, diagrama M° produsă de sarcinile exterioare și din ecuația de continuitate

$$X_1\delta_{11} + \Delta_{10} = 0, \tag{2}$$

în care δ_{11}, Δ_{10} au semnificațiile cunoscute [1], se obține valoarea necunoscutei X_1.

Datorită porțiunii curbe ECE' (fig. 3*a*) care reprezintă o bară cu mare curbură, calculul coeficienților δ_{11} și Δ_{10} se efectuează pe porțiunile drepte ale structurii în mod distinct de cele curbe. Astfel,

$$EI_0\,\delta_{11} = EI_0\,\delta_{11}^{dr} + EI_0\,\delta_{11}^{c}. \tag{3}$$

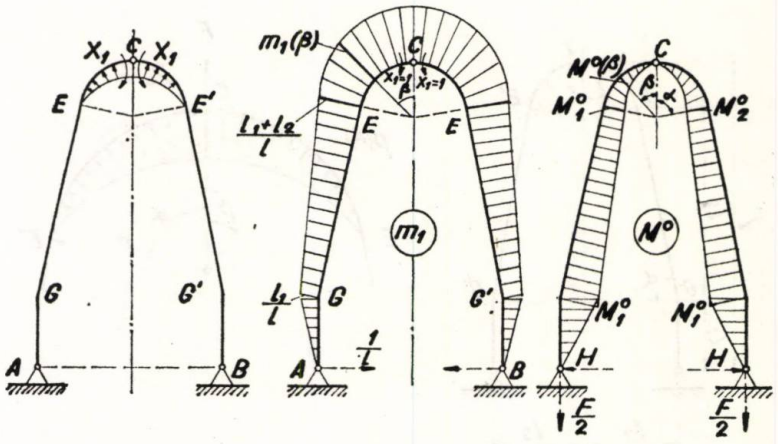
Pentru porțiunile drepte, folosind diagrama m_1 (fig. 3*b*) și aplicînd regula lui Vereșceaghin, se obține

$$EI_0\,\delta_{11}^{dr} = \int_{l_{dr}} \frac{I_0}{I}\,m_1^2\,dx = \frac{1}{3l^2}\left[l_1^3 + \frac{l_2}{\sin\alpha}\,(3\,l_1^2 + 3\,l_1\,l_2 + l_2^2)\right] \tag{3'}$$

(s-a considerat $I_0 = \frac{\pi R^4}{4}$ ca fiind momentul de inerţie al secţiunii transversale a biglului de pe zona porţiunilor drepte).

Partea curbă se împarte în N tronsoane, fiecare avînd lungimea $\Delta S = \frac{r\alpha}{N}$. Alegînd variabila

$$\beta_i = \frac{\alpha}{2N} + (i-1)\frac{\alpha}{N} \qquad (i = 1, 2, \ldots, N) \tag{b}$$



a *b* *c*

Fig. 3

în funcţie de care expresia momentului încovoietor din $X_1 = 1$ (fig. 3 *b*) este

$$m_1(\beta_i) = \frac{1}{l}\left[l_1 + l_2 + r(\cos\beta_i - \cos\alpha)\right], \tag{c}$$

valoarea lui δ_{11} pentru zona curbă se calculează cu formula

$$EI_0\,\delta_{11}^c = \sum_{i=1}^{N} \frac{I_0}{I_i''}\, m_1^2(\beta_i)\cdot\Delta S. \tag{3''}$$

Mărimea I_i'' se determină cu formula

$$I_i'' = \frac{I_i'}{1+k}, \tag{4}$$

unde

$$I_i' = kA_i r_i^2 = \int_{(A)} \frac{r_i}{r_i + y}\, y^2\, \mathrm{d}A. \tag{d}$$

Pentru forma și dimensiunile secțiunii transversale din figura 4*a*, considerînd $r_i = r = \text{const.}$, prin efectuarea integralei (d) se obține

$$I_i' = \frac{Rh_i^3}{6} + \frac{Rh_i^3}{40}\left(\frac{h_i}{r}\right)^2 + \frac{Rh_i^3}{224}\left(\frac{h_i}{r}\right)^4 + \frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R^2 h_i^2}{4} +$$

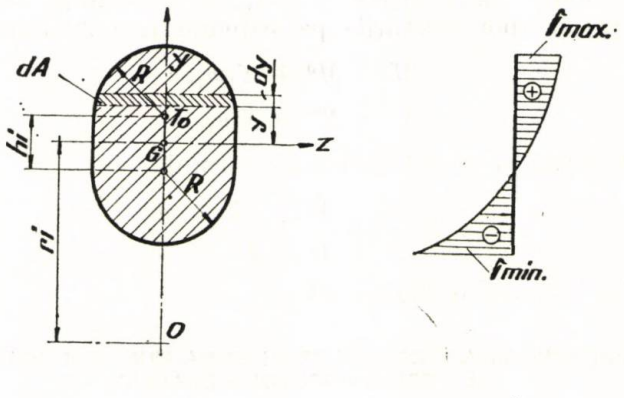
$$+ \frac{4}{3} R^3 h_i + \frac{\pi}{16} Rh_i^3 \left(\frac{h_i}{r}\right)\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{2}{3} Rh_i^3 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{3\pi}{8} R^2 h_i^2 \left(\frac{R}{r}\right)^2 +$$

$$+ \frac{16}{15} R^3 h_i \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{\pi}{16} R^4 \left(\frac{R}{r}\right)^2 + \frac{\pi R h_i^3}{64}\left(\frac{h_i}{r}\right)^3\left(\frac{R}{r}\right) + \frac{Rh_i^3}{4}\left(\frac{h_i}{r}\right)^2 +$$

$$+ \frac{15\pi Rh_i^3}{64}\left(\frac{h_i}{r}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^3 + \frac{4}{3} Rh_i^3 \left(\frac{R}{r}\right)^4 + \frac{\pi R^2 h_i^2}{28}\left(\frac{R}{r}\right)^4 + \frac{5R^4}{64}\left(\frac{R}{r}\right)^4.$$

Procedînd în mod asemănător ca la δ_{11}, Δ_{10} se calculează cu expresia

$$EI_0 \Delta_{10} = EI_0 \Delta_{10}^{dr} + EI_0 \Delta_{10}^{c}. \tag{6}$$



a *b*

Fig. 4

Pe porțiunile drepte, folosind diagramele m_1 (fig. 3*b*), M^0 (fig. 3*c*) și aplicînd formula Maxwell-Mohr și regula lui Vereșceaghin, se obține

$$EI_0 \Delta_{10}^{dr} = \int_{l_{dr}} \frac{I_0}{I} m_1 M^0 \, dx = -\frac{1}{3}\left\{ l_1^2 M_1^0 + [l_1 l_2 M_1^0 + l_2(l_1 + l_2) M_2^0 + \right.$$

$$\left. + 0{,}5\, l_1 l_2 M_2^0 + 0{,}5\, l_2(l_1 + l_2) M_1^0] \frac{1}{\sin \alpha} \right\}, \tag{6'}$$

în care s-a notat

$$M_1^0 = H \cdot l_1 = \frac{l_3 - r\left(\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{2\alpha}{\pi \cos\alpha}\right)}{2l} F l_1, \tag{e}$$

$$M_2^0 = H(l_1 + l_2) - \frac{F}{2} l_2 \operatorname{ctg}\alpha. \tag{f}$$

Pe porțiunea curbă, folosind împărțirea în tronsoane, se evaluează suma

$$EI_0 \Delta_{10}^c = \sum_{i=1}^{N} \frac{I_0}{I_i''} m_{i,1} M_i^0 \Delta S, \tag{6''}$$

în care m_{i1} este dat de formula (c), iar M_i^0 de expresia

$$M_i^0 = -H_1 r(1 - \cos\beta_i) + \frac{Fr}{\pi \cos\alpha}\left(\cos\beta_i - \cos\frac{\pi}{2\alpha}\beta_i\right), \tag{g}$$

unde s-a notat

$$H_1 = N_c^0 = H + \frac{\dfrac{\pi}{2\alpha}\sin\alpha - 1}{\dfrac{\pi}{\alpha}\cos\alpha} \cdot F. \tag{h}$$

După calculul coeficienților δ_{11}, Δ_{10} se determină necunoscuta X_1 din ecuația (2) și apoi eforturile pe sistemul real cu expresiile

$$\begin{aligned} M &= M^0 + X_1 m_1, \\ N &= N^0 + X_1 n_1. \end{aligned} \tag{7}$$

Efortul unitar σ se calculează cu formula

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{Ar} + \frac{M}{I'} r \frac{y}{r+y} \tag{8}$$

și are variația arătată în figura 4*b*.

2. DETERMINAREA EFORTURILOR ÎN ZONA PRINDERII TOARTEI DE CORPUL CAPULUI HIDRAULIC

Ochiul toartei (fig. 1*b*) se consideră o bară curbă circulară dublu încastrată (fig. 5).

Presiunea de contact (fig. 5*a*) variază, pentru $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, după legea

$$p = p_0 \cos\theta. \tag{9}$$

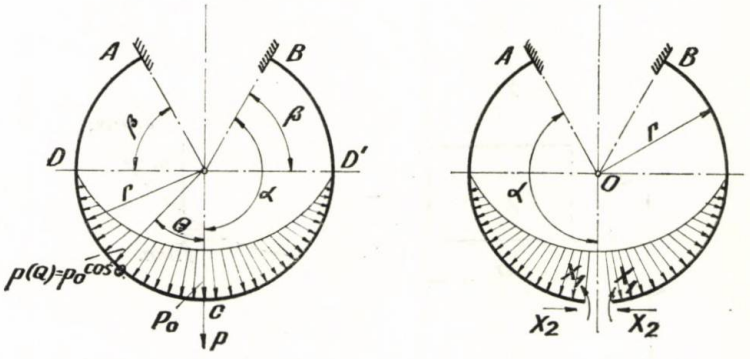
Din condiția

$$P = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} p_0 r \cos^2\theta \, d\theta = 0{,}5\, F,$$

se obţine

$$p_0 = \frac{2P}{\pi r}.$$

Din punct de vedere static, ochiul toartei schematizat ca în figura 5*a* şi acţionat simetric de sarcina cosinusoidală (9), constituie un sistem de două ori static nedeterminat pentru care se aplică, de asemenea, metoda generală a eforturilor [3].



a *b*

Fig. 5

Alegînd forma de bază din figura 5*b*, ecuaţiile de continuitate prezintă forma :

$$\begin{aligned} X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + \Delta_{10} &= 0, \\ X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + \Delta_{20} &= 0, \end{aligned} \tag{10}$$

iar deplasările punctuale δ_{ij} şi Δ_{i0} se calculează cu formula lui Maxwell-Mohr pentru bare curbe.

Pentru $\alpha = 150° = 2{,}62$ rad ($\beta = 60°$) rezultă :

$$\delta_{11} = 5{,}24\,\frac{r}{EI''}, \tag{11}$$

$$\delta_{22} = 5{,}427\,\frac{r^3}{EI''} + 14{,}07\,\frac{r}{EA}, \tag{12}$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = 4{,}24\,\frac{r^2}{EI''} - \frac{1}{A}, \tag{13}$$

$$\Delta_{10} = -\frac{P}{E}\left(\frac{r^2}{I''} + \frac{1}{A}\right)\cdot 1{,}82 \tag{14}$$

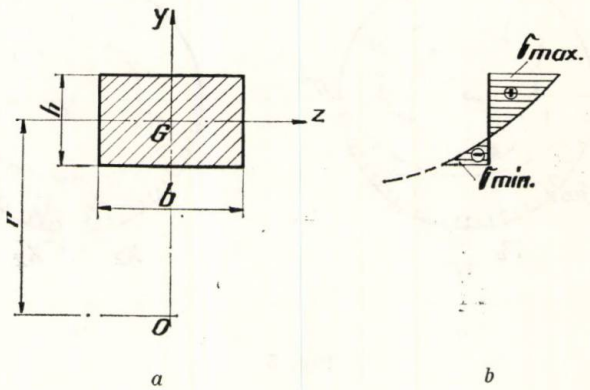
$$\Delta_{20} = -\frac{P}{E}\left(2{,}136\,\frac{r^3}{I''} + 5{,}436\,\frac{r}{A}\right). \tag{15}$$

Secțiunea transversală a barei curbe considerată fiind dreptunghiulară (fig. 6*a*), elementele geometrice care intervin au expresiile :

$$I' = \frac{bh^3}{12}\left[1 + \frac{3}{20}\left(\frac{h}{r}\right)^2 + \frac{3}{112}\left(\frac{h}{r}\right)^4\right], \tag{16}$$

$$k = \frac{I'}{Ar^2}, \tag{17}$$

$$I'' = \frac{I'}{1+k}. \tag{18}$$



a *b*

Fig. 6

Din rezolvarea sistemului (10) se determină necunoscutele X_1, X_2 după care cu expresiile

$$\begin{aligned} M &= M^0 + X_1 m_1 + X_2 m_2, \\ N &= N^0 + X_1 n_1 + X_2 n_2, \end{aligned} \tag{19}$$

se obțin eforturile reale.

Distribuția de tensiuni σ (fig. 6*a*) se calculează cu formula (8).

3. ALCĂTUIREA PROGRAMULUI PENTRU UN CALCULATOR CIFRIC

În scopul ușurării și îmbunătățirii proiectării toartei capului hidraulic, algoritmul dezvoltat în paragrafele anterioare este transpus într-un program pentru un calculator cifric.

Ca limbaj de programare este folosit *ALGOL*-60, restricția calculatorului *ELIOTT* 4120.

Ordinea de efectuare a operațiilor este indicată în schema logică din figura 7, iar programul detaliat, denumit *BCH* (biglul capului hidraulic), este redat în anexa 1.

Datele de intrare se dau în ordinea indicată în tabela 1, iar cele de ieșire (rezultatele) în ordinea din tabela 2.

Simbolurile folosite în tabelele de mai sus au semnificaţiile precizate în tabela 3.

Se remarcă faptul că rezultatele finale reprezintă eforturile unitare maxime şi minime din secţiunile cele mai solicitate ale structurii analizate. Prin aceasta inginerul proiectant, cunoscînd rezistenţele admisibile, poate decide, fără alte calcule intermediare (manuale), dacă dimensiunile alese iniţial sînt corespunzătoare sau dacă este nevoie de o modificare, optimă pentru toate secţiunile (vezi aplicaţia de la punctul 6).

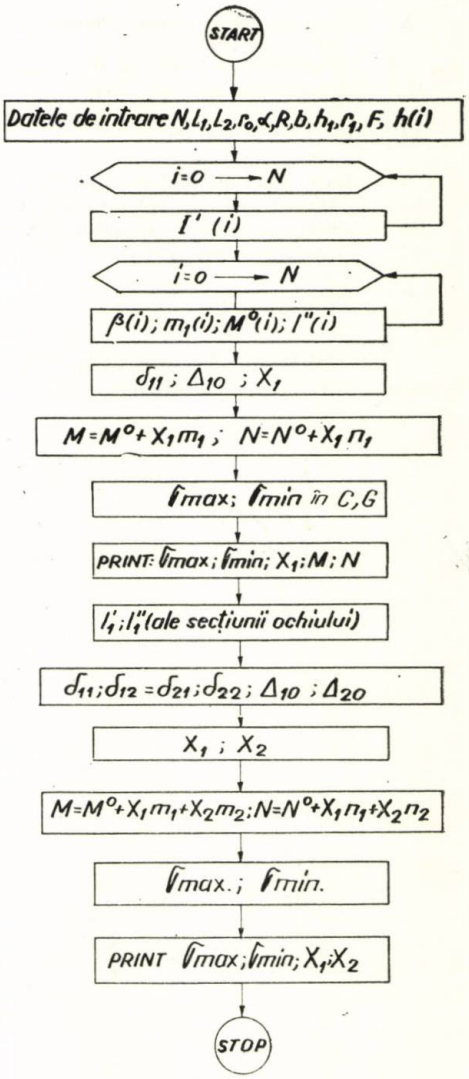


Fig. 7

4. STABILIREA CAPACITĂŢII PORTANTE LIMITĂ

Materialul din care se confecţionează toarta capului hidraulic are o curbă caracteristică de tipul celei din figura 8*a*, care, pentru deformaţii relativ mici peste ε_c, poate fi aproximată sub forma a două drepte (fig. 8*b*). O diagramă de acest tip este denumită curbă caracteristică cu întărire. Folosirea acesteia pentru stabilirea capacităţii portante limită necesită precizarea mărimii deformaţiei specifice de rupere (ε_r), sau a valorii maxime ε_{max} pentru care structura nu mai poate fi utilizată.

Dacă curba caracteristică poate fi schematizată sub forma diagramei Prandtl ($\alpha = 0$), atunci capacitatea portantă limită a unei secţiuni se obţine pentru plastificarea totală a secţiunii, ceea ce echivalează cu transformarea ei într-o articulaţie plastică.

Tabela 1

N,	*L1,*	*L2,*	*RC,*	*AL,*	*R,*	*B1,*	*H3,*	*R1,*	*F,*	*H[0 : N];*

Tabela 2

X1,	*EUE,*	*EU1,*	*EU1E,*	*EU11,*	*Z1,*	*Z2*	*EUE1,*	*EU11*

Tabela 3

Simbol	Semnificație	Simbol	Semnificație
N	Numărul de tronsoane considerate pe zona curbă	$H[O:N]$	Înălțimea porțiunii dreptunghiulare a secțiunii (fig. 4*a*)
$L1, L2$	Dimensiuni indicate pe fig. 2*a*.	$X1$	Momentul încovoietor în C (fig. 3*a*)
RC	Raza fibrei mediane curbe	EUE	Eforturile unitare în fibrele ex-
		EUI	treme ale secțiunii C (fig. 4*b*)
AL	Unghiul α, fig. 2a	$EU1E$	
		$EU1I$	Eforturile unitare din fibrele extreme ale secțiunii G
R	Raza secțiunii biglului (fig. 4*a*)		
$B1$	Lățimea secțiunii ochiului (fig. 6*a*)	$Z1, Z2$	Eforturile secționale din C (fig. 5)
$H3$	Înălțimea secțiunii ochiului (fig. 6*a*)	$EUE\ 1$	Eforturile unitare din fibrele extre-
$R1$	Raza fibrei mediane a ochiului toartei	$EUI\ 1$	me ale secțiunii C (fig. 6*b*)
F	Forța la cîrlig		

În cazul toartei capului hidraulic, starea limită plastică corespunde transformării în articulație plastică a secțiunii din C (fig. 2*a*).

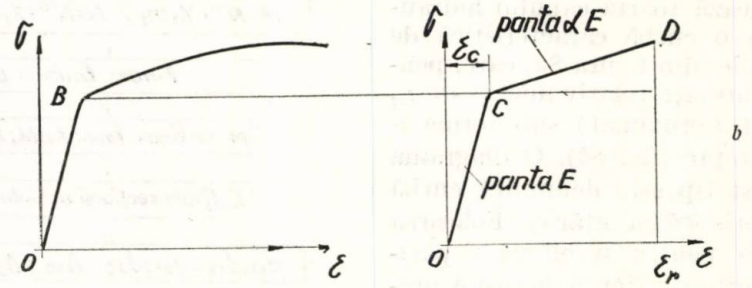


Fig. 8

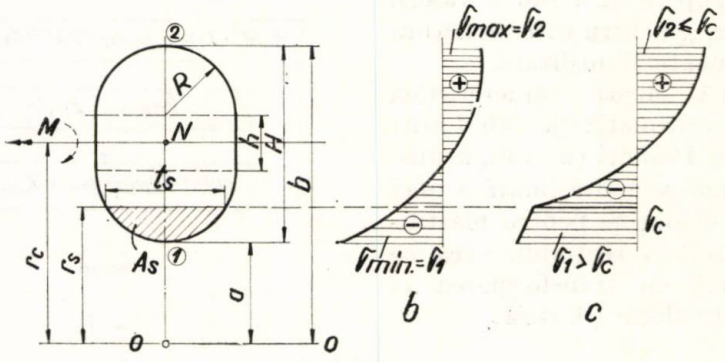


Fig. 9

Distribuția de tensiuni pe secțiune (fig. 9*a*) pentru domeniul elastic este arătată în figura 9*b*. Se observă că depășirea domeniului elastic are loc mai întîi în fibra 1, dinspre interiorul toartei, prin depășirea rezistenței de curgere la compresiune.

Pentru a evalua creşterea capacităţii portante în funcţie de mărimea zonei plastificate a secţiunii, se consideră că plastificarea are loc pe aria A_s (fig. 9*a*) cuprinsă între razele a şi r_s.

Admiţînd curba caracteristică cu întărire (fig. 8*b*), distribuţia de tensiuni are alura din figura 9*c*.

Folosind metodologia de calcul din capitolul 7 al lucrării [2], valoarea momentului capabil M, corespunzător distribuţiei de eforturi unitare din figura 9*c*, este dată de expresia

$$M = \frac{(A\sigma_c - N)\{(1-\alpha)[A_s(r_c+r_1) - Q_{As} - r_s r_c A_{sm}] + r_s(r_c A_m - A)\}}{A - (1-\alpha)(A_s - r_s A_{sm}) - r_s A_m}, \tag{20}$$

în care

$$A_s = \int_a^{r_s} \mathrm{d}A\,;$$

$$Q_{As} = \int_a^{r_s} r\,\mathrm{d}A$$ — momentul static al ariei A_s în raport cu axa $0-0$;

$$A_{sm} = \int_a^{r_s} \frac{\mathrm{d}A}{r}$$ — aria modificată a lui A_s;

$$A_m = \int_a^{b} \frac{\mathrm{d}A}{r}$$ — aria modificată a întregii secţiuni (de arie A).

Pentru domeniul elastic ($|\sigma_{\min}| < \sigma_c$), formula (20) ia forma:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M(A - rA_m)}{Ar(r_c A_m - A)}. \tag{21}$$

Valoarea M_e a momentului încovoietor, care determină în fibra $r = a$, $|\sigma_{\min}| = \sigma_c$, cu $N = 0$, se obţine din (21)

$$M_e = \frac{\sigma_c A a(r_c A_m - A)}{A - a A_m}. \tag{22}$$

Raportul M/M_e, dintre momentul capabil pentru o plastificare oarecare (20) şi momentul capabil corespunzător limitei domeniului elastic (22), indică creşterea capacităţii portante în funcţie de mărimea zonei plastificată (h_p). O curbă de acest fel este reprezentată în figura 10 pe a cărei abscisă s-a trecut raportul h_p/H, unde H reprezintă înălţimea totală a secţiunii.

Pentru determinarea pantei curbe M/M_e în funcţie de r_s în punctul $r_s = a$ se calculează derivata

$$\left[\frac{\mathrm{d}\left(\frac{M}{M_e}\right)}{\mathrm{d}r_s}\right]_{r_s = a} = \frac{A(A - aA_m)}{a[(1-ak)A - a(1-kr_c)A_m]^2}, \tag{23}$$

unde $k = \dfrac{N}{M}$.

Pentru o curbă caracteristică de tip Prandtl, în cazul plastificării totale a secțiunii (fig. 11) se obțin valorile limită:

$$N_p = \sigma_c(A'_s - A_s),$$
$$M_p = \sigma_c[r_c(A_s - A'_s) + Q_{A'_s} - Q_{A_s}], \tag{24}$$

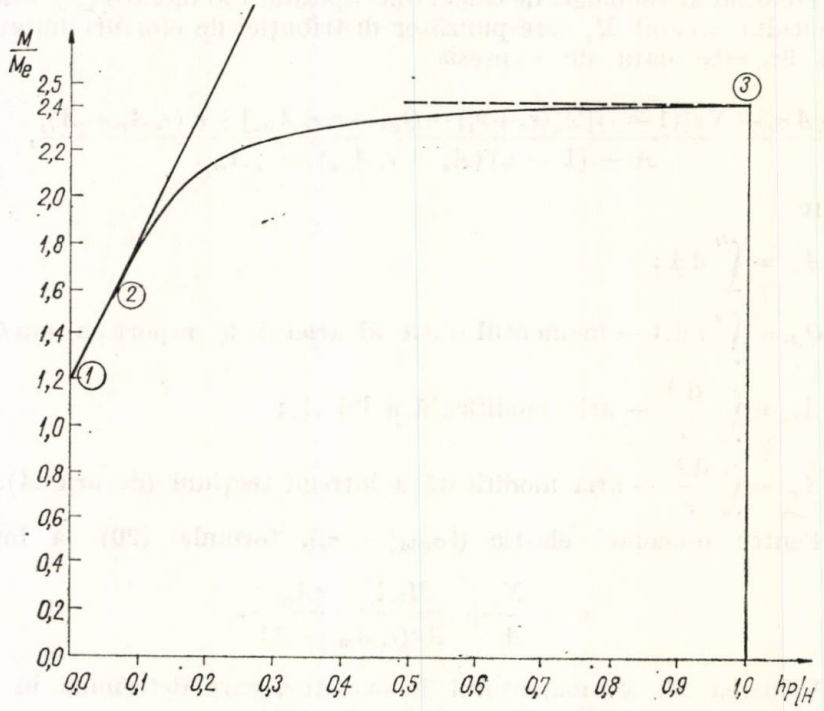


Fig. 10

unde A_s reprezintă aria părții comprimate a secțiunii; A'_s — aria părții întinse a secțiunii; Q_{As} — momentul static al ariei A_s în raport cu axa $0-0$, și $Q_{A's}$ — momentul static al ariei A'_s în raport cu axa $0-0$.

Cu ajutorul relațiilor (23), (24) se determină pantele diagramei M/M_e în punctele extreme (fig. 10). Acest fapt permite trasarea diagramei M/M_e fără a fi nevoie de multe puncte intermediare.

Pentru o exemplificare numerică se folosesc datele de la biglul capului hidraulic $CH-500$; $R = 7{,}5$ cm; $r_c = 21$ cm; $R = 6$cm; $\alpha = 0{,}07$.

Se calculează integrale $\int \frac{dA}{r}$ pentru cele două semicercuri, aplicînd regula lui Simpson.

Astfel, pentru semicercul inferior,

$$A_m^{si} = \frac{1}{3}\Delta\left[\frac{t_0}{a} + 2\left(\frac{t_2}{a+2\Delta} + \frac{t_4}{a+2\Delta} + \ldots + \frac{t_{n-2}}{8+n\Delta-2\Delta}\right) + \right.$$
$$\left. + 4\left(\frac{t_1}{a+\Delta} + \frac{t_3}{a+3\Delta} + \ldots + \frac{t_{n-1}}{a+n\Delta-\Delta)}\right) + \frac{t_n}{a+n\Delta}\right].$$

Pentru calculul lui Q_{As} se aplică, de asemenea, regula lui Simpson :

$$Q_{As} = \frac{1}{3}\Delta\{at_0 + 2[(a+2\Delta)t_2 + (a+4\Delta)t_4 + \ldots + (a+n\Delta-2\Delta)t_{n-2}] +$$

$$+ 4[(a+\Delta)t_1 + (a+3\Delta)t_3 + \ldots + (a+n\Delta-\Delta)t_{n-1}] + (a+n\Delta)t_n\}.$$

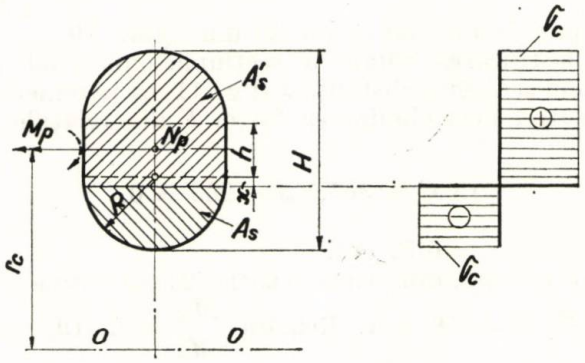


Fig. 11

Pentru porțiunea dreptunghiulară

$$A_m^{dr} = \int_{r_c-\frac{h}{2}}^{r_c+\frac{h}{2}} \frac{dA}{r} = 2R \ln \frac{2r_c + h}{2r_c - h}.$$

Cunoscînd $A = 267$ cm² și alegînd $\Delta = 0{,}5$ cm, se obține $A_m = 13{,}612$ cm.

Cu relația (23) se determină

$$\left[\frac{d\left(\frac{M}{M_e}\right)}{dr_s}\right]_{r_s=a} = \frac{3{,}141}{a},$$

iar cu relația (22),

$$M_e = 1{,}595\ \sigma_c A.$$

Valoarea momentului M_0, care determină în fibra $r = a$, $\sigma_{min} = -\sigma_c$, pentru $k = -0{,}108$ (1/cm), se calculează din relația (21).

Rezultă $M_0 = 1{,}93\ \sigma_c A$ și apoi raportul

$\frac{M_0}{M_e} = 1{,}21$, care determină punctul (1) în figura 10.

Pentru $r_s = 11{,}5$ cm, ceea ce conduce la $A_s = 5{,}07$ cm², alegînd $\Delta = 0{,}25$ cm și aplicînd regula lui Simpson, se obține

$$A_{sm} = 0{,}456 \text{ cm}, \qquad Q_{As} = 56{,}389 \text{ cm}^3.$$

Din relaţia (20) rezultă $M = 2{,}462\ \sigma_c A$ şi raportul

$$\left[\frac{M}{M_e}\right]_{r_s=11{,}5} = 1{,}543.$$

Considerînd $\alpha=0$, se obţine $M=2{,}460\ \sigma_c A$ şi valoarea $\left[\frac{M}{M_e}\right]_{r_s=11{,}5,\ \alpha=0} =$ $= 1{,}542$, corespunzătoare punctului (2) din figura 10.

Pentru plastificarea totală a secţiunii, cunoscînd $N = 0{,}4485$ F şi $M = 4{,}15$ F.cm şi alegînd distanţa x (fig. 11) ca parametru ce determină poziţia axei neutre, prin eliminarea forţei F din relaţiile (24) se obţine ecuaţia

$$15\ x^2 + 367{,}5\ x - 265 = 0,$$

a cărei soluţie este $x = 0{,}71$ cm.

Cu această valoare, din prima ecuaţie (24) se obţine $F_p = 0{,}93\ \sigma_c A$, şi din a doua $M_p = 3{,}859\ \sigma_c A$. Rezultă $\frac{M_p}{M_e} = 2{,}419$, căruia îi corespunde în figura 10 punctul (3).

Curba $\frac{M}{M_e}$ (fig. 10) arată că plastificarea secţiunii conduce la un spor de capacitate portantă a secţiunii de aproape 2,5 ori faţă de limita domeniului elastic. Se înţelege că acest aport este mai mare pentru o curbă caracteristică cu $\alpha \neq 0$.

Alura diagramei M/M_e (fig. 10) pune în evidenţă şi faptul că sporuri importante de capacitate portantă apar pentru plastificări reduse ale secţiunii. În consecinţă, momentul capabil corespunzător unei plastificări parţiale ($h_p/H = 0{,}2-0{,}3$) este foarte apropiat de momentul limită plastic, dar deformaţiile sînt mult mai mici, ceea ce constituie un avantaj, deoarece în fibrele structurii probabilitatea apariţiei unor ruperi este redusă.

Observaţii. 1. Din calculul plastic efectuat mai sus rezultă că toarta capului hidraulic pentru instalaţia $F-500$ prezintă un coeficient de siguranţă de 2,419 pentru sarcina limită elastică F_{LE}, ceea ce presupune atingerea în fibra cea mai solicitată a rezistenţei de curgere. În consecinţă, dimensiunile toartei pot fi reduse, fără ca siguranţa deplină în exploatare să fie influenţată [4].

2. Toarta capului hidraulic fiind un sistem o dată static nedeterminat, apariţia primei articulaţii plastice nu înseamnă automat şi epuizarea capacităţii portante. Dacă materialul are proprietăţi plastice importante, atingerea stării limită presupune apariţia a încă unei articulaţii plastice, ceea ce conduce la un spor de capacitate portantă şi mai mare decît cel evaluat mai sus.

3. Dacă se are în vedere că depăşirea domeniului elastic are loc în zona comprimată a secţiunii din C (fig. 2*a*) şi că rezistenţa de curgere la compresiune este mai ridicată decît la întindere, rezultă că sarcina limită determinată anterior constituie o valoare prudentă (în realitate poate fi mai mare).

5. DETERMINĂRI EXPERIMENTALE. INTERPRETĂRI

Determinările experimentale s-au efectuat pe toarta prototip a capului hidraulic de 650 tf prezentată în figura 1.

Dimensiunile secţiunilor au fost stabilite pe baza algoritmului realizat, fiind mai mici decît ale toartei $CH-650$ ce se execută în mod curent.

Pentru determinările experimentale ale tensiunilor şi deformaţiilor s-a folosit metoda tensometrică electrică rezistivă. Au fost utilizate mărci tensometrice „Hottinger" cu baza 20 mm ; $R = 120$; $K = 2{,}08$ şi puntea tensometrică „MK-Hottinger".

Aşezarea mărcilor tensometrice, în total 26, este arătată în figura 12 şi permite urmărirea deformaţiilor, în special în secţiunile cele mai solicitate.

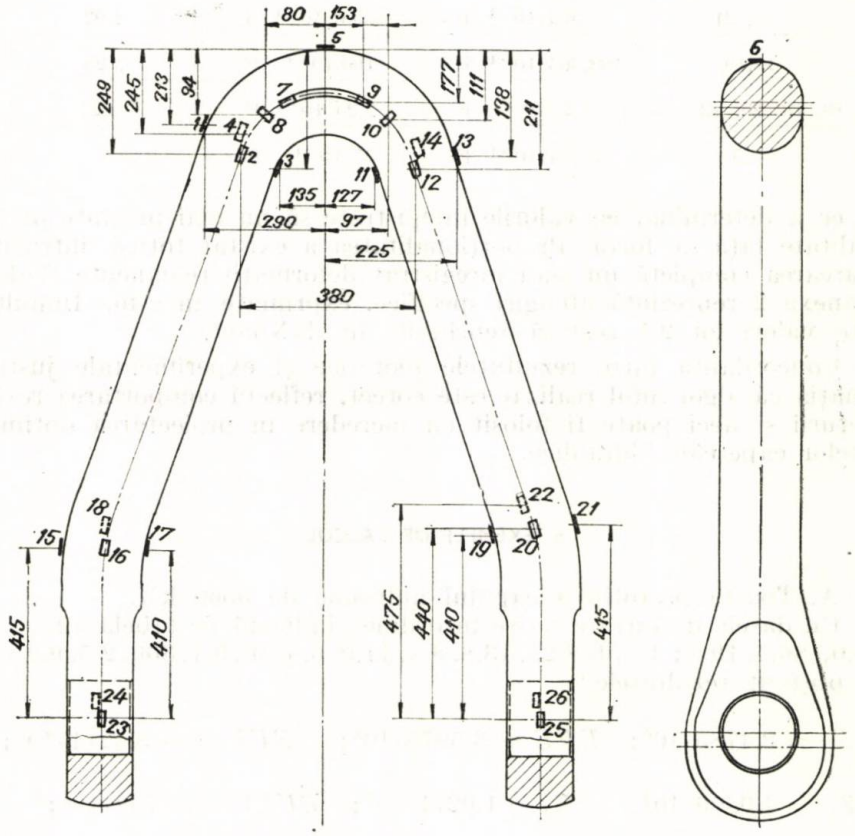


Fig. 12

S-a acţionat cu o forţă F ale cărei valori au fost : 0,100,..., 650, 700, ..., 100, 0 tf, (700 tf, fiind forţa maximă ce o putea dezvolta presa folosită).

Rezultatele măsurătorilor tensometrice ale tensiunilor şi compararea lor cu cele obţinute pe cale teoretică (vezi exemplul de la pct. 6.A) sînt prezentate în tabela 4.

Valorile experimentale introduse în tabela 4 s-au stabilit prin efectuarea mediei aritmetice a valorilor înregistrate pentru forțe mai mici de 500 tf, deoarece în acest domeniu citirile s-au efectuat cu exactitate. La forțe mai mari pe timpul citirilor avea loc o variație continuă a sarcinii,

Tabela 4

Numărul traductorilor	σ (pe cale teoretică) daN/cm²	σ (experimental după anexa 2) daN/cm²	Diferența %
1, 13	45.10^{-4} F	46.10^{-4} F	2,17
2, 4, 12, 14	$2{,}55.10^{-5}$ F	$2{,}5.10^{-4}$ F	2
15, 21	$-36{,}4.10^{-4}$ F	$-35{,}6.10^{-4}$ F	1,92
17,19	$103{,}363.10^{-4}$ F	100.10^{-4} F	3,25
16, 18, 20, 22	$2{,}2.10^{-4}$ F	$2{,}25.10^{-4}$ F	−2,27
5	$55{,}34.10^{-4}$ F	57.10^{-4} F	−3

ceea ce a determinat ca valorile înregistrate să nu mai prezinte proporționalitate față de forță. Proporționalitatea a existat totuși, întrucît la descărcarea completă nu s-au înregistrat deformații remanente. Valorile din anexa 2 reprezintă alungiri specifice, exprimate în μ/m. Înmulțind aceste valori cu 2,1 rezultă tensiunile în daN/cm².

Concordanța între rezultatele teoretice și experimentale justifică afirmația că algoritmul realizat este corect, reflectă comportarea reală a structurii și deci poate fi folosit cu încredere în proiectarea optimă a toartelor capetelor hidraulice.

6. EXEMPLE DE CALCUL

A. Toarta prototip a capului hidraulic de 6500 kN.

Cu datele de intrare scrise în ordinea indicată de tabela 1 :
4, 28.0, 86.5, 19.5 ; 1.274, 8.25, 13.8, 8.5, 11.0, 6.5 10^5, 3.1, 300, 2.5, 0.0, (25)
s-au obținut rezultatele

$$X_1 = 2.4785 \cdot 10^6; \quad EUE = 3.5975 \cdot 10^3; \quad EUI = -5.4211 \cdot 10^3;$$

$$Z_1 = 4.0306 \cdot 10^5; \quad Z_2 = 1.0271 \cdot 10^5; \quad EUE1 = 2.7798 \cdot 10^3; \tag{26}$$

$$EUI1 = -2.4082 \cdot 10^3; \quad EU1E = -2.3661 \cdot 10^3;$$

$$EU1I = 6.7186 \cdot 10^3,$$

în ordinea precizată de tabela 2.

Folosind aceste valori s-au determinat tensiunile teoretice trecute în tabela 4 pentru fibrele din dreptul mărcilor tensometrice.

Tensiunile din dreptul mărcilor tensometrice 5, 15, 21, 17, 19, (fig. 12) se află printre datele de ieşire ale programului. Împărţind aceste valori cu mărimea sarcinii $F = 6500$ kN rezultă :

— în dreptul mărcii 5 :

$\sigma = EUE : 6{,}50 \cdot 10^5 = 3597{,}5 : 6{,}50 \cdot 10^5 = 55{,}34 \cdot 10^{-4} F$ [daN/cm^2],

— în dreptul mărcilor 15,21 ;

$\sigma = EU1E : 6{,}50 \cdot 10^5 = -2{,}366{,}1 : 6{,}5 \cdot 10^5 = -36{,}4 \cdot 10^{-4} F$ [daN/cm^2],

— în dreptul mărcilor 17, 19 :

$\sigma = EU1I : 6{,}50 \cdot 10^5 = 6718{,}6 : 6{,}50 \cdot 10^5 = 103{,}563 \cdot 10^{-4} F$ [daN/cm^2].

Celelalte valori din tabela 4 s-au calculat prin folosirea formulelor (7), (8) în care s-a introdus valoarea necunoscutei $X_1 = 2{,}4785 \cdot 10^6$ reprezentînd prima mărime a datelor de ieşire (26).

B — Calculul biglului instalaţiei F-200.

Pornind de la datele de intrare (fig. 13 *a*, *b*, *c*) scrise în ordinea indicată în tabela 1 :

$$\begin{aligned} &6,\ 26.0,\ 88.0,\ 19.0,\ 1{,}274,\ 6.0,\ 8.8,\ 9.0,\ 9.5 \\ &2 \cdot 10^5,\ 4.5,\ 4.4,\ 4.0,\ 3.7,\ 3.5,\ 3.3,\ 3.0, \end{aligned} \tag{27}$$

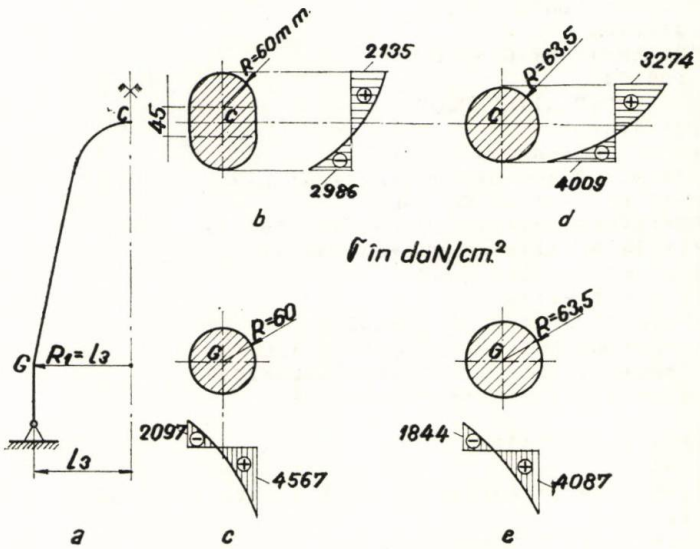


Fig. 13

calculatorul furnizează rezultatele în ordinea precizată de tabela 2 :

$$\begin{aligned} &X_1 = 8.1796 \cdot 10^5;\quad EUE = 2.1315 \cdot 10^3;\quad EUI = -2.986 \cdot 10^3; \\ &Z_1 = 1.2168 \cdot 10^5;\quad Z_2 = 3.1096 \cdot 10^4;\quad EUE1 = 1.1555 \cdot 10^3; \\ &EUI1 = 1.1288 \cdot 10^3;\quad EU1E = -2.0972 \cdot 10^3;\quad EU1I = 4.5668 \cdot 10^3. \end{aligned} \tag{28}$$

În secţiunile cele mai solicitate ale biglului (C şi G) apar tensiunile indicate în figura 13 *b*, *c* cu valorile maxime date de (28). Se remarcă că secţiunea din G este mai solicitată decît cea din C, ceea ce dovedeşte că dimensiunile secţiunilor transversale nu sînt cele mai corespunzătoare.

PROGRAMUL BCH

```
BCH;
"BEGIN"
"COMMENT"
CALCULUL DE REZISTENTA AL BIGLURILOR CAPETELOR HIDRAULICE;
"INTEGER"I,N;
"REAL"L1,L2,L3,L,K1,AL,PO,H1,H2,H3,F,RC,DS,IO,C,DMD,MO1,
      MO2,B1,DOD,R,DMC,DOC,DM,DO,X1,N1,A,EUE,EUI,I1,K,I2,R1,
      DM1,DM2,DM12,DO1,DO2,Z1,Z2,EUE1,EUI1;
"READ"N,L1,L2,RC,AL,R,B1,H3,R1,F;
"BEGIN"
   "ARRAY"H[0:N],B[1:N],M1[1:N],MO[1:N],IC[0:N],
          IC1[1:N];
"FOR"I:=0"STEP"1"UNTIL"N"DO"
    "READ"H[I];
"FOR"I:=1"STEP"1"UNTIL"N"DO"
      B[I]:=0.0;
"FOR"I:=1"STEP"1"UNTIL"N"DO"
    M1[I]:=0.0;
"FOR"I:=1"STEP"1"UNTIL"N"DO"
     MO[I]:=0.0;
"FOR"I:=0"STEP"1"UNTIL"N"DO"
    IC[I]:=0.0;
"FOR"I:=1"STEP"1"UNTIL"N"DO"
    IC1[I]:=0.0;
L:=L1+L2+RC*(1-COS(AL));
K1:=1.57079/AL;L3:=RC*SIN(AL)+L2/TAN(AL);
PO:=(K1↑2-1)*F/(2*K1*RC*COS(AL));
H1:=(L3-RC*(SIN(AL)-1/K1)/COS(AL))*F/(2*L);
H2:=H1+(K1*SIN(AL)-1)*F/(2*K1*COS(AL));
"FOR"I:=1"STEP"1"UNTIL"N"DO"
B[I]:=AL/(2*N)+(I-1)*AL/N;
"FOR"I:=1"STEP"1"UNTIL"N"DO""BEGIN"
M1[I]:=(L1+L2+RC*(COS(B[I])-COS(AL)))/L;
MO[I]:=-H2*RC*(1-COS(B[I]))+F*RC*(COS(B[I])-
        COS(K1*B[I]))/(2*K1*COS(AL));
"END";
DS:=RC*AL/N;C:=3.14159;
IO:=C*R↑4/4;
DMD:=(L1↑3+L2*(3*L1↑2+3*L1*L2+L2↑2)/(SIN(AL)))/(3*L↑2);
MO1:=H1*L1;
MO2:=H1*(L1+L2)-F*L2/(2*TAN(AL));
DOD:=L1↑2*MO1/(3*L)+L2*(L1*MO1+(L1+L2)*MO2+
     (L1*MO2+(L1+L2)*MO1)/2)/(3*L*SIN(AL));
"FOR"I:=0"STEP"1"UNTIL"N"DO"
IC[I]:=R*H[I]↑3/6+R*H[I]↑5/(40*RC↑2)+
     R*H[I]↑7/(224*RC↑4)+C*R↑4/4+C*R↑2*H[I]↑2/4+4*R↑3*
     H[I]/3+C*R↑2*H[I]↑4/(16*RC↑2)+2*R↑3*H[I]↑3/(3*RC↑2)
    +3*C*R↑4*H[I]↑2/(8*RC↑2)+16*R↑5*H[I]/(15*RC↑2)+C*R↑6/(16*RC↑2)
    +C*R↑2*H[I]↑6/(64*RC↑4)+R↑3*H[I]↑5/(4*RC↑4)+15*C*R↑4*H[I]↑4/
     (64*RC↑4)+4*R↑5*H[I]↑3/(3*RC↑4)+C*R↑6*H[I]↑2/(28*RC↑4)+5*R↑8/
     (64*RC↑4);
"FOR"I:=1"STEP"1"UNTIL"N"DO"
IC1[I]:=IC[I]/(1+IC[I]/((C*R↑2+2*R*H[I])*RC↑2));
"FOR"I:=1"STEP"1"UNTIL"N"DO"
"BEGIN"
```

ANEXA 1 (continuare)

```
   DMC:=DMC+IQ*DS*M1[I]↑2/IC[I];
   DQC:=DQC+IQ*DS*M1[I]*MQ[I]/IC[I];
"END";
DM:=DMD+DMC;
DQ:=DQD+DQC;
X1:=DQ/DM;
N1:=H2-X1/L;
A:=C*R↑2+2*R*H[0];
EUE:=N1/A+X1/(A*RC)+X1*RC*(0.5*H[0]+R)/(IC[0]*(RC+0.5*H[0]+R));
EUI:=N1/A+X1/(A*RC)-X1*RC*(0.5*H[0]+R)/(IC[0]*(RC-0.5*H[0]-R));
I1:=B1*H3↑3*(1+3*(H3/R1)↑2/20+3*(H3/R1)↑4/112)/12;
K:=I1/(B1*H3*R1↑2);
I2:=I1/(1+K);
DM1:=5.24*R1/I2;
DM2:=5.427*R1↑3/I2+14.07*R1/(B1*H3);
DM12:=4.24*R1↑2/I2-1/(B1*H3);
DQ1:=0.91*F*(R1↑2/I2+1/(B1*H3));
DQ2:=(1.068*R1↑3/I2+2.718*R1/(B1*H3))*F;
Z1:=(DQ1*DM2-DQ2*DM12)/(DM1*DM2-DM12↑2);
Z2:=(DQ2*DM1-DQ1*DM12)/(DM1*DM2-DM12↑2);
EUE1:=Z2/(B1*H3)+Z1/(B1*H3*R1)+Z1*R1*H3/(I1*(2*R1+H3));
EUI1:=Z2/(B1*H3)+Z1/(B1*H3*R1)-Z1*R1*H3/(I1*(2*R1-H3));
"PRINT"''L'X1=',SAMELINE,SCALED(5),X1,'EUE=',EUE,
'EUI=',EUI,''L'',Z1=',Z1,'Z2=',Z2,
'EUE1=',EUE1,'EUI1=',EUI1;
"END";
    "END";
```

ANEXA

Rezultatele măsurătorilor tensometrice

Sarcina tf	Numărul												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
50	110	39	−43	64	129	−36	80	−42	47	−40	−47	163	90
100	236	111	−73	139	332	−102	219	−129	158	−119	−73	241	240
200	401	209	−80	250	598	−182	394	−235	311	−227	−90	364	448
300	575	324	−55	403	990	−305	616	−373	460	−329	−103	486	657
400	744	454	−13	516	1304	−400	805	−495	650	−460	−115	631	895
450	825	521	5	554	1457	−457	914	−567	708	−512	−117	689	993
500	911	591	30	614	1602	−497	986	−616	769	−554	−117	745	1048
0	−17	−10	20	−8	44	1	−8	−4	−92	−116	+27	98	−6
100	352	146	−219	155	410	−132	242	−152	178	−135	−256	164	346
200	526	270	−212	272	724	−231	448	−282	338	−245	−260	300	560
300	675	383	−178	378	989	−314	619	−386	470	−337	−247	412	731
400	834	505	−128	499	1277	−405	807	−500	618	−438	−227	532	915
500	983	629	−67	614	1581	−500	995	−622	790	−555	−205	667	1129
550	1048	686	−25	669	1732	−547	1081	−678	843	−597	−200	717	1205
600	1098	737	+12	712	1859	−587	1153	−723	902	−640	−195	780	1298
650	1178	824	75	778	2079	−654	1267	−802	996	−710	−181	864	1414
700	1220	869	111	811	2193	−687	1327	−886	1044	−755	−175	927	1500
600	1125	792	82	749	2043	−639	1222	−780	957	−692	−191	849	1391
500	981	666	26	646	1763	−547	1045	−672	806	−591	−206	735	1197
300	669	403	−105	404	1141	−351	656	−422	487	−373	−248	476	796
100	315	117	−185	169	469	−134	248	−168	165	−152	−250	187	360
0	−1	−5	+20	−1	43	3	−15	−14	−15	−1	+21	−2	−6

Notă: Valorile din tabel reprezintă $\varepsilon[\mu/m]$

2

efectuate la biglul 650 tf.

traductorului

14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
29	−79	35	149	24	160	14	−69	23	−22	−58	−42	−41
117	−193	119	440	85	509	44	−214	97	−77	−98	−80	−83
236	−326	226	826	186	961	91	−381	206	−151	−177	−159	−161
360	−457	343	1232	293	1446	143	−549	315	−221	−258	−239	−242
497	−571	459	1790	428	1934	201	−716	435	−287	−326	−311	−310
551	−654	528	1891	476	2172	234	−810	493	−318	−356	−341	−339
604	−684	571	2032	516	2468	261	−877	546	−345	−382	−374	−376
−5	−36	2	102	10	66	−10	−40	−6	−12	−21	−12	−9
119	−225	102	476	99	509	45	−219	96	−80	−105	−73	−74
247	−370	218	895	218	992	101	−391	218	−168	−196	−153	−156
353	−472	318	1233	323	1355	153	−496	318	−227	−255	−203	−211
472	−574	420	1589	442	1741	208	−607	430	−289	−335	−258	−266
610	−687	532	1989	574	2178	278	−730	552	−347	−372	−315	−321
655	−727	572	2129	617	2330	297	−774	594	−367	−396	−334	−340
708	−779	627	2319	672	2528	329	−829	646	−392	−416	−355	−361
772	−842	701	2567	745	2792	376	−903	713	−423	−447	−383	−386
818	−885	748	2722	786	2954	405	−946	753	−438	−463	−399	−402
739	−824	679	2499	711	2711	362	−884	685	−428	−452	−385	−386
618	−723	581	2153	597	2340	303	−779	582	−402	−430	−357	−358
361	−591	351	1399	349	1514	176	−552	346	−282	−316	−250	−256
113	−264	104	587	119	585	46	−254	109	−99	−126	−86	−88
−7	−35	−3	83	9	27	−5	−14	−1	−7	−15	−5	−4

Dacă biglul se alege cu secţiunea transversală constantă (fig. 13 *d*, *e*) şi se repetă calculul cu datele de intrare

$$\begin{matrix} 6,\ 26.0,\ 88.0,\ 19{,}0,\ 1.274,\ 6.35,\ 8.8,\ 9.0,\ 9.5,\ 2\cdot10^5, \\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0,\ 0.0,\qquad 0.0,\ 0.0, \end{matrix} \tag{27'}$$

se obţin rezultatele:

$$X_1 = 6.6944\cdot10^5;\quad EUE = 3.2738\cdot10^3;\quad EUI = -4.0088\cdot10^3;$$

$$Z_1 = 1.2168\cdot10^5;\quad Z_2 = 3.1096\cdot10^4;\quad EUE1 = 1.555\cdot10^3; \tag{28'}$$

$$EUI1 = 1.1288\cdot10^3;\ EU1E = -1.8442\cdot10^3;\ FU1I = 4.0875\cdot10^3.$$

Cu ajutorul valorilor (28'), ţinînd seama de semnificaţiile lor (tabelele 2 şi 3), se reprezintă diagramele de tensiuni din secţiunile *C* (fig. 13*d*) şi *G*(fig. 13*e*). Rezultă că tensiunea maximă este practic aceeaşi atît în *C*, cît şi în *G* şi deci secţiunea adaptată se poate considera ca optimă.

7. CONCLUZII

a) Algoritmul întocmit şi transpunerea lui în programul *BCH* permite calculul exact şi rapid (sub un minut la calculatorul *ELLIOTT* 4120 de la *ICPRP*) pentru orice tip de biglu a cărui configuraţie geometrică generală este similară celei din figura 2*a*.

b) Rezultatele teoretice pentru eforturile unitare sînt în concordanţă deplină cu cele experimentale, ceea ce confirmă exactitatea algoritmului realizat. Abaterile înregistrate sînt nesemnificative şi se datoresc atît lipsei de precizie la citirea forţei în timpul experienţei, cît şi diferenţei de poziţie dintre fibra teoretică în care s-a calculat efortul unitar şi fibra în care s-a poziţionat marca tensometrică utilizată.

c) Întrucît în programul *BCH* toate elementele geometrice ale biglului pot fi variate prin datele de intrare, rezultă că programul întocmit permite o optimizare a formei şi dimensiunilor toartei capului hidraulic. Pe această linie, avînd în vedere că secţiunea cea mai solicitată este cea din *G* (fig. 3*a*) se propune fie mărirea acestei secţiuni, ceea ce ar conduce la mărirea capacităţii portante a toartei, fie micşorarea înălţimii porţiunii dreptunghiulare a secţiunii din *C*, pentru ca aceasta să atingă starea limită în acelaşi timp cu secţiunea din *G* (vezi exemplul de calcul *B*).

d) Toarta capului hidraulic care a fost experimentată a fost proiectată pe baza procedeului propus în această lucrare şi are secţiunea din *C* cu dimensiuni mai reduse decît a toartei *CH*-650 proiectate anterior.

Ţinînd seama că starea limită a toartei (plastificarea completă a secţiunii din *C*) conduce la un coeficient de siguranţă mai mare de 2 (vezi cap. 4) faţă de limita domeniului elastic, rezultă că dimensiunile actuale ale biglurilor, dacă se cunosc cu exactitate valorile rezistenţelor limită ale materialului folosit, pot fi reduse.

Experimentările efectuate sînt concludente pentru domeniul elastic, dar ele nu au putut evidenţia starea limită elastică a biglului şi cu atît mai mult starea limită plastică, datorită lipsei posibilităţii de încărcare cu forţe de peste 7000 kN.

Primită la redacţie la 11 aprilie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. P. Mazilu, *Statica construcţiilor*, vol. II, Ed. tehnică 1959.
2. J. O. Smith, O. M. Sidebotiom, *Comportement inélastique des structures porteuses*, Ed. Dunod, Paris, 1970.
3. D. Raseev, C. Manea, M. Florescu, *Studiul fretajului ajustajelor cu strîngere la lanţurile de transmisie folosite în industria petrolieră şi minieră*, Buletin I.P.G.G., **XV** (1967).
4. J. Ferry Borges, M. Constanheta, *Siguranţa structurilor* (trducere din limba engleză), Ed. tehnică,Bucureşti, 1973.

CAPACITATEA PORTANTĂ A MASIVELOR DE PĂMÎNT SOLICITATE DE GRUPE DE FUNDAȚII

de ALEXANDRU VAICUM, ION VASILE, IOAN GHEORGON
Centrul de mecanică a solidelor

În lucrare se prezintă rezultatele cercetărilor privind influența diferiților factori geometrici, mecanici și geotehnici asupra capacității portante a unui masiv de pămînt solicitat de un grup de 4 fundații a unui stîlp metalic utilizat la liniile electrice aeriene de înaltă tensiune. Cercetările experimentale au arătat modul de rupere a masivului și au permis determinarea analitică a suprafețelor de alunecare pentru diferite adîncimi de fundare. De asemenea, s-a observat că factorul determinant în reducerea capacității portante este distanța între fundații, dacă aceasta este mai mică decît $3B$ (B = latura tălpii fundației). Ceilalți factori studiați: umiditatea, adîncimea de fundare, greutatea specifică aparentă și natura masivului de pămînt se pot neglija.

Pentru realizarea unor suprastructuri mai economice, sau pentru o utilizare mai eficientă a terenului de construit, zonele active ale diferitelor fundații se interferează, reducîndu-se în acest mod capacitatea portantă a masivului de pămînt calculată pentru o singură fundație izolată. Această reducere capătă o importanță deosebită la fundațiile solicitate la întindere, unde depășirea capacității portante conduce la pierderea stabilității suprastructurii și la distrugerea ei.

În literatura de specialitate sînt puține lucrări care tratează această problemă și se referă în special la acțiunea grupei de piloți, pentru celelalte tipuri de fundații cercetările fiind extrem de reduse [1].

La liniile electrice aeriene de înaltă tensiune pe stîlpi metalici, această situație se întîlnește deseori, deoarece mărimea distanței între montanții principali (deci între fundații), conduce la sporirea substanțială a cantității de metal utilizată în stîlpi, iar folosirea unei singure fundații pentru toți montanții conduce la un consum exagerat de beton în fundație. Avînd în vedere numărul mare de fundații de acest tip, necesar a se construi anual la noi în țară, aspectul economic are o pondere hotărîtoare.

Pentru obținerea informațiilor necesare stabilirii unei soluții s-au executat cercetări pe fundații de tip „ciupercă" utilizate pe scară largă în etapa actuală (fig. 1). S-a urmărit comportarea fundațiilor atît la întindere cît și la compresiune, deoarece în exploatare aceste fundații sînt supuse la ambele solicitări.

Cercetările au avut ca obiect atît rezultate calitative (modul de rupere a masivului de pămînt), cît și cantitative (influența diferiților factori geotehnici, mecanici și geometrici asupra capacității portante a masivului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 35, NR. 2, 1976, P. 289–297

Deoarece pe baza rezultatelor cercetărilor anterioare se recomandase pentru calculul capacității portante o anumită metodă, dar care nu lua în considerare influența celorlalte fundații ale stîlpului, s-a căutat ca rezultatele cercetărilor actuale, privind grupa de fundații, să se concretizeze astfel ca să nu aducă modificări importante metodei recomandate, dacă este posibil să se afecteze numai rezultatele cu anumiți coeficienți de reducere.

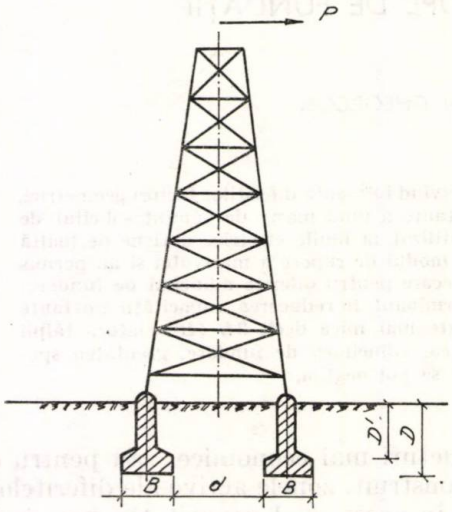


Fig. 1

Încercările cele mai numeroase s-au efectuat pentru fundațiile solicitate la întindere.

În acest scop au fost executate încercări pe modele de diferite mărimi amplasate atît în nisipuri, cît și în pămînturi cu coeziune.

Încercările în nisipuri s-au executat în canale vitrate (fig. 2) în cea mai mare parte urmărindu-se în special rezultatele calitative și anume modul de rupere a masivului de pămînt și obținerea datelor necesare determinării ecuației curbei de alunecare și unele rezultate cantitative care au fost comparate cu cele obținute în bazinul cu argilă. De aceea la încercările efectuate în canale vitrate s-au variat atît greutățile specifice aparente ($\gamma_a = 1{,}53 \div 1{,}85$ t/m^3), cît și umiditățile ($w = 0 \div 5\,\%$). Tălpile fundațiilor erau confecționate din tablă de duraluminiu, de formă pătrată, avînd dimensiunile 3×3 cm și 5×5 cm. Măsurarea deformațiilor se făcea cu microcomparatoare, iar încărcarea s-a realizat atît continuu, cît și în trepte cu ajutorul unui recipient în care se turna apă.

Încercările în pămînturi coezive s-au executat în bazin avînd dimensiunile interioare $1{,}3 \times 1{,}6 \times 1{,}0$ m. Pămînturile utilizate au fost prafuri argiloase nisipoase cu $I_p = 20$ și s-au variat caracteristicile fizico-mecanice: greutatea specifică aparentă (γ_a), umiditatea ($w\,\%$), coeziune (c), unghiul de frecare interioară ($\varnothing$) și presiunea admisibilă (p_a).

Tălpile de fundații au fost confecționate din tablă de oțel de 8 mm și 10 mm grosime și aveau dimensiunile în plan: 10×10 cm; 20×20 cm și 30×30 cm.

Deformațiile se măsurau cu comparatoare „Kunkel" (cursa 50 mm); încărcarea se făcea cu un troliu, iar intensitatea forțelor se măsura cu dinamometrul.

Pentru determinarea formei suprafeței de rupere s-a căutat să se studieze, în special, problema plană, în canale vitrate, care permitea, prin cei 2 pereți laterali de sticlă, să se urmărească, în detaliu, modul de rupere a masivului solicitat la întindere de tălpi de fundații și în același timp să se facă măsurătorile necesare pentru a se putea determina ecuația curbei de alunecare.

Unele măsurători și observații privind acest aspect, s-au făcut și la încercările spațiale în bazine cu pămînturi coezive, care au confirmat rezultatele obținute în nisipuri, dar cu o anumită împrăștiere, deoarece în bazinul cu argilă nu se putea urmări modul de rupere (decît la suprafața terenului) și să se execute măsurători în timpul încărcării masivului, ci numai după ruperea lui.

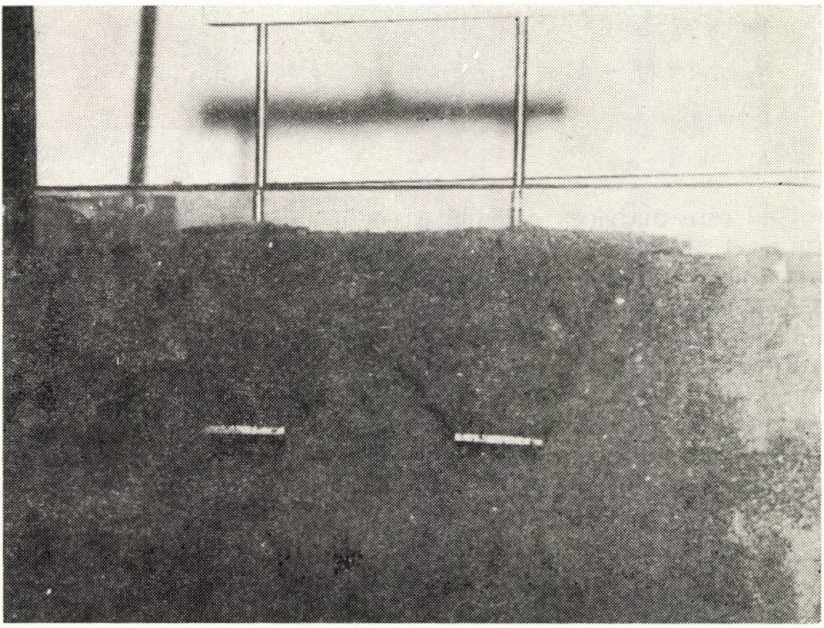


Fig. 2

După cum se cunoaște, pentru elaborarea unei metode de calcul a capacității portante a masivului de pămînt este necesar să cunoaștem forma suprafeței de alunecare și scriind ecuațiile lui Kötter pe această suprafață se obține sistemul de ecuații, care rezolvat ne permite să determinăm starea de tensiuni în masiv. Deoarece de cele mai multe ori curba de alunecare se apreciază ca un arc al unei curbe clasice (arc de parabolă, de hiperbolă, sau o spirală logaritmică) s-a urmărit să se determine mai precis forma curbei de rupere, executîndu-se măsurători în $3 \div 5$ puncte de pe această curbă (abscisa, ordonata și unghiul făcut de tangentă cu orizontala). Originea sistemului de coordonate s-a luat la colțul plăcii de unde începe să se formeze curba de alunecare.

S-a scris un plinom de gradul $2N - 1$,

$$P(x) = c_1 + c_2 x + \ldots + c_i x^{i-1} + \ldots + c_{2N} x^{2N-1}, \qquad (1)$$

de asemenea și derivata lui, punîndu-se condiția ca să treacă prin cele N puncte unde s-au făcut măsurătorile și curba să fie tangentă la direcțiile măsurate α_1, α_2, $\alpha_i \ldots$, α_N, s-a obținut forma curbei de alunecare.

Pentru a se ușura rezolvarea unui sistem de $2N$ ecuații cu $2N$ necunoscute, s-a scris sub formă matriceală:

$$A \quad C = B \tag{2}$$

unde $A = [a_{ij}]$ și $B = [b_i]$ sînt matrice definite cu ajutorul relațiilor:

$$\begin{aligned} a_{ij} &= x_i^{j-1}, \\ a_{n+i,j} &= (j-1)\, x_i^{j-2}, \\ b_i &= y_i, \\ b_{i+n} &= \operatorname{tg} \alpha_i, \end{aligned} \qquad \text{pentru} \qquad \begin{aligned} i &= 1, 2, \ldots, N \\ j &= 1, 2, \ldots, 2N, \end{aligned}$$

iar $C = [c_i]$ este matricea coloană a coeficienților polinomului.

Cu acest algoritm s-a făcut un program în limbajul FORTRAN IV determinîndu-se ecuația fiecărei curbe de alunecare.

Considerîndu-se două fundații la o distanță d între plăci, s-au putut determina punctele de intersecție a curbelor de rupere care au avut aceleași coordonate ca și cele măsurate la încercare (fig. 3).

Din analiza rezultatelor încercărilor se pot trage următoarele concluzii privind forma curbelor de alunecare:

— De la o adîncime mai mare de $(3 \div 4)B$, ruperea masivului se produce după două suprafețe verticale de alunecare ce limitează muchiile

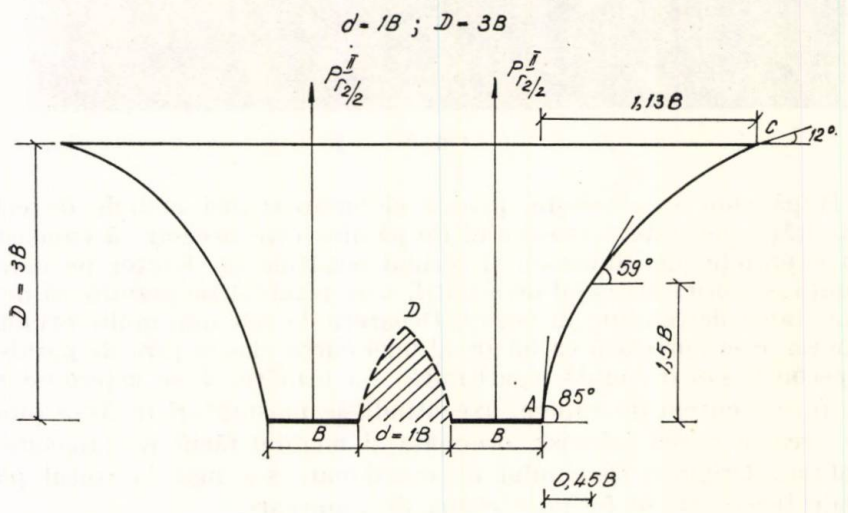


Fig. 3

plăcii de fundație. De la această adîncime spre suprafața terenului se produce ruperea după suprafețe curbe (fig. 4).

— La suprafața terenului ruperea se materializează după un cerc cu raza $(1{,}5 \div 2{,}0)B$.

Aceste observații explică faptul că de la o anumită adîncime $(3 \div 4)B$, capacitatea portantă a masivului crește puțin, deși pînă la această valoare

ea este factorul determinant. Această valoare se numeşte adîncimea critică de fundare şi este în funcţie de mărimea laturii celei mai mici a tălpii de fundare şi de natura masivului de pământ.

Este recomandabil ca la proiectare să nu se depăşească adîncimea critică, decît în cazuri bine justificate.

Pentru a urmări variaţia capacităţii portante s-a analizat influenţa următorilor factori : distanţa între cele două plăci de fundaţie (d), adîncimea

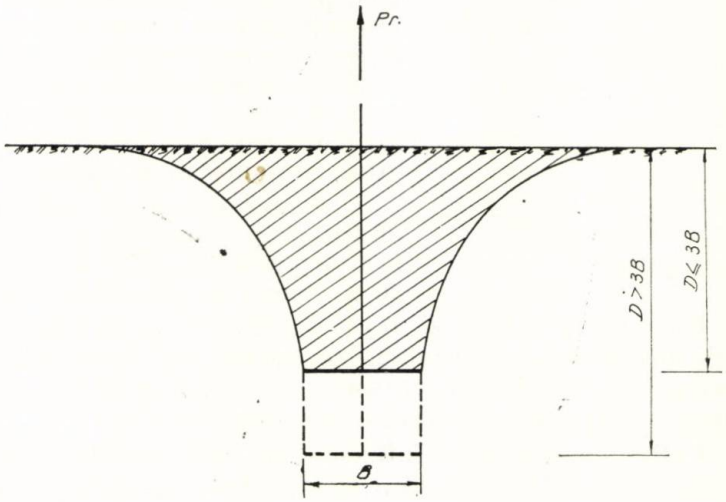


Fig. 4

de fundare (D), greutatea specifică aparentă (γ_a), umiditatea masivului de pământ compactat ($W\%$), dimensiunile în plan ale tălpii fundaţiei (B) şi natura masivului de pământ.

Pentru a se vedea influenţa distanţei între plăci s-au executat încercări în pământuri coezive (praf argilos nisipos), avînd următoarele caracteristici fizico-mecanice :

$$c = 0{,}27 \text{ kg/cm}^2; \quad \varnothing = 10°; \quad \gamma_a = 1{,}65 \text{ g/cm}^3; \quad W\% = 9{,}7\%,$$

$$L_{m.s.c} = 1{,}0 \text{ kgf/cm}^3.$$

Încercările s-au executat pe plăci metalice pătrate cu latura $B = 20$ cm, fundate la o adîncime $D = 2B = 40$ cm.

Iniţial s-au făcut încercări cu o placă, notîndu-se sarcina de rupere cu P_{r_1} şi după aceea cu două plăci avînd distanţa între ele d variabilă de la $(0-3)B$. Capacitatea portantă pentru două plăci s-a notat cu P_{r_2} şi s-a determinat coeficientul de reducere a capacităţii portante β, datorită interferenţei zonelor active.

În tabela 1 se dau rezultatele obţinute. Se observă că cea mai mare reducere este de 35 % cînd plăcile sînt alăturate ($d = 0$), iar la distanţa de $3B$ influenţa practic este nulă (97 %).

$D = 2B$; $B = 20$ cm

Tabela 1

$d = f(B)$	Pr_2 (kg)	$\beta = \frac{Pr_2}{2Pr_1}$
0	465	0,65
0,5B	500	0,70
1B	521	0,72
1,5B	553	0,77
2B	602	0,83
2,5B	635	0,88
3B	695	0,97
	$Pr_1 = 362$	

Experienţe similare s-au efectuat la mai multe adîncimi de fundare ($D=1B$; $D = 3B$) şi, de asemenea, în canale vitrate. Rezultatele sînt prezentate în tabela 2. Se observă că odată cu creşterea adîncimii şi reducerea capacităţii portante este mai mare ; dar de la adîncimea de $2B$, variaţia este atît de mică încît practic se poate neglija şi să se ia în considerare la proiectare, coeficienţii de reducere rezultanţi, în tabela 1. Rezultatele experimentărilor efectuate în canale vitrate, în nisipuri, unde s-au utilizat şi adîncimi de $4B$ au confirmat rezultatele obţinute în pămînturi argiloase.

Pentru a se urmări influenţa umidităţii asupra capacităţii portante au fost efectuate încercări tot cu plăci de 20 × 20 cm, în pămînturi argiloase cu umidităţi $W_1 = 9{,}8\% < W_{opt}$ şi $W_2 = 15{,}4\% \simeq W_{opt}$. Celelalte caracteristici fizico-mecanice ale masivului de pămînt au rămas aceleaşi. Din rezultatele cuprinse în tabela 3 se observă că variaţia umidităţii nu influenţează reducerea capacităţii portante stabilită anterior.

S-a studiat de asemenea influenţa greutăţii specifice aparente a masivului de pămînt, în acest scop efectuîndu-se încercări cu placa de 20 × 20 cm, adîncimea de $D = 40$ cm, în aceleaşi pămînturi argiloase, dar prin compactare realizîndu-se două valori ale greutăţii specifice $\gamma_{a_1} = 1{,}65$ g/cm³ şi $\gamma_{a_2} = 1{,}93$ g/cm³. Rezultatele sînt trecute în tabela 4. Se observă că practic acest factor nu influenţează valorile obţinute anterior.

$B = 20$ cm.

Tabela 2

D cm	Pr_1 kg	Pr_2 (kg) $d = f(B)$						
		0	0,5B	1B	1,5B	2B	2,5B	3B
$D = 1B$ = 20 cm	92	130	150	161	172	182	182	—
β	—	0,70	0,82	0,88	0,92	0,99	0,99	—
$D = 2B$ = 40cm.	362	462	500	521	553	602	635	695
β	—	0,65	0,70	0,72	0,77	0,83	0,88	0,97
$D = 3B$ = 60cm	795	1050	1100	1140	1200	1260	1370	1460
β	—	0,66	0,70	0,72	0,76	0,86	0,80	0,92

$D = 2B$; $B = 20$ cm
Tabela 3

W %	Pr_1 kg	Pr_2 (kg) $d = f(B)$						
		0	0,5B	1B	1,5B	2B	2,5B	3B
9,8	362	465	500	521	553	602	635	695
β	—	0,65	0,70	0,72	0,77	0,83	0,88	0,97
15,4	600	805	855	905	975	1035	1105	—
β	—	0,67	0,71	0,75	0,81	0,86	0,92	—

$D = 2B$; $B = 20$ cm
Tabela 4

γ_a g/cm³	Pr_1 kg	Pr_2 (kg) $d = f(B)$						
		0	0,5B	1B	1,5B	2B	2,5B	3B
1,65	362	465	500	521	553	602	635	695
β	—	0,65	0,70	0,72	0,77	0,83	0,88	0,97
1,93	600	805	855	905	975	1035	1105	—
β	—	0,67	0,71	0,75	0,81	0,86	0,92	—

S-au executat experimentări pentru a se vedea influenţa dimensiunilor plăcilor de fundaţie; pentru aceasta s-au utilizat în aceleaşi condiţii plăci pătrate cu latura $B_1 = 20$ cm şi $B_2 = 30$ cm. Rezultatele sînt trecute în tabela 5. Se observă că diferenţele sînt nesemnificative şi se datoresc împrăştierii normale a rezultatelor. De asemenea, s-au efectuat experimentări şi în nisipuri cu plăci pătrate avînd latura $B_3 = 3$ cm şi $B_4 = 5$ cm. Rezultatele au confirmat pe cele obţinute la încercările cu argilă, adică dimensiunile în plan ale plăcilor de fundaţie nu influenţează practic reducerile de capacitate portantă datorită distanţei între plăci, stabilită anterior.

Pentru a se vedea influenţa naturii terenului s-au făcut experienţe în nisip cu plăci de 3×3 cm şi 5×5 cm, iar în argilă cu plăci de 20×20 cm şi 30×30 cm. Rezultatele trecute în tabela 6, ne arată că nici natura masivului de pămînt nu influenţează reducerea capacităţii portante a masivului stabilită anterior.

În concluzie, pentru masivele de pămînt solicitate de un grup de fundaţii de tip „ciupercă" la întindere, se poate considera că singurul factor care influenţează capacitatea portantă este distanţa între plăci, dacă aceasta este mai mică decît $3B$. Valoarea coeficienţilor de reducere β în funcţie de distanţa între plăci este dată în tabela 7. Deoarece o parte din aceste fundaţii utilizate la LEA sînt solicitate şi la compresiune, s-au executat experimentări pe modele compuse din patru fundaţii şi solicitate

$D = 60$ cm

Tabela 5

B cm	Pr_1 kg	Pr_2 Kg, $d = f(B)$						
		0	0,5B	1B	1,5B	2B	2,5B	3B
20	362	465	400	521	553	602	635	695
β	—	0,65	0,70	0,72	0,77	0,83	0,88	0,97
30	795	1050	1100	1140	1200	1260	1370	1460
cm	—	0,66	0,70	0,72	0,76	0,80	0,86	0,92

Tabela 6

	B cm	D cm	Pr_1 kg	Pr_2 (kg), $d = f(B)$						
				0	0,5B	1B	1,5B	2B	2,5B	3B
Terenuri necoezive	3	10		3,34	3,94	4,54	4,94	4,98	5,20	5,53
	β	—	—	0,63	0,74	0,86	0,94	0,95	0,98	1,0
	5	10		5,47	6,14	6,54	6,92	7,12	—	—
	β	—	—	0,65	0,75	0,88	0,96	0,94	—	—
Terenuri coezive	20	60	362	465	500	521	553	602	635	695
	β	—	—	0,65	0,70	0,72	0,77	0,83	0,88	0,97
	30	60	795	1050	1100	1140	1200	1260	1370	1460
	β	—	—	0,66	0,70	0,72	0,76	0,80	0,86	0,92

Tabela 7

Coef. β· \ $d = f(B)$	$d = f(B)$						
	0	0,5B	1B	1,5B	2B	2,5B	3B
β	0,64	0,70	0,76	0,82	0,88	0,94	1,0

la forțe orizontale, similar ca în exploatare, astfel că două fundații erau supuse la compresiune și două la întindere.

Încercările s-au executat în pământuri argiloase cu plăci de formă pătrată avînd dimensiunile de 10 × 10 cm. Caracteristicile fizico-mecanice erau cele arătate anterior, umiditatea $w = 15{,}5\%$, modificîndu-se numai rezistențele admisibile sub talpa fundației. Rezistențele admisibile au fost determinate cu un aparat portabil „Soiltest" și au avut următoarele valori: ($\sigma_{a_1} = 20{,}0$ kg/cm²); $\sigma_{a_2} = 4{,}0$ kg/cm²; $\sigma_{a_3} = 2{,}5$ kg/cm²; $\sigma_{a_4} = 1{,}7$ kg/cm² și $\sigma_{a_5} = 1{,}5$ kg/cm². Valorile presiunilor admisibile au fost astfel alese ca pierderea stabilității fundației să se facă fie prin cedarea

rezistenței la compresiune (σ_{a_4} și σ_{a_5}) fie la întindere (σ_{a_1}, σ_{a_2} și σ_{a_3}). S-a considerat că plasticizarea pămîntului sub talpa fundației se întîmplă cînd $\sigma > 2\sigma_a$.

Din analiza rezultatelor obținute se pot trage următoarele concluzii:

— Valoarea presiunii admisibile de sub talpa fundațiilor influențează și capacitatea portantă la întindere a masivului. Dacă ruperea se produce la întindere, influența presiunii admisibile este redusă cu pînă la 15%, dacă ruperea masivului are loc datorită compresiunii atunci influența este de $35 \div 40\%$.

— Influența distanței între plăci asupra capacității portante la compresiune este ceva mai mare decît la întindere cu 10—15%, și aceasta cînd plăcile sînt foarte apropiate ($0 \div 1B$), dar ținînd seama că valorile presiunilor admisibile recomandate în prescripțiile oficiale sau în referatele geotehnice sînt destul de prudente se consideră că se pot admite aceiași coeficienți de reducere β ca și la întindere.

Deci în cazul unor fundații solicitate la întindere sau la compresiune, la care distanța între tălpile lor este mai mică decît $3B$, va trebui să se țină seama de interferența zonelor active, aplicînd rezultatelor obținute coeficienții de reducere β, prezentați în tabela 7.

Primită la redacție la 25 ianuarie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. R. Podsiadlo, *Ultimate Uplift Capacity of a Foundation* in *a Group*, vol. II, partea I, Al VIII-lea Congres Internațional de Mec. Păm. și de Lucrări de Fundații.
2. Alex. Vaicum, *Capacitatea portantă a fundațiilor cu efort predominant axial pentru stîlpuri LEA*, St. cerc. mec. apl., 2 (1972).
3. Alex. Vaicum, Ion Vasile, Ioan Gheorgon, *Cercetări privind calculul la smulgere a grupei de fundații pentru stîlpii LEA de 110 kv, 220 și 400 kv*, Centrul de mecanică a solidelor.

UNELE REZULTATE PRIVIND COMPORTAREA ATENUĂRII ŞI VITEZEI UNDELOR RAYLEIGH PE SUPRAFAŢA RUGOASĂ A UNUI OŢEL NEALIAT

de VETURIA RASZILLIER
INCREST – Bucureşti

M. VLĂDESCU
Centrul de mecanică a solidelor – Bucureşti

În lucrare se prezintă date experimentale asupra comportării atenuării şi vitezei undelor elastice superficiale — unde Rayleigh — la propagarea pe suprafaţa rugoasă a oţelului OL37 şi interpretarea lor.

Influenţa calităţii suprafeţei asupra propagării undelor Rayleigh constituie baza fizică a folosirii lor în defectoscopia suprafeţelor [1], [2]. Prin calitatea suprafeţei se înţelege totalitatea parametrilor de bază, constînd din regularitatea formei, gradul ondulaţiei, rugozitatea suprafeţei, direcţia liniilor de prelucrare, gradul şi adîncimea de ecruisare.

În literatura de specialitate se cunosc numeroase lucrări în care se studiază sistematic propagarea undelor Rayleigh pentru diferite condiţii, ca, de exemplu, natura suprafeţei de propagare [3], analiza influenţei unei rugozităţi obţinută prin procedee diferite de prelucrare [4], aplicarea lor în cazul unor suprafeţe de coroziune [5].

În lucrarea de faţă se studiază experimental atenuarea şi comportarea vitezei de propagare a undelor elastice superficiale, pentru suprafeţe din oţel OL37 avînd grade diferite de rugozitate, date în tabelul 1.

Tabelul 1

Proba	Metoda de obţinere a rugozităţii	Rugozitatea maximă a suprafeţei, R_{max} μm
A	rabotare	97
B	rabotare	30
C	rectificare	4
D	polizare şi lustruire	1

Epruvetele folosite pentru studiu au avut dimensiunile de $250 \times 25 \times 10$ mm. iar rugozitatea s-a măsurat cu un aparat Talysurf 4 şi microscopic.

Măsurătorile experimentale s-au făcut folosind un aparat Krautkrämer tip USIP 11 cu palpator miniatural emiţător-receptor prevăzut cu vibrator de titanat de bariu ($Ba\,Ti\,O_3$). Dimensiunile vibratorului de

formă prismatică sînt de 10 × 10 × 0,5 mm. Vibratorul este excitat în impulsuri cu formă exponențială, cu durată de circa 2 μs și frecvența de repetiție de cca. 100 Hz. Vibratorul excitat de impulsurile de excitare, oscilează amortizat la frecvența sa de rezonanță într-o bandă în jurul

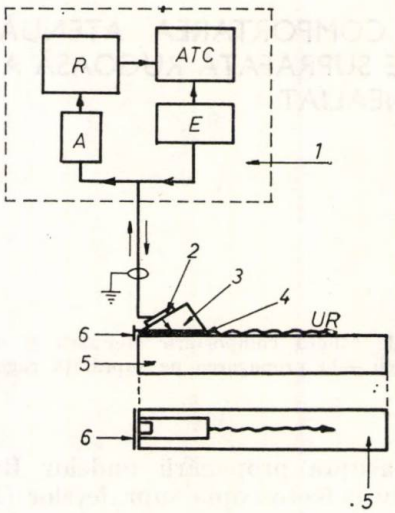


Fig. 1. — Schema simplificată a montajului folosit pentru măsurătorile experimentale: *1* — aparat ultrasonic emițător-receptor în impulsuri USIP 11 : *E* — emițător; *A* — atenuator etalonat în dB; *R* — receptor; *ATC* — afișare pe tub catodic; *2* — vibrator *US*; *3* — talpă de adaptare din plexiglas; *4* — peliculă cuplantă de ulei; *5* — piesa din oțel examinată; *UR* — direcția de propagare a undelor de suprafață; *6* — prag de fixare a palpatorului.

a 4 MHz. În figura 1 se dă schița montajului folosit la măsurătorile experimentale.

Pentru măsurarea atenuării s-a folosit un atenuator etalonat în dB. Procedeul de măsurare a constat în aducerea înălțimii semnalului ecoului

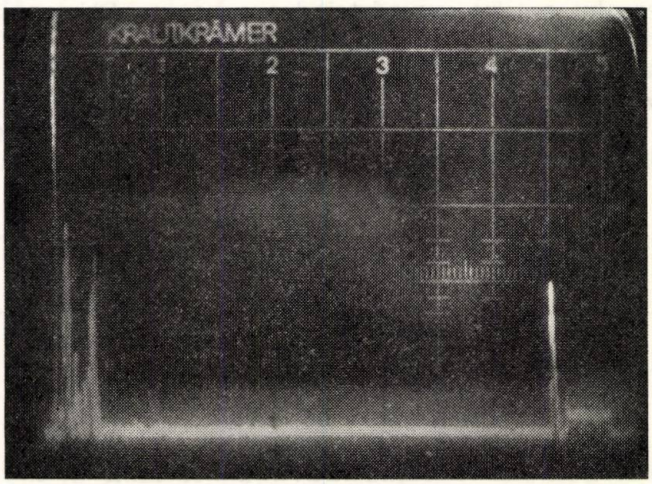


Fig. 2. — Înălțimea semnalului ecoului pe ecranul tubului catodic, pentru linia de referință.

la linia de referință pe ecranul tubului catodic, figura 2, pentru fiecare probă în parte și citirea atenuării care trebuia introdusă cu atenuatorul etalonat.

Rezultatele experimentale ale măsurării atenuării pentru probele $A - D$ sînt date în tabelul 2, coloana 3; în figura 3 se dă reprezentarea grafică a dependenţei atenuării faţă de înălţimea maximă a rugozităţii.

Tabelul 2

Proba	R_{max} (μm)	Atenuarea relativă (dB)	Valoarea procentuală a raportului vitezelor	Observaţii
1	2	3	4	5
A	97	72	−2	
B	30	44	−1	
C	4	33	—	
D	1	30	—	probă de referinţă

Comportarea vitezei undelor Rayleigh s-a urmărit prin determinarea raportului de viteze în unităţi de timp pentru suprafeţele de studiu cu rugozităţi diferite, din tabelul 1. Timpul în termeni de distanţă pe ecranul

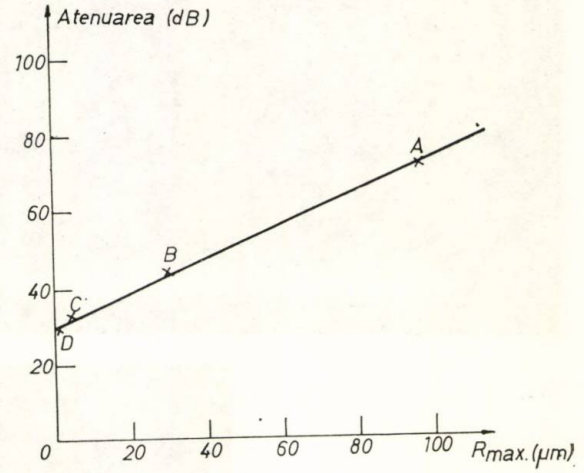
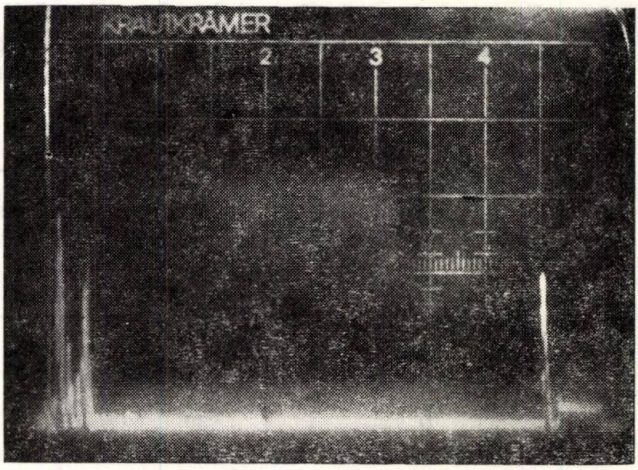


Fig. 3. — Dependenţa atenuării de înălţimea maximă a rugozităţii.

defectoscopului diferă ca în figurile 4*a-c* în sensul creşterii timpului cu înălţimea asperităţilor.

Proba D cu R_{max} cel mai mic a fost folosită ca probă de referinţă. În coloana 4 din tabelul 2 se dau valorile măsurătorilor şi în figura 5 reprezentarea grafică a dependenţei de înălţimea maximă a rugozităţii. În figura 6 se dă dependenţa atenuării de variaţia procentuală a vitezelor.

Erori de măsurare accidentale pot proveni din mai multe cauze. Una din acestea este aceea că palpatorul se amplasează la capătul epruvetelor de oţel la fiecare epruvetă în parte cuplajul putînd diferi de la o epruvetă la alta. Abaterea orientării palpatorului de la direcţia mediană



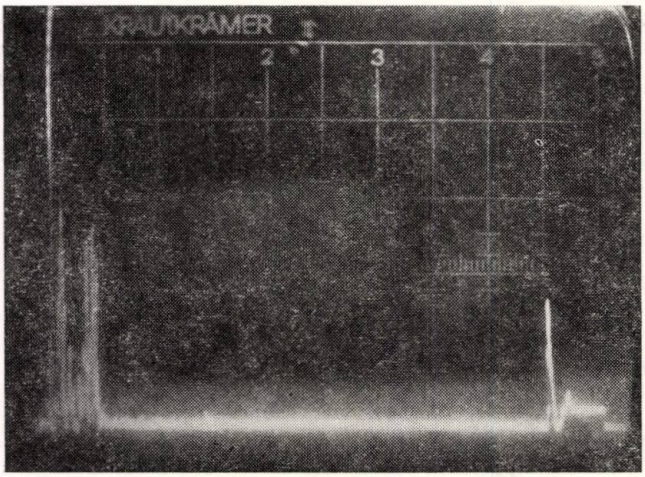
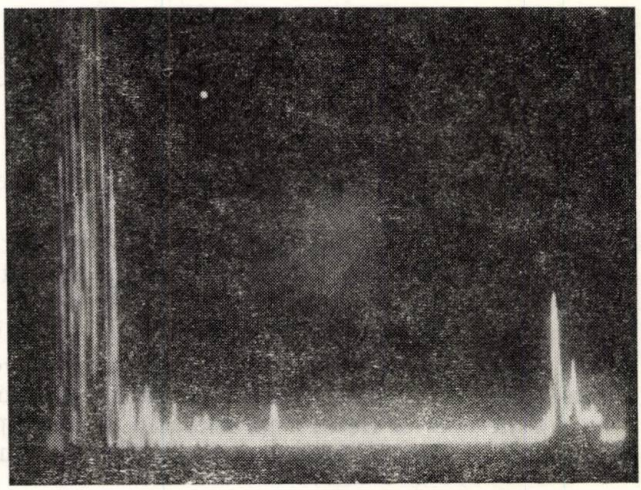


Fig. 4.— Comportarea vitezei undelor Rayleigh pentru R_{max} diferit, urmărită pe ecranul defectoscopului : 4*a* — suprafaţa de referinţă $R_{max} = 1 \mu m$ 4*b* — $R_{max} = 30$ μm ; 4*c* — $R_{max} = 97$ μm.



longitudinală a epruvetei (care constituie altă cauză de erori posibile), precum şi variaţiile de cuplare se pot în mare măsură elimina prin varierea forţei de apăsare a palpatorului şi a poziţiei (unghiului axei centrale a

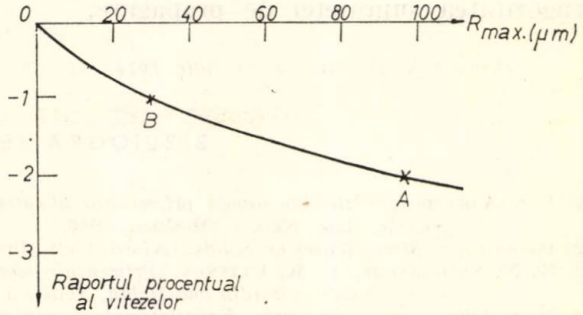


Fig. 5. — Dependenţa raportului procentual al vitezelor de înălţimea maximă a rugozităţii.

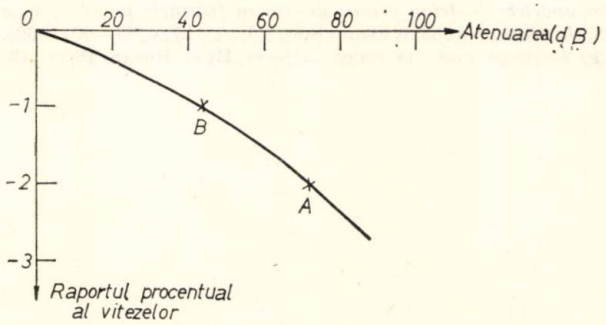


Fig. 6. — Dependenţa, raportul procentual al vitezelor — atenuare.

fasciculului ultrasonic faţă de axa longitudinală a epruvetei), pînă la obţinerea ecoului maxim care se ia în considerare.

Erori sistematice apar din limita preciziei măsurării distanţelor pe ecranul tubului catodic, variaţiile acestora fiind de ordinul diviziunii la o sută de diviziuni, cît cuprinde scala ecranului. Posibilităţile de apreciere vizuală a deplasării ecourilor fiind în limitele unei jumătăţi de diviziune, eroarea rezultă a fi de circa 0,5%.

INTERPRETAREA REZULTATELOR

Din studiul determinărilor experimentale rezultă, pentru valorile mici în comparaţie cu lungimea de undă Rayleigh, că atenuarea creşte cu mărirea rugozităţii (coloana 3 din tabelul 2 şi figura 3). Aceasta concordă cu opinia exprimată în lucrările [1] şi [4], că asperităţile sînt atît surse de reflexie a undelor de suprafaţă, cît şi de transformare a acestora în unde de volum, acestea mărind atenuarea undelor cu creştere a rugozităţii.

Scăderea vitezei de propagare cu creşterea rugozităţii (coloana 4, tabelul 2 şi figurile 4*a-c* şi 5) se interpretează ca o dispersie a undelor Rayleigh datorită rugozităţii suprafeţei. Originea dispersiei poate fi explicată dacă se consideră stratul rugos ca un strat cu grosimea egală cu

R_{max} avînd proprietăţi de propagare diferite de cea a masei materialului. În lucrarea [6] s-au adus argumente teoretice în acest sens.

Din tabelul 2 (şi figura 6) se vede că mărirea dispersiei este proporţională cu mărirea atenuării undelor Rayleigh, ambele crescînd cu rugozitatea suprafeţei de propagare.

Primită la redacţie la 24 iulie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. I. A. Viktorov, *Fiziceskie osnovi primenenia ultrazvukovih voln Rayleigh-a i Lemb—a v tehnike*. Izd. Nauka. Moskva, 1966.
2. H. Kolsky, *Stress Waves on Solids*, Oxford, Univ. Press, London, 1953.
3. K. N. Vinogradov, G. K. Ulianov, *Primenenie scorosti i zatuhania ultrazvucovih poverhnostnih voln v tverdih materialah*, Acust. J., **5**, *3*, 291—293 (1959).
4. N. S. Bîcov, I. G. Şnaider, *Experimentalnoe islcdovanie vliania cacestva poverhnosti na zatuhanie poverhnostnih voln*. Acust. J. **6**, *4*, 501—503 (1960).
5. D. A. Cordellos ş. a., *Utilizarea undelor Rayleigh pentru detectarea fisurării prin coroziune sub tensiune în aliajele de aluminiu*, Materials evaluation, S.U.A., **27**, *4*, 85—90 (1969).
6. V. P. Mihu, Veturia Raszillier, *Rayleigh waves on rough surfaces*, Rev. Roum. Phys. **19**, *9*, 937 (1974),

TEORIA LINIAR-ELASTICĂ A MECANICII RUPERILOR. II*)

de TOMA PANĂ
Institutul politehnic București

În partea I a lucrării au fost prezentate succint teoriile clasice ale mecanicii ruperilor concepute de Griffith, Irwin și Orowan. De asemenea, au fost stabilite expresiile eforturilor unitare și deformațiilor produse în vecinătatea vîrfului fisurii precum și corelația dintre forța de extensie a fisurii și factorul de intensitate a eforturilor unitare. În cele ce urmează se analizează factorul de intensitate al eforturilor unitare și condițiile în care acesta poate deveni un parametru de material utilizabil pentru preîntîmpinarea ruperilor fragile. În continuare sînt examinate limitele teoriei liniare a mecanicii ruperilor precum și modul concret de utilizare al acesteia în activitatea de proiectare. În anexele lucrării sînt prezentate cîteva expresii mai uzuale ale factorului de intensitate a eforturilor unitare, necesare pentru proiectare sau la determinarea experimentală a tenacității ruperii.

1. FACTORUL DE INTENSITATE A EFORTURILOR UNITARE

Factorul de intensitate a eforturilor unitare este o măsură a creșterii eforturilor unitare, produsă de prezența fisurii, în raport cu eforturile unitare existente în piesă în absența acesteia. După cum rezultă din relațiile (21) și (22) stabilite în prima parte a lucrării, pe o direcție dată, eforturile unitare tind spre o variație liniară în raport cu inversul rădăcinii patrate a distanței. Prin urmare, factorul K este proporțional cu panta maximă a funcției eforturilor unitare și se definește prin relația

$$K = \lim_{\zeta \to 0} [\sqrt{\pi\zeta} \cdot Z(\zeta)]. \tag{1}$$

Această relație poate fi utilizată direct numai dacă se cunoaște expresia funcției lui Westergaard în raport cu eforturile unitare aplicate și cu forma și dimensiunile fisurii considerate. În caz contrar, factorul de intensitate a eforturilor unitare poate fi determinat calculînd energia elastică eliberată în piesă prin introducerea fisurii considerate, cu ajutorul relațiilor amintite mai sus și ținînd seama că suma eforturilor unitare fiind un invariant este egală cu eforturile unitare aplicate. Deoarece forța de extensie a fisurii este derivata în raport cu lungimea fisurii a energiei elastice eliberate, factorul de intensitate K rezultă din ecuația fundamentală a teoriei liniar elastice a mecanicii ruperilor. De exemplu, pentru placa infinită solicitată la întindere monoaxială de eforturile unitare σ,

*) Partea I a lucrării a fost publicată în tom. 34, nr. 4 din 1975

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 2, 1976, P. 305–318

energia elastică eliberată prin introducerea unei fisuri eliptice de lungime $2a$, este dată de relaţia $W_e = -\frac{\pi a^2 \sigma^2}{E}$. Derivata acestei relaţii în raport cu $2a$ fiind $\mathcal{G}$, din ecuaţia fundamentală rezultă

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}. \tag{2}$$

Este evident că factorul K poate fi determinat şi prin metodele teoriei elasticităţii sau, experimental, folosind metoda complianţei.

De regulă, factorul de intensitate a eforturilor unitare are următoarea structură:

$$K = Y\sigma\sqrt{a}, \tag{3}$$

în care Y este un coeficient ce depinde de geometria piesei, de modul de solicitare şi de forma fisurii. În tabelul 1 se dau expresiile factorului K pentru cîteva tipuri de fisuri şi crestături situate în plăci şi în corpuri masive, iar în tabelul 2, expresiile aceluiaşi factor pentru epruvetele mai des utilizate [1], [2], [3].

Deşi diferă numai printr-o constantă, mărimile $\mathcal{G}$ şi K nu se bucură de acelaşi interes practic. Deoarece parametrului K i se poate aplica principiul suprapunerii efectelor, utilizat pe scară largă în problemele de mecanică şi de rezistenţa materialelor la calculul eforturilor şi al deformaţiilor, acesta are o largă utilizare în activitatea de proiectare.

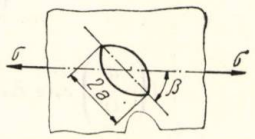
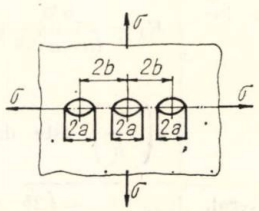
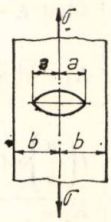
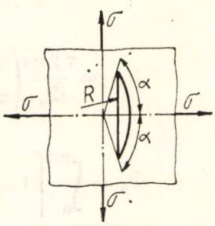
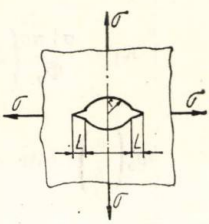
2. TENACITATEA RUPERII

Pentru o piesă dată, parametrul K este o funcţie liniară de efortul unitar σ ce acţionează perpendicular pe direcţia defectului. Dacă sarcinile cresc progresiv se constată că la o valoare a efortului unitar, mult mai mică decît rezistenţa de rupere a materialului, fisurile se propagă brusc şi se produce ruperea fragilă. Valoarea factorului de intensitate, calculată cu acest efort unitar, se numeşte factor critic de intensitate a eforturilor unitare şi se notează K_c. De cele mai multe ori indicele c este precedat de indicele modului de propagare a fisurii pentru care parametrul K a fost determinat. Factorul critic de intensitate a eforturilor unitare este o proprietate a materialului ce caracterizează susceptibilitatea acestuia la extensia instabilă a fisurii, în condiţiile în care în vecinătatea frontului fisurii există o stare plană de eforturi unitare sau de deformaţii, ne afectată de prezenţa unor deformaţii plastice importante. Această valoare critică a parametrului K poate caracteriza pe deplin tenacitatea ruperii şi poate fi utilizată pentru estimarea relaţiei dintre eforturile unitare aplicate şi dimensiunile defectelor la care se produce distrugerea structurilor de rezistenţă, dacă ruperea acestora are loc în condiţiile stării plane de deformaţie.

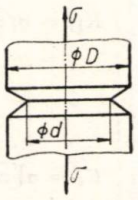
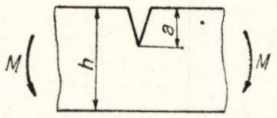
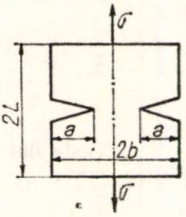
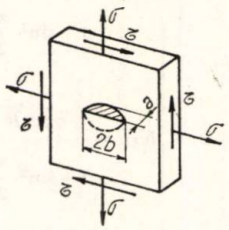
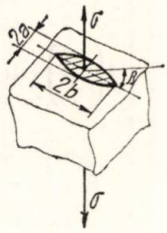
Deoarece forţa critică de extensie a fisurii $\mathcal{G}_c$ este legată de factorul critic de intensitate K_{Ic} prin intermediul ecuaţiei fundamentale, tenacitatea ruperii poate fi definită prin oricare din aceşti parametri. Ea este o

Tabelul 1

Expresiile factorului de intensitate a eforturilor unitare pentru bare, plăci și corpuri masive

Cazul	Tipul fisurii și modul de solicitare	Expresia factorului de intensitate
1	Fisură eliptică înclinată într-o placă infinită solicitată la întindere monoaxială 	$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\sin^2\beta$ $K_{II} = \sigma\sqrt{\pi a}\cos\beta\sin\beta$
2	Distribuție periodică de fisuri eliptice într-o placă infinită solicitată la întindere monoaxială 	$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left(\frac{2b}{\pi a}\ \mathrm{tg}\ \frac{\pi a}{2b}\right)^{1/2}$ $K_{II} = K_{III} = 0$
3	Fisură eliptică centrală într-o placă de lățime finită solicitată la întindere monoaxială 	$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\,f(\lambda)$ $\lambda = \frac{a}{b}$ $f(\lambda)$ este dat în Anexă
4	Fisură curbată într-un cîmp de tensiuni biaxiale egale 	$K_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi R}}{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{2}\right]^{1/2}$ $K_{II} = \frac{\sigma\sqrt{\pi R}}{1+\sin^2\frac{\alpha}{2}}\left[\frac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)}{2}\right]^{1/2}$
5	Fisură pornind dintr-o gaură, într-o placă infinită solicitată la întindere monoaxială 	$K_I = \sigma\sqrt{\pi L}\,f\left(\frac{L}{r}\right)$ $f\left(\frac{L}{r}\right)$ este dat în Anexă

Tabelul 1 (continuare)

Cazul	Tipul fisurii şi modul de solicitare	Expresia factorului de intensitate
6	Bară rotundă sub tensiune avînd o fisură circulară 	$K_I = \sigma_{ef}\sqrt{\pi D}\, f\left(\frac{d}{D}\right)$ $f\left(\frac{d}{D}\right)$ este dat în Anexă
7	Bară cu crestătură în V solicitată la încovoiere 	$K_I = \frac{6M}{(h-a)^{3/2}}\, g\left(\frac{a}{h}\right)$ $g\left(\frac{a}{h}\right)$ este dat în Anexă
8	Placă cu două crestături în V aşezate lateral, solicitată la întindere monoaxială 	$K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left(\frac{2b}{\pi a}\operatorname{tg}\frac{\pi a}{2b}\right)^{1/2} f\left(\frac{a}{b}\right)$ Cînd $L \to \infty$ $K_I = \sigma\sqrt{\pi a}\left[\frac{2b}{\pi a}\left(\operatorname{tg}\frac{\pi a}{2b} + 0{,}1\,\sin\frac{\pi a}{b}\right)\right]^{1/2}$ $f\left(\frac{a}{b}\right)$ este dat în Anexă
9	Fisură semieliptică în suprafaţa unei plăci solicitată la întindere şi forfecare 	$K_I = \left[1+0{,}12\left(1-\frac{a}{b}\right)\right]\frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi_0}\left[\frac{2b}{\pi a}\operatorname{tg}\frac{\pi a}{2b}\right]^{1/2}$ $K_{III} = \frac{\tau\sqrt{\pi a}}{\Phi_0}\left(\frac{2b}{\pi a}\operatorname{tg}\frac{\pi a}{2b}\right)^{1/2}$ $\Phi_0 = \int_0^{\pi/2}\left[1-\left(\frac{b^2-a^2}{b^2}\right)\sin^2\theta\right]^{1/2} d\theta$
10	Fisură eliptică într-un volum infinit solicitat la o tensiune uniformă 	Pentru un punct de pe marginea fisurii determinat de unghiul β : $K_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi_0}\left(\sin^2\beta + \frac{a^2}{b^2}\cos^2\beta\right)^{1/4}$ $\Phi_0\left(\frac{a}{b}\right)$ este dat în Anexă

Anexa tabelului 1

Cazul 3

λ	f (λ)
0,074	1,00
0,207	1,03
0,275	1,05
0,337	1,09
0,410	1,13
0,466	1,18
0,535	1,25
0,592	1,33

Cazul 6

d/D	$f(d/D)$
0	0
0,1	0,111
0,2	0,155
0,3	0,185
0,4	0,209
0,5	0,227
0,6	0,238
0,65	0,240
0,70	0,240
0,75	0,237
0,80	0,233
0,85	0,225
0,90	0,205
0,95	0,162
0,97	0,130
1,00	0

Cazul 7

a/h	$g\left(\frac{a}{h}\right)$
0,05	0,36
0,1	0,49
0,2	0,60
0,3	0,66
0,4	0,69
0,5	0,72
0,6	0,73
>0,6	0,73

Cazul 5

	o fisură		două fisuri	
	întindere monoaxială	întindere biaxială	întindere monoaxială	întindere biaxială
L/r	$f(L/r)$		$f(L/r)$	
0	3,39	2,26	3,39	2,26
0,1	2,73	1,98	2,73	1,98
0,2	2,30	1,82	2,41	1,83
0,3	2,04	1,67	2,15	1,70
0,4	1,86	1,58	1,96	1,61
0,5	1,73	1,49	1,83	1,57
0,6	1,64	1,42	1,71	1,52
0,8	1,47	1,32	1,58	1,43
1,0	1,37	1,22	1,45	1,38
1,5	1,18	1,06	1,29	1,26
2,0	1,06	1,01	1,21	1,20
3,0	0,94	0,93	1,14	1,13
5,0	0,81	0,81	1,07	1,06
10,0	0,75	0,75	1,03	1,03
∞	0,707	0,707	1,00	1,00

Cazul 8

$\frac{a}{b}$	$f(a/b)$		
	$\frac{L}{b}=1$	$\frac{L}{b}=2$	$\frac{L}{b}=3$
0,1	1,13	1,12	1,12
0,2	1,13	1,11	1,12
0,3	1,14	1,09	1,13
0,4	1,16	1,06	1,14
0,5	1,14	1,02	1,15
0,6	1,10	1,01	1,22
0,7	1,02	1,00	1,34
0,8	1,01	1,00	1,57
0,9	1,00	1,00	2,09

Cazurile 9 și 10

$\frac{a}{b}$	$\Phi_0\left(\frac{a}{b}\right)$
0	1
0,2	1,05
0,4	1,15
0,6	1,28
0,8	1,42
1,0	$\pi/2$

mărime caracteristică a materialului și depinde de natura materialului, temperatură, starea de tensiuni din vecinătatea defectului, modul de rupere și structura materialului.

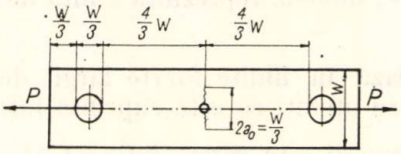
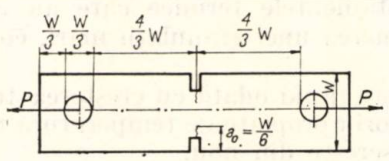
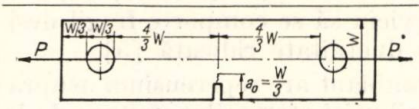
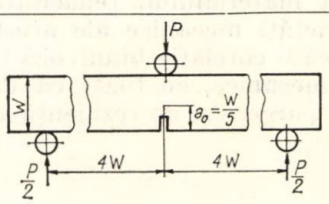
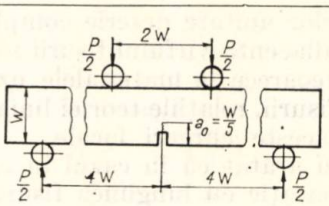
Tenacitatea ruperii este minimă în condițiile stării plane de deformație deoarece $\mathcal{G}_c$ este o măsură a lucrului mecanic ireversibil făcut în timpul procesului de rupere, iar în condițiile stării plane de deformație, deformațiile plastice de la vîrful fisurii, care preced extensia acesteia, sînt considerabil mai mici decît în condițiile stării plane de tensiune. De asemenea, modul I de propagare — care este caracteristic celor mai multe ruperi fragile — în condițiile stării plane de deformație este în general mai controlabil, întrucît necesită eforturi de rupere mai mici decît celelalte moduri. Prin urmare, parametrul $\mathcal{G}_{Ic}$ poate fi utilizat la preîntîmpinarea ruperilor fragile.

Din punct de vedere ingineresc, tenacitatea ruperii la starea plană de deformație este parametrul cel mai semnificativ al mecanicii ruperilor deoarece numai în condițiile stării plane de deformație eforturile unitare de la vîrful fisurii sînt independente de geometria sistemului. Ca urmare, în aceste condiții valoarea tenacității ruperii măsurată în laborator poate fi utilizată în proiectarea structurilor, fără a ține seama de detaliile geometrice sau de solicitare ale acestora.

Dacă din punct de vedere fizic noțiunea de tenacitate a ruperii poate fi reprezentată la fel de bine de oricare din parametri $\mathcal{G}_c$ sau K_c, nu același lucru se poate spune din punctul de vedere al calculului ingineresc. De aceea, pentru evitarea confuziilor, marea majoritate a normelor înțeleg prin tenacitatea ruperii la starea plană de deformație, valoarea parametrului K_{Ic}. Deoarece teoria liniară a mecanicii ruperilor este aplicabilă numai dacă zona plastică de la vîrful fisurii este mică în comparație cu lungimea acesteia și cu grosimea materialului, marea majoritate a

Tabelul 2

Expresiile factorului de intensitate a eforturilor unitare pentru epruvetele de secțiune dreptunghiulară

Nr. crt.	Schema epruvetei	Expresia factorului de intensitate a eforturilor unitare
1	 $5 < \frac{w}{B} < 10$	$K_I = \frac{P}{B}\frac{a^{1/2}}{w}\left[1{,}77 + 0{,}227\left(\frac{2a}{w}\right) - 0{,}510\left(\frac{2a}{w}\right)^2 + 2{,}7\left(\frac{2a}{w}\right)^3\right]$ pentru $\frac{2a}{w} < 0{,}7$
2	 $5 < \frac{w}{B} < 10$	$K_I = \frac{P}{B}\frac{a^{1/2}}{w}\left[1{,}98 + 0{,}36\left(\frac{2a}{w}\right) - 2{,}12\left(\frac{2a}{w}\right)^2 + 3{,}42\left(\frac{2a}{w}\right)^3\right]$ pentru $\frac{2a}{w} < 0{,}7$
3	 $4 < \frac{w}{B} < 8$	$K_I = \frac{P}{B}\frac{a^{1/2}}{w}\left[1{,}99 - 0{,}412\left(\frac{a}{w}\right) + 18{,}7\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 38{,}48\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 53{,}85\left(\frac{a}{w}\right)^4\right]$ pentru $\frac{a}{w} < 0{,}6$
4	 $2 < \frac{w}{B} < 8$	$K_I = \frac{12P}{B}\frac{a^{1/2}}{w}\left[1{,}96 - 2{,}75\left(\frac{a}{w}\right) + 13{,}66\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 23{,}98\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 25{,}22\left(\frac{a}{w}\right)^4\right]$ pentru $\frac{a}{w} < 0{,}6$
5	 $2 < \frac{w}{B} < 8$	$K_I = \frac{9P}{B}\frac{a^{1/2}}{w}\left[1{,}99 - 2{,}47\left(\frac{a}{w}\right) + 12{,}97\left(\frac{a}{w}\right)^2 - 23{,}17\left(\frac{a}{w}\right)^3 + 24{,}80\left(\frac{a}{w}\right)^4\right]$ pentru $\frac{a}{w} < 0{,}6$

Observație : Dacă P reprezintă valoarea forței aplicate pentru care se produce ruperea epruvetei, aceste relații dau valoarea critică a factorului de intensitate, adică tenacitatea ruperii la starea plană de deformație, K_{Ic}

normelor limitează utilizarea parametrului K_{Ic} în funcție de aceste două mărimi. Pentru problemele de proiectare sau de verificare, condiția de aplicabilitate a criteriului tenacității ruperii este îndeplinită dacă atît lungimea fisurii, cît și grosimea materialului sînt cel puțin de 2,5 ori mai mari decît patratul raportului $\frac{K_{Ic}}{\sigma_c}$, unde σ_c reprezintă limita de curgere a materialului [4].

Valoarea factorului K_{Ic} variază în limite foarte largi de la un material la altul. De exemplu, pentru oțeluri ea este cuprinsă între 1000 și 7000 $\frac{N}{mm^{3/2}}$, [2]. Tenacitatea ruperii este serios influențată de tratamentele termice aplicate materialului, de granulația acestuia și de compoziția chimică. De regulă, tratamentele termice care au ca efect ridicarea limitei de curgere sau obținerea unei granulații mari, conduc la micșorarea valorii factorului K_{Ic}.

În general, parametrul K_{Ic} crește rapid odată cu creșterea temperaturii de la valori negative pînă la valori apropiate de temperatura normală după care, la temperaturi mari, descrește din nou.

Tenacitatea ruperii este sensibil diminuată de iradiația neutronică. Aceasta face ca oțelurile utilizate în construcțiile nucleare, după un timp destul de scurt de la intrarea în serviciu să se comporte fragil deși aceste materiale în condiții normale au o ductilitate ridicată [5].

Acțiunea corosivă a mediului ambiant are repercusiuni asupra legilor de evoluție a fisurilor și asupra distribuției eforturilor unitare de la vîrful acestora. În consecință, în condițiile coroziunii sub sarcină tenacitatea ruperii are altă valoare decît cea determinată, pentru materialul respectiv, în absența mediului corosiv [6], [7].

Fiind o proprietate intrinsecă a materialului, tenacitatea ruperii se află în corelație cu celelalte proprietăți mecanice ale acestuia. Pînă în prezent nu s-a reușit să se stabilească o corelație biunivocă între parametrul K_{Ic} și principalele proprietăți mecanice, cu toate că dependența calitativă a acestui factor de limita de curgere și de rezilință este foarte ușor de pus în evidență [8], [9], [10].

3. LIMITELE TEORIEI LINIAR-ELASTICE

Factorul de intensitate a eforturilor unitare descrie complet cîmpul de tensiuni și de deformații din zona adiacentă vîrfului fisurii numai dacă acestea rămîn în domeniul elastic. Deoarece la materialele uzuale apar totdeauna deformații plastice la vîrful fisurii, relațiile teoriei liniare trebuie modificate pentru a ține seama de aceste curgeri locale.

Cercetările experimentale [11] au arătat că în cazul în care zonele plastice sînt suficient de mici în comparație cu lungimea fisurii, relațiile teoriei liniare rămîn valabile dacă în locul lungimii reale a fisurii se folosește o lungime de calcul mai mare decît aceasta. Întrucît prezența zonei plastice conduce la micșorarea efortului unitar de la vîrful fisurii, pentru ca factorul K_c să rămînă constant trebuie introdusă o corecție empirică a lungimii fisurii de așa manieră încît aceasta să dea o creștere mică

a factorului K_c, dacă fisura este lungă, şi o creştere importantă, dacă ea este scurtă. Pentru a satisface această cerinţă, Irwin [12] foloseşte în calculul factorului critic de intensitate a eforturilor unitare, o lungime efectivă a fisurii obţinută prin adăugarea razei r_p a zonei plastice la lungimea reală a acesteia.

Existenţa zonelor plastice la vîrful fisurii exclude posibilitatea ca distribuţia eforturilor unitare să prezinte o discontinuitate în acest punct,

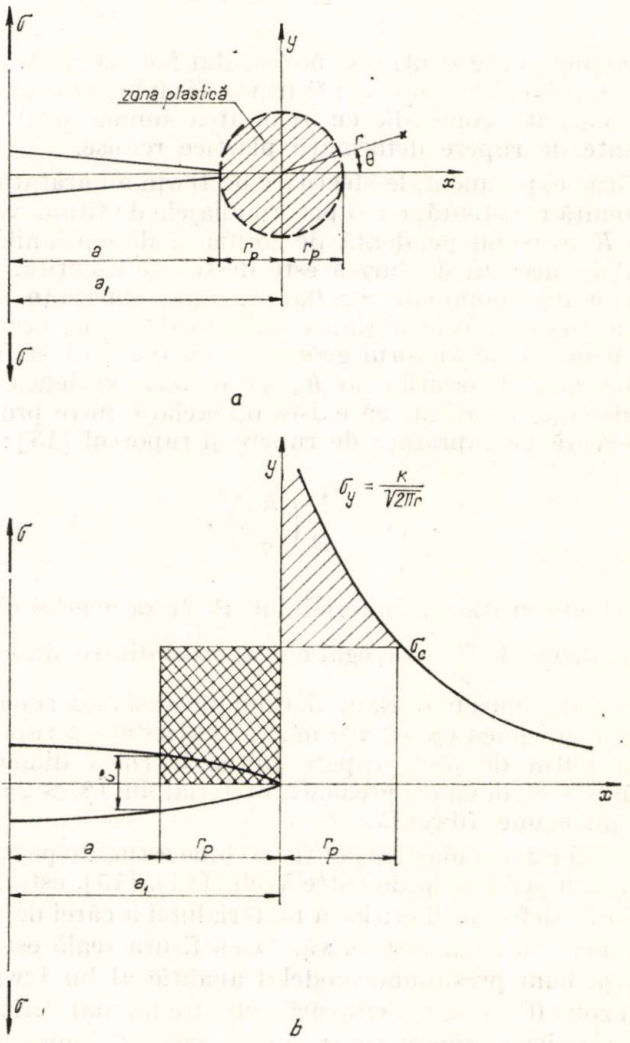


Fig. 1

aşa cum rezultă din modelul analitic al fisurii imaginat de Inglis. Pentru a justifica corecţia introdusă, Irwin perfecţionează modelul elastic al fisurii eliptice pe care îl completează cu zonele plastice circulare din figura 1*a*. Astfel fisura reală împreună cu zonele ei plastice poate fi înlocuită cu o

fisură fictivă al cărei vîrf este situat la egală distanţă între vîrful real şi frontiera plastică. Cum în zona plastică efortul unitar se poate menţine constant şi egal cu limita de curgere a materialului, raza acesteia se poate calcula din expresia efortului unitar σ_y scrisă într-un punct situat pe direcţia de propagare, în faţa frontului fisurii ($\theta = 0$). Se obţine

$$r_p = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{K}{\sigma_c}\right)^2. \tag{4}$$

Acest model poate fi utilizat în calculul factorului K cu condiţia ca în relaţiile respective, lungimea a a fisurii să fie înlocuită prin $a_1 = a + r_p$. Rezultatele obţinute concordă cu realitatea numai pentru materialele care au înainte de rupere deformaţii plastice reduse.

Cercetările experimentale efectuate de Irwin au arătat că atît pentru oţelurile de înaltă rezistenţă, cît şi pentru aliajele de titan, valoarea critică a factorului K este independentă de forma şi dimensiunile epruvetei şi crestăturii, dacă aceasta din urmă este destul de ascuţită. Pentru valori ale efortului unitar nominal, $\sigma > 0{,}8\ \sigma_c$, apar diferenţe sensibile între rezultatele calculate şi cele obţinute experimental. În asemenea cazuri, K devine dependent de factorul geometric cu toate că K_c este un parametru de material. Măsurările lui K_c pe o mare varietate de materiale de înaltă rezistenţă au arătat că există o corelaţie între proporţia ruperii fibroase observată pe suprafaţa de rupere şi raportul [13]:

$$\beta_c = \frac{1}{B}\left(\frac{K_c}{\sigma_c}\right)^2, \tag{5}$$

unde B reprezintă grosimea materialului. Pe baza acestei relaţii se poate ajunge la concluzia că $\frac{\beta_c}{\pi}$ este egal cu raportul dintre dimensiunea zonei plastice ($2r_p$) şi grosimea materialului. Cînd dimensiunea zonei plastice este mai mică decît grosimea ($\beta_c < \pi$), marea majoritate a ruperilor studiate prezintă mai puţin de 50% rupere fibroasă. Dacă dimensiunea zonei plastice depăşeşte de două ori grosimea materialului ($\beta_c > 2\pi$) ruperea este aproape în întregime fibroasă.

Dimensiunile zonei plastice pot fi mai bine estimate pe cale energetică. Teoria propusă în acest scop de către Wells [14], [15], este fundamentată pe existenţa unei deformaţii critice a materialului a cărei depăşire conduce la apariţia ruperii în zona respectivă. Dacă fisura reală este înlocuită cu una fictivă aşa cum presupune modelul analitic al lui Irwin, rezultă că pe axa Ox, în zona $0 < r < r_p$, eforturile unitare nu mai variază după legea teoriei liniar elastice ci rămîn constante şi egale cu limita de curgere σ_c. În consecinţă, în realitate energia elastică este mai mică decît la modelul elastic cu cantitatea corespunzătoare ariei simplu haşurate din figura 1*b*. Această micşorare a energiei este compensată de energia înmagazinată în zona plastică cuprinsă între vîrful fisurii reale şi cel al fisurii analitice (aria dublu haşurată). Deşi bilanţul energetic conduce tot la expresia (4)

pentru raza zonei plastice, aceste considerente permit determinarea deplasărilor produse la vîrful fisurii ca urmare a deformaţiilor plastice.

Cum deplasarea v, pe axa Ox, la stînga vîrfului fisurii ($\theta = \pi$), se obţine din ultima relaţie (21) stabilită în prima parte a lucrării, la vîrful fisurii reale (adică pentru $r = r_p$) dublul acestei deplasări se poate scrie sub forma:

$$\delta = \frac{4\mathcal{G}}{\pi\sigma_c}. \tag{6}$$

Mărimea δ se numeşte deplasarea de deschidere a fisurii şi reprezintă un parametru fundamental al mecanicii ruperilor care poate fi legat de $\mathcal{G}$ şi K prin relaţii simple şi care este foarte comod de determinat experimental.

Deoarece este normal ca, pentru zona plastică, forţa de extensie a fisurii să fie mai mare decît lucrul mecanic corespunzător extensiei δ, relaţia (6) se mai scrie:

$$\mathcal{G} \geqslant \sigma_c \delta \tag{7}$$

Această relaţie are o sferă de aplicabilitate mai largă decît (6). Folosind relaţia (7) sub formă de egalitate, Wells ajunge la concluzia că fisura se deschide fără a se extinde numai atît timp cît tenacitatea materialului este suficientă pentru a se putea consuma, prin deformare plastică, toată energia elastică eliberată.

El demonstrează că valoarea critică a deplasării de deschidere a fisurii δ_c este un parametru echivalent al tenacităţii ruperii la starea plană de deformaţie K_{Ic}, care spre deosebire de acesta are din punct de vedere teoretic o valabilitate nelimitată.

Deşi inegalitatea (7) este valabilă şi dincolo de atingerea curgerii generale a materialului, egalitatea respectivă conduce la rezultate precise numai dacă este îndeplinită condiţia $\sigma < 0{,}8\ \sigma_c$.

4. PRINCIPII DE PROIECTARE A STRUCTURILOR BAZATE PE TEORIA LINIAR ELASTICĂ A MECANICII RUPERILOR

În prezenţa fisurilor, structurile se rup sub acţiunea unor eforturi unitare nominale mult mai mici decît rezistenţa de rupere a materialului din care acestea sînt confecţionate. Deoarece pentru situaţia ruperii relaţia (3) se scrie

$$K_c = Y\sigma_f\sqrt{a}, \tag{8}$$

în care K_c este tenacitatea materialului, iar Y — coeficientul definit mai sus, ambele mărimi fiind constante pentru o structură dată, rezultă că eforturile unitare de rupere variază invers proporţional cu lungimea fisurii. Cînd efortul unitar σ_f la care se produce distrugerea structurii scade pînă la valoarea efortului unitar nominal admisibil, fisura atinge dimensiunile critice. Calculul acestei mărimi furnizează un criteriu cantitativ de apre-

ciere a rezultatelor examenului defectoscopic și totodată reprezintă o fundamentare teoretică a controlului de calitate.

Metodele de prevenire a ruperii brutale se bazează pe controlul condițiilor de inițiere sau de propagare a ruperii. Pînă de curînd, cea mai largă răspîndire a avut-o metoda bazată pe conceptul de oprire a ruperii deoarece ea este simplă necesitînd numai cunoașterea proprietăților globale ale materialului piesei precum și nivelul general de solicitare. Elementele fundamentale ale acestei metode: temperatura de tranziție de ductilitate (*NDT*) și diagrama de analiză a ruperii precum și valorile limită ale parametrului K_{Ic}, au fost utilizate în numeroase standarde la formularea criteriilor de proiectare.

Diagrama de analiză a ruperii, imaginată de Pellini și Puzack [16], a fost stabilită pe baza încercărilor de sfîșiere dinamică și Robertson; ea reprezintă o corelație generală între dimensiunea defectului, efortul unitar relativ și variația de temperatură în raport cu temperatura *NDT*. Pentru ca această diagramă să poată fi utilizată în proiectare este necesară cunoașterea unui singur parametru: temperatura *NDT* a materialului respectiv. Întrucît această diagramă nu conduce la rezultate corecte decît pentru piese mai subțiri de 75 mm, a fost pusă la punct o versiune expandată [17] care nu are acest neajuns. De fapt, trebuie subliniat că efectul grosimii piesei nu este important decît pentru defectele de lungimi mari și că expandarea diagramei de analiză a ruperii este necesară numai în situații speciale, cînd există defecte foarte mari aflate în piese extrem de groase, solicitate de eforturi unitare mari.

Cu toate că utilizarea diagramei de analiză a ruperii este foarte comodă, ecuațiile teoriei liniare elastice a mecanicii ruperilor sînt folosite din ce în ce mai mult tocmai datorită faptului că ele stabilesc o corelație precisă între tenacitatea ruperii, eforturile unitare aplicate, modul de solicitare, geometria piesei, tipul și dimensiunile defectului.

Integrarea parametrilor metalurgici cu cei mecanici, realizată cu ajutorul diagramei de analiză a raportului $\frac{K_{Ic}}{\sigma_c}$ [17], a permis delimitarea condițiilor care necesită utilizarea directă în proiectare a teoriei liniare a mecanicii ruperilor, de cele care exclud folosirea ei. Aceste delimitări sînt de o excepțională importanță pentru aplicațiile practice, deoarece ele precizează că teoria liniar elastică conduce la rezultate certe numai pentru rapoarte $0{,}8 < \frac{K_{Ic}}{\sigma_c} < 2$, întrucît numai pentru acest interval de valori defectele au dimensiuni suficient de mari pentru ca inspecția nedestructivă să poată conduce la rezultate sigure. La valori foarte coborîte ale tenacității ruperii $\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c} < 0{,}5\right)$ folosirea practică a materialelor este sever limitată de imposibilitatea executării unei inspecții precise a defectelor. Singurul procedeu practic de inspectare, care poate arăta dacă în structură există sau nu un defect de dimensiuni critice, este încercarea de probă. Faptul că în timpul încercării de probă structura nu s-a rupt, nu garantează însă absența defectelor de dimensiuni subcritice, care pot crește în timpul serviciului ca urmare a oboselii sau coroziunii.

5. CONCLUZII

Comportarea ductilă sau fragilă a unei structuri, în condiţiile de lucru date, este determinată de raportul care există între valorile efective ale parametrilor K sau δ şi valorile critice ale acestora. Pentru domeniul solicitărilor elastice mărimile K şi δ sînt echivalente, ele fiind legate prin relaţia $K^2 = E\delta\sigma_c$. Exprimarea lor în funcţie de eforturile unitare aplicate şi de dimensiunile fisurilor se face cu ajutorul unor relaţii de forma (3), ale căror expresii explicite sînt prezentate, pentru cîteva tipuri de piese şi defecte, în tabelul 1.

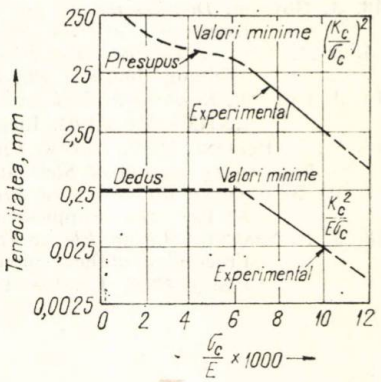


Fig. 2

Cînd condiţiile de solicitare corespund stării plane de deformaţie, factorul critic K_{Ic} este independent de geometria piesei sau a epruvetei, fiind o caracteristică intrinsecă a materialului, care, după determinarea ei în laborator, poate fi folosită în proiectare. Pentru materialele la care valoarea parametrului K_{Ic} nu este cunoscută, o evaluare acceptabilă a acesteia poate fi făcută cu ajutorul figurii 2, în funcţie de limita de curgere [18]. Cele două curbe din figură au fost trasate pentru valorile minime ale rapoartelor $\left(\frac{K_{Ic}}{\sigma_c}\right)^2$ şi $\frac{K_{Ic}^2}{E\sigma_c}$. De asemenea, s-a presupus că pentru rapoarte $\frac{\sigma_c}{E} < 0{,}006$, raportul $\frac{K_{Ic}^2}{E\sigma_c}$ rămîne constant la valoarea $\sigma_c = 0{,}25$ mm.

Primită în redacţie la 28 octombrie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. P. C. Paris, G. C. Sih, *Stress Analysis of Cracks*, Symposium of Fracture Toughness Testing and Its Applications ASTM Special Technical Publication, *381* (1965).
2. G. Frédérick, *Application de la mécanique de la rupture aux aciers de construction metallique*, CNRM-RA 719/69, Liége, 1969.
3. W. E. Brown, J. E. Srawley, *Plane Strain Crack Toughness Testing of High Strength Metallic Materials*, ASTM Special Technical Publication, *410* (1966).
4. * * * *Recomended ASTM practice for plane-strain fracture toughness testing of high strength metallic materials using a fatigue — cracked bend specimen*, BISRA Open Report MG/EB/312/67, London, 1967.
5. G. E. Carpenter, N. R. Knopf, F. S. Byron, *Anomalous Embrittling Effects Observed During Irradiation Studies an Pressure Vessels Steels*, Nuclear Sci. Engr., **19** (1964).
6. M. M. Johnson, A. H. Willmer, *Moisture and Stable Crack Growth in a High Strength Steel*, Applied Materials Research, *4 1* (1965).
7. B. F. Brown, *The application of fracture Mechanics to stress corrosion cracking*, Metallurgical Review, *129* (1966).
8. G. R. Irwin, *Relation of Crack — Toughness Measurenents to Practical Application*, Welding Journal, *41*, Research Supplement (1962).

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1948

9. J. E. SRAWLEY, *The Slow Growth and Rapid Propagation of Cracks*, NRL Report, *5617*, Washington (1961).
10. E. T. WESSEL, L. E. HAYS, *Fracture Characteristics of Some High-Strenght Weldable Structural*, Steels ASME Metals Engineering Conference, 1962.
11. G. R. IRWIN, *Plastic Zone Near a Crack and Fracture Toughness*, Syracuse University Research Institute, Report Me TE *661—611*/F (1960).
12. G. R. IRWIN, A. A. WELLS, *A continuum mechanic view of crack propagation*, Metallurgical Reviews, **10** *38* (1965).
13. J. GOUZOU, *Données récentes sur les mecanismes structuraux mises en jeu dans la rupture fragile de l'acier*, CNRM — MP *22/65*, Liege (1965).
14. A. A. WELLS, *Application of Fracture Mechanics at and beyond General Yielding*, British Welding Journal, **10**, *11*, London (1963).
15. J. GOUZOU, *Le problème de la rupture fragile de l'acier en relation avec la théorie de Wells*, CNRM—MP *53/65*, Liège (1965).
16. W. S. PELLINI, P. P. PUZAK, *Fracture Analysis Diagram Procedure for the Fracture-Safe Engineering Design of Steel Structures*, NRL Report 5920, Washington, 1963.
17. W. S. PELLINI, *Principles of Fracture-Safe Design* — Part I and II, Welding Journal, **50** Research Supplement (1971).
18. J. E. SRAWLEY, *Linear Elastic Fracture Mechanics — A Review of Principles and Method*, Proceedings of the Symposium on Fracture Toughness Concepts for Weldable Steel, Risley 1969, London, Chapman and Hall Ltd, 1969.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 35, nr. 3 iulie—septembrie 1976

SUMAR

STUDII

E. CARAFOLI, H. DUMITRESCU, V. DRĂGOI, Determinarea undei de combustie în curgerea supersonică din jurul profilelor aerodinamice 321

AL. MARINESCU, D. DUMITRESCU, Intrarea optimă ricoşantă în atmosferă, cu minimum de căldură cedată vehiculului 339

ŞTEFAN STAICU, CĂTĂLINA LEFTER, Asupra ciocnirii rigidului în mişcarea generală 351

G. KÜMBETLIAN, Determinarea cîmpurilor de deplasări, momente, forţe tăietoare şi tensiuni, în plăcile groase dreptunghiulare acţionate hidrostatic, cu laturile opuse rezemate şi încastrate 363

ION BELEŞ, Placă ortotropă cu diafragme 387

GHEORGHIU ZAHARIA, Asupra calculului static al barei drepte 399

A. PAVEL, Parametrii funcţionării în regim oscilant a unui recipient cilindric vertical, de mare presiune, cu funcţie de acumulator energetic într-o centrală hidropneumatică. I 417

POLIDOR BRATU, Cercetări privind dinamica cilindrilor compactori vibratori . . . 435

EUGEN PAY, EUGEN NOVAC, ŞTEFAN ŢÎŢ, Consideraţii în legătură cu fizica procesului de aşchiere şi forţa la frezare 447

RECENZII 457

DETERMINAREA UNDEI DE COMBUSTIE ÎN CURGEREA SUPERSONICĂ DIN JURUL PROFILELOR AERODINAMICE

de E. CARAFOLI, H. DUMITRESCU şi V. DRĂGOI
I.M.F.C.A. Bucureşti

În lucrare se propune o metodă de calcul pentru curgerea supersonică din jurul profilelor aerodinamice, în ipoteza că reacţiile chimice de ardere se realizează printr-o suprafaţă de discontinuitate ataşată profilului. Metoda este bazată pe utilizarea une expresii unitare a presiunilor dedusă anterior [2] de primul autor şi a unei metode de echivalenţă [4].
La determinarea curgerii este considerată şi influenţa temperaturii asupra numărului Mach normal al flacării, sînt deduse astfel formule închise pentru determinarea cîmpului de presiuni şi a formei undelor de şoc şi de combustie şi sînt date exemple de calcul.

CONSIDERAŢII INTRODUCTIVE

În anumite condiţii, efectele transformării energiei chimice a unui amestec combustibil gazos în energie termică, în cîmpul unei curgeri supersonice, pot fi evaluate utilizînd modelul simplificat al undei de combustie, adică de adaos de căldură prin discontinuităţi [1]. Se înţelege prin aceasta că este vorba de curgerea unor gaze preamestecate, în care reacţia chimică de ardere, modelată printr-o suprafaţă de discontinuitate, se propagă cu o viteză subsonică.

Într-o lucrare anterioară [4], s-a considerat curgerea supersonică plană perturbată de o undă de compresiune sau de expansiune şi în care se dezvoltă o undă de combustie stabilă.

În lucrarea de faţă se studiază cazul curgerii supersonice plană cu gradient longitudinal de presiune şi cu undă de combustie.Configuraţia curgerii este arătată în figura 1 şi constă dintr-un profil aerodinamic cu o undă de şoc şi de combustie, ambele presupuse ataşate la bordul de atac ascuţit al profilului şi fiind nişte curbe de formă necunoscută. Energia degajată prin ardere în curgerea supersonică va modifica cîmpul de presiuni din jurul profilului, putînd în principiu să dea naştere şi la forţe propulsive suplimentare importante, în anumite condiţii. Prin urmare, în principal, ne interesează determinarea cîmpului curgerii în prezenţa unei unde de combustie şi nu descrierea structurii zonelor de reacţie chimică intensă. Astfel, în lucrare se propune o metodă care să permită determinarea cîmpului de presiuni şi a formei undelor de şoc şi de combustie în curgerea supersonică plană din jurul profilelor aerodinamice.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 3, 1976, P. 321–338

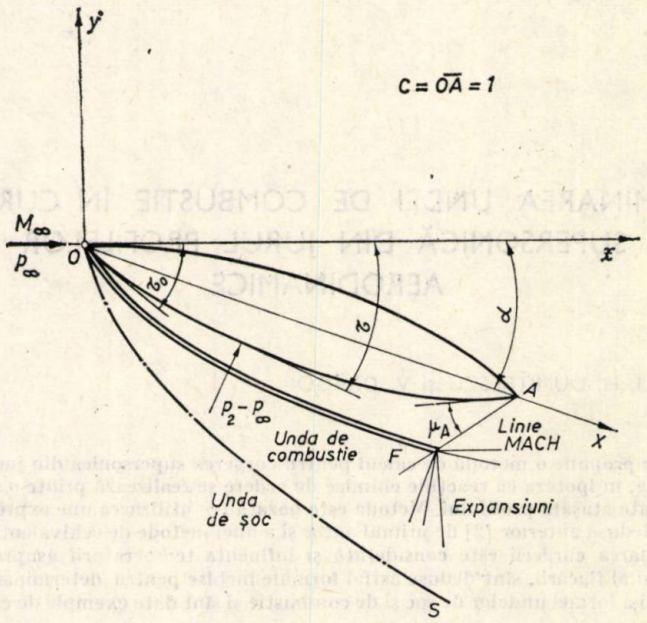


Fig. 1

Metoda se bazează pe o expresie a coeficientului de presiune C_p, dedusă din ecuațiile undelor de șoc oblice și valabilă atît pentru compresiune, în spatele undei de șoc, cît și pentru expansiune [2]:

$$C_p = \frac{\gamma+1}{2}\frac{K}{M_\infty^2} + \frac{2K}{M_\infty^2}\sqrt{1+\left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 K^2}, \tag{1}$$

în care

$$C_p = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{p_1}{p_\infty} - 1\right) \tag{2}$$

este coeficientul de presiune, γ este raportul căldurilor specifice, care, pentru simplificarea calculelor, se consideră constant, M_∞ este numărul Mach al curentului neperturbat, iar K reprezintă parametrul unitar de similaritate a cărui expresie este

$$K = \frac{M_\infty^2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\sin\tau, \tag{3}$$

τ fiind deviația curentului (fig. 1).

Formula (1) este valabilă atît pentru compresiune ($\tau > 0$), cît și pentru expansiune ($\tau < 0$), pe un larg interval de deviație și numere Mach [2], fiind în perfect acord și cu metoda caracteristicilor.

Pentru determinarea curgerii s-a introdus de asemenea și dependența numărului Mach al flăcării, m, de temperatură printr-o relație de forma [6]

$$m = \frac{A}{\sqrt{\gamma R}} T^{3/2}, \tag{4}$$

în care A este o constantă ce depinde de natura amestecului reactant și R este constanta gazelor. Cu această expresie ecuația de conservare a energiei la traversarea undei de combustie devine:

$$(\gamma + 1)(\lambda - 1) = \left(\frac{1}{m^2} - 1\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} - 1\right)^2 - q_0 m^{-8/3}}, \tag{5}$$

în care

$$q_0 = 2(\gamma^2 - 1)\frac{Q}{a_\infty^2} m_\infty^{2/3},$$

λ este inversul raportului densităților față de flacără, Q este energia degajată prin combustie de unitatea de masă de amestec gazos, iar a_∞, m_∞ sînt, respectiv, viteza sunetului și numărul Mach de propagare al flacării în condițiile curgerii neperturbate.

Metoda de calcul propusă în lucrarea de față este valabilă în cadrul următoarelor ipoteze:

— undele de șoc și de combustie rămîn tot timpul atașate la bordul de atac ascuțit al profilului, curgerea este supersonică după fiecare undă, efectele undelor de șoc reflectate se neglijează, se neglijează, de asemenea, mișcarea rotațională care are loc în spatele undelor de șoc și de combustie datorită curburii mari a profilului undei de șoc, precum și variația raporturilor căldurilor specifice, γ, prin ardere.

DETERMINAREA PRESIUNILOR

Să considerăm un profil de formă oarecare, așezat la o incidență α într-un curent de gaze preamestecate, în ipoteza că amestecul se aprinde brusc chiar la bordul de atac al profilului, în 0. Curentul reactant neperturbat, plan, este definit prin numărul Mach M_∞. Vom studia ce se petrece pe intrados, considerațiile pentru cazul cînd această configurație ar apare și pe extrados fiind similare.

După comprimare la trecerea prin unda de șoc OS, curentul suferă o expansiune și un salt prin traversarea undei de combustie, astfel încît, într-un punct P_2 de pe profil (fig. 2), viteza este W_2, iar numărul Mach, M_2.

Pe o linie caracteristică P_2P_2', care face cu tangenta la profil unghiul $\mu_2(\sin\mu_2 = 1/M_2)$, parametrii curgerii calde (indice 2) rămîn neschimbați pînă în punctul P_2' (pe suprafața caldă a undei de combustie). În dreptul undei de combustie variabilele curgerii au un salt, astfel că în punctul

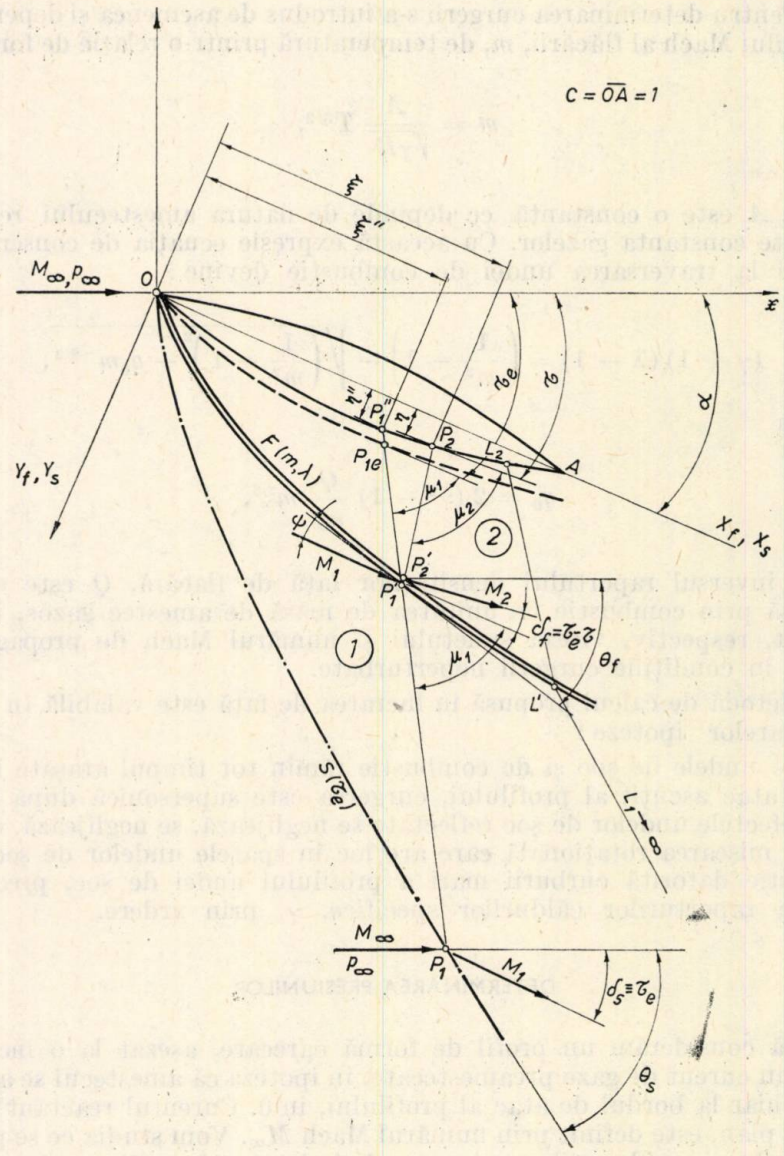


Fig. 2

P_1' (pe suprafața rece a undei de combustie) viteza este W_1, iar numărul Mach este M_1. După acest salt, parametrii curentului se conservă mai departe în cîmpul curgerii reci (indice 1) pe o altă linie caracteristică $P_1'P_1$. Aceasta o vom numi linie caracteristică echivalentă, și ea face unghiul μ_1 ($\sin\mu_1 = 1/M_1$) cu tangenta la un alt profil, numit profil echivalent, determinat în ipoteza că după unda de combustie curgerea ar continua fără să fie influențată de energia degajată prin ardere.

Valorile variabilelor corespunzătoare celor două regiuni, rece (1) și caldă (2), în care este împărțit cîmpul curgerii de unda de combustie sînt distinse, respectiv, prin indicii 1 și 2.

Curgerea în jurul profilului va fi determinată dacă vom reuși să scriem ecuațiile liniilor caracteristice, precum și ale undelor de șoc *OS*, și de combustie *OF*.

În continuare, calculul implică următoarele etape:

a) Determinarea parametrilor curgerii imediat după unda de șoc și după unda de combustie în punctul 0 de pe profil.

Pentru aceasta, mai întîi se calculează unghiul τ_{e_0} de la bordul de atac al profilului echivalent prin rezolvarea numerică a ecuației transcendente

$$\operatorname{tg}(\tau_{e_0} - \tau_0) = \frac{m_0(\lambda_0 - 1)\sqrt{M_{10}^2 - m_0^2}}{M_{10}^2 + (\lambda_0 - 1)m_0^2}, \tag{6}$$

dedusă din teoria undelor de combustie [1].

În relația (5) mărimile M_{10}, p_{10}, m_0 și $\lambda_0 = \rho_{10}/\rho_{20}$ sînt parametrii curentului rece imediat după unda de șoc în punctul 0 de pe profil, care pot fi exprimați în funcție de deviația profilului echivalent, τ_{e_0} :

$$M_{10}^2 = M_\infty^2 \frac{1 + \frac{\gamma+1}{4} M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)} - C_{p_e}^{(0)}\left(1 + \frac{\gamma}{4} M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)}\right)}{\left(1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)}\right) \cdot \left(1 + \frac{\gamma-1}{4} M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)}\right)}, \tag{7}$$

$$m_0 = m_\infty \left[\left(1 + \frac{\gamma}{2} M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)}\right) \cdot \frac{1 + \frac{\gamma-1}{4} M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)}}{1 + \frac{\gamma+1}{4} M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)}}\right]^{3/2}, \tag{8}$$

$$\lambda_0 = 1 + \frac{1}{(\gamma+1)m_0^2}\left[1 - m_0^2 - \sqrt{(1-m_0^2)^2 - q_0 m_0^{4/3}}\right], \tag{9}$$

iar

$$C_{p_e}^{(0)} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{p_{10}}{p_\infty} - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}}\sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 \frac{M_\infty^4}{M_\infty^2 - 1}\sin^2\tau_{e_0}} \cdot \sin\tau_{e_0} + \frac{\gamma+1}{2}\frac{M_\infty^2}{M_\infty^2 - 1}\sin^2\tau_{e_0}, \tag{10}$$

relație dedusă din teoria undelor de șoc [2].

Pentru valorile M_∞, m_∞, q_0 și τ_0 date, se găsește din ecuația

(6) deviaţia echivalentă τ_{e_0}, cu care apoi se determină variabilele curentului rece p_{10}, ρ_{10}, T_{10}, a_{10}, M_{10} şi panta undei de şoc

$$\sin^2 \theta_{S0} = \frac{1}{M_\infty^2}\left(1 + \frac{\gamma+1}{4} M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)}\right). \tag{11}$$

După aceea se determină variabilele curentului cald cu ajutorul relaţiilor cunoscute din teoria undelor de combustie [1]:

$$M_{20}^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 \mu_0 = M_{10}^2 \frac{1 + \frac{m_0^2}{M_{10}^2}(\lambda_0^2 - 1)}{\lambda_0[1 - (\lambda_0 - 1)\gamma m_0^2]}, \tag{12}$$

$$p_{20} = p_{10}[1 - (\lambda_0 - 1)\gamma m_0^2], \tag{13}$$

$$\rho_{20} = \rho_{10}/\lambda_0, \tag{14}$$

şi tot din aceeaşi teorie avem panta undei de combustie,

$$\theta_{f_0} = \tau_{e_0} + \operatorname{arc\,tg} \frac{m_0}{\sqrt{M_{10}^2 - m_0^2}}. \tag{15}$$

Se poate calcula acum coeficientul de presiune după unda de combustie cu formula

$$C_p^{(0)} = \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left(\frac{p_{20}}{p_\infty} - 1\right) =$$

$$= \frac{2}{\gamma M_\infty^2}\left[\left(1 + \frac{\gamma M_\infty^2}{2} C_{p_e}^{(0)}\right) \cdot (1 - (\lambda_0 - 1)\gamma m_0^2) - 1\right] \tag{16}$$

b) Determinarea parametrilor curgerii într-un punct oarecare pe profil se face calculînd mai întîi tot deviaţia profilului echivalent τ_e din ecuaţia

$$\operatorname{tg}(\tau_e - \tau) = \frac{m(\lambda - 1)\sqrt{M_1^2 - m^2}}{M_1^2 + (\lambda - 1)m^2}, \tag{17}$$

în condiţiile dezvoltării undei de combustie într-un cîmp de expansiune a curgerii cu unghiul $(\tau_{e_0} - \tau_e)$, plecînd de la numărul Mach M_{10}.

Coeficientul de presiune C_{p_e} în urma acestei expansiuni, în punctul P_{1e}, corespunzător punctului P_2 de pe profil, este

$$C_{p_e} = \frac{2}{\sqrt{M_{10}^2 - 1}} \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma+1}{4}\right)^2 \frac{M_{10}^4}{M_{10}^2 - 1} \sin^2(\tau_e - \tau_{e_0}) \cdot \sin(\tau_e - \tau_{e_0}) +}$$

$$+ \frac{\gamma+1}{2} \frac{M_{10}^2}{M_{10}^2 - 1} \sin^2(\tau_e - \tau_{e_0}). \tag{18}$$

Se poate calcula acum coeficientul de presiune raportat la M_∞

$$C_{p_e}^{(\infty)} = C_{p_e}^{(0)} + \left(\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma}{2} C_{p_e}^{(0)}\right) M_{10}^2 C_{p_e}, \tag{19}$$

numărul Mach M_1 al curentului în același punct

$$M_1^2 = \left(\frac{2}{\gamma - 1} + M_{10}^2\right)\left(1 + \frac{\gamma}{2} M_{10}^2 C_{p_e}\right)^{-\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{2}{\gamma - 1}, \tag{20}$$

și numărul Mach de propagare a flăcării

$$m = m_0 \left(1 + \frac{\gamma}{2} M_{10}^2 C_{p_e}\right)^{\frac{3(\gamma-1)}{2\gamma}}. \tag{21}$$

În continuare calculul, se desfășoară analog ca pentru punctul 0, iar coeficientul de presiune C_p se calculează tot cu formula (16), în care însă de data aceasta intervin $C_{p_e}^{(\infty)}$, m și λ.

STABILIREA CURBELOR UNDEI DE COMBUSTIE ȘI UNDEI DE ȘOC

Pentru construirea curbelor undei de combustie și undei de șoc vom utiliza metoda dată într-o lucrare anteriară pentru undele de șoc [5].

Fie ξ și η (fig. 2) coordonatele unui punct P_2 de pe contur și X_f, Y_f coordonatele punctului dublu $P'(P_1'$ și $P_2')$, în care caracteristica dusă din punctul P intersectează unda de combustie. Ecuația undei de combustie va rezulta atunci din condiția ca, după saltul în punctul P'corespunzător parametrilor m și λ, curgerea rece M_1 să realizeze parametrii din punctul P_2 de pe profil, adică trebuie să fie satisfăcute relațiile:

$$Y_f - \eta = (X_f - \xi)\,\mathrm{tg}\,(\mu_2 + \tau - \alpha), \tag{22a}$$

$$\frac{dY_f}{dX_f} = \mathrm{tg}\,(\theta_f - \alpha), \tag{22b}$$

$$\theta_f = \tau_e + \mathrm{arc\,tg}\,\frac{m}{\sqrt{M_1^2 - m^2}}. \tag{22c}$$

Relația (22a) reprezintă ecuația caracteristicii P_2P', relația (22b) este ecuația de definiție a pantei undei de combustie, iar relația (22c) exprimă legătura între unghiul undei de combustie, unghiul profilului echivalent τ_e, a cărui valoare se obține din ecuația (17) și unghiul ψ cu

care curentul rece M_1 atacă unda de combustie (fig. 2), avînd valoarea dată de relaţia

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{m}{\sqrt{M_1^2 - m^2}}. \tag{23}$$

În aceste condiţii, pentru un contur cunoscut, aşezat într-un curent avînd numărul Mach, M_∞, şi incidenţa α date, se poate determina ecuaţia undei de combustie.

Dacă $\eta = \eta(\xi)$ este ecuaţia conturului, atunci, pentru orice ξ, se poate găsi valoarea deviaţiei τ şi apoi valorile parametrilor τ_e (ecuaţia (17)), μ_2 (relaţia 12) şi θ_f (relaţia 22c), din ecuaţiile (22a) şi (22b) rezultînd apoi valorile coordonatelor X_f şi Y_f ale punctului P' de pe unda de combustie.

Eliminînd Y_f din ecuaţiile (22a) şi (22b), se obţine:

$$X_f \operatorname{tg}(\mu_2 + \tau - \alpha) - \int_0^\xi \frac{\mathrm{d}X_f}{\mathrm{d}\xi'} \operatorname{tg}(\theta_f - \alpha)\, \mathrm{d}\xi' =$$

$$= \xi \operatorname{tg}(\mu_2 + \tau - \alpha) - \eta, \tag{24}$$

unde s-a ţinut seama că unda de combustie este ataşată de vîrful ascuţit 0 al profilului ($\xi = 0$, $\eta = 0$, $X_f = 0$). Cunoscînd $X_f = X_f(\xi)$ dat de ecuaţia (24), Y_f se poate calcula direct din (22a). Problema revine deci la găsirea lui X_f. În acest scop se observă că, profilul fiind considerat de formă regulată, cu vîrful ascuţit, ecuaţia conturului şi funcţiile $\operatorname{tg}(\theta_f - \alpha)$ şi $\operatorname{tg}(\mu_2 + \tau - \alpha)$, care intervin în ecuaţiile (22) şi (24), pot fi reprezentate prin funcţii polinomiale de grade oarecare, g, h şi l:

$$\eta = \sum_{i=0}^{g} a_i \xi^i \qquad (a_0 = 0),$$

$$\operatorname{tg}(\mu_2 + \tau - \alpha) = \sum_{i=0}^{h} b_i \xi^i, \tag{25}$$

$$\operatorname{tg}(\theta_f - \alpha) = \sum_{i=0}^{1} c_i \xi^i.$$

Întrucît orice polinom poate fi considerat ca un polinom de grad mai mare avînd însă o parte din coeficienţi nuli, se poate lua întotdeauna în dezvoltările (25):

$$g = h = l = k,$$

k fiind cel mai mare dintre numerele întregi g, h, l.

Coordonata X_f a unui punct de pe unda de combustie o vom reprezenta atunci prin seria de puteri:

$$X_f = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \xi^n, \tag{26}$$

în care s-a inclus condiția de atașare la vîrful 0 ($F_0 = 0$). Coeficienții F_n se determină din condiția ca dezvoltarea (26) să verifice identic ecuația (24).

Introducînd expresiile (25) și (26) în ecuația (24) și identificînd termenii în ξ^n se obține

$$(b_0 - c_0) F_n = \sum_{i=1}^{k} \left[\left(1 - \frac{i}{n}\right) c_i - b_i \right] F_{n-i} + \sum_{i=0}^{k} (\delta_{i+1.n} b_i - \delta_{i.n} a_i)$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots), \tag{27}$$

în care $\delta_{i.n}$ este simbolul lui Kronecker:

$$\delta_{i.n} = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = n, \\ 0 \text{ pentru } i \neq n, \end{cases}$$

iar $(k + 1)$ numărul de termeni ai polinoamelor (25). La efectuarea sumelor după indicele i se are în vedere că

$$F_{n-i} = 0, \quad \text{pentru } n - i \leqslant 0.$$

Acum, coeficienții F_n rezultă succesiv din sistemul (27).

Pentru determinarea curbei undei de șoc vom considera punctul P_1 de coordonate X_s, Y_s în care caracteristica echivalentă dusă din punctul P' intersectează unda de șoc (fig. 2).

Ecuația undei de șoc va rezulta atunci din condiția ca, după saltul în punctul P_1, corespunzător unghiului θ_s, curgerea M_∞ să realizeze parametrii din punctul P_1' de pe unda de combustie, adică trebuie să fie satisfăcute relațiile:

$$Y_s - Y_f = (X_s - X_f) \operatorname{tg}(\mu_1 + \tau_e - \alpha), \tag{28a}$$

$$\frac{dY_s}{dX_s} = \operatorname{tg}(\theta_s - \alpha), \tag{28b}$$

$$\sin^2\theta_s = \frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma + 1}{4} C_{p_e}^{(\infty)} =$$

$$= \sin^2 \theta_{s0} + \frac{\gamma + 1}{4} \left(\frac{1}{M_\infty^2} + \frac{\gamma}{2} C_{p_e}^{(0)} \right) M_{10}^2 C_{p_e}. \tag{28c}$$

Relația (28a) reprezintă ecuația caracteristicii echivalente $P'P_1$, relația (28b) este ecuația de definiție a pantei undei de șoc, iar relația (28c) exprimă legătura între unghiul undei de șoc și coeficientul de presiune $C_{p_e}^{(\infty)}$ după salt, a cărei valoare este dată de (18).

De îndată ce s-a găsit conturul undei de combustie se poate integra sistemul (28) și construi astfel curba undei de șoc utilizînd aceeași metodă a dezvoltărilor în serie de puteri.

În unele cazuri (profilul parabolic) este convenabil să se utilizeze, pentru scrierea ecuației caracteristice echivalente, în locul punctului P_1' punctul P_1'' de coordonate ξ'', η'', în care caracteristica echivalentă intersectează profilul. Astfel, în locul ecuației (28a) vom avea ecuația

$$Y_s - \eta'' = (X_s - \xi'')\operatorname{tg}(\mu_1 + \tau_e - \alpha). \tag{29}$$

Coordonatele punctului P_1'' se găsesc prin rezolvarea sistemului:

$$\eta'' - Y_f = (\xi'' - X_f)\operatorname{tg}(\mu_1 + \tau_e - \alpha), \tag{30a}$$

$$\eta'' = \eta(\xi''). \tag{30b}$$

Se observă că este posibil ca pentru un anumit punct L_2 de pe profil panta caracteristicei echivalente să devină egală cu panta undei de șoc:

$$\operatorname{tg}(\theta_s - \alpha) = \operatorname{tg}(\mu_1 + \tau_e - \alpha), \ (\xi = \xi_L). \tag{31}$$

Unda de șoc și caracteristica echivalentă corespunzătoare punctului L_2 nu se mai intersectează (X_s, $Y_s \to \infty$ pentru $\xi = \xi_L$) și, prin urmare, dezvoltarea (26) este convergentă pentru $\xi < \xi_L$.

Din punct de vedere fizic rezultă că, în punctul L' de pe unda de combustie curgerea a revenit la presiunea p_∞ în timp ce unda de șoc OS s-a transformat pe ultima porțiune într-o linie Mach paralelă cu caracteristica echivalentă din punctul L'.

Pentru $p_1 = p_\infty (C_{p_e}^{(\infty)} = 0)$ din relațiile (19) și (28c) rezultă

$$M_{10}^2 C_{p_e} = -\frac{1}{\frac{\gamma}{2} + \frac{1}{M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)}}}; \quad \sin\theta_s = \frac{1}{M_\infty}; \quad \xi = \xi_L. \tag{32}$$

Apoi, din (18) și (32) avem

$$\sin(\tau_{e_0} - \tau_{e_L}) = \frac{1}{\frac{M_{10}^2}{\sqrt{M_{10}^2 - 1}} \sqrt{\frac{\gamma(\gamma-1)}{2} + \frac{3\gamma - 1}{M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)}} + \left(\frac{2}{M_\infty^2 C_{p_e}^{(0)}}\right)^2}}, \tag{33}$$

iar din (17), (20), (21) și (32) se găsește deviația τ_L

$$\operatorname{tg}(\tau_{e_L} - \tau_L) = \frac{m_L(\lambda_L - 1)\sqrt{M_{1L}^2 - m_L^2}}{M_{1L}^2 + (\lambda_L - 1)m_L^2} \tag{34}$$

în care

$$m_L = \frac{m_0}{\left(1 + \frac{\gamma M_\infty^2}{2} C_{p_e}^{(0)}\right)^{\frac{3(\gamma-1)}{2\gamma}}}, \tag{35}$$

$$M_{1L}^2 = \left(\frac{2}{\gamma - 1} + M_{10}^2\right) \cdot \left(1 + \frac{\gamma M_\infty^2}{2} C_{p_e}^{(0)}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - \frac{2}{\gamma - 1}. \tag{36}$$

Cunoscînd deviația τ_L a curentului în punctul L_2, dată de (34), se deduce ușor din ecuația conturului, ξ_L, care este totodată raza de convergență a dezvoltării abscisei undei de șoc X_s. În orice punct $\xi < \xi_L$ această dezvoltare converge ca seria geometrică avînd rația $q = \xi/\xi_L < 1$ [5].

Pentru unda de combustie nu există o astfel de limitare, dezvoltarea (26) fiind convergentă pentru $\xi \leqslant 1$.

Restricția care apare în acest caz este dictată de faptul că nu se mai obține nici un avantaj din punct de vedere aerodinamic (reducerea rezistenței sau creșterea portanței) dacă se continuă unda de combustie după punctul de intersecție cu caracterististica negativă care trece prin bordul de fugă al profilului.

METODĂ PRACTICĂ DE CALCUL

Pentru o gamă largă de aplicații se poate considera suficient de exact dacă dezvoltările (25)se limitează la primii cinci termeni :

$$\eta - a_0 = a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + a_4\xi^4 \qquad (a_0 = 0), \tag{37a}$$

$$\operatorname{tg}(\theta_f - \alpha) - c_0 = c_1\xi + c_2\xi^2 + c_3\xi^3 + c_4\xi^4 \qquad (c_0 = \operatorname{tg}(\theta_{f_0} - \alpha)), \tag{37b}$$

$$\operatorname{tg}(\mu_2 + \tau - \alpha) - b_0 = b_1\xi + b_2\xi^2 + b_3\xi^3 + b_4\xi^4 \quad (b_0 = \operatorname{tg}(\mu_{20} + \tau_0 - \alpha)). \tag{37c}$$

Această limitare se justifică prin faptul că profilele nu au forme prea complicate, iar curbura undei de șoc și de combustie nu variază rapid, expansiunea curentului avînd loc pe un interval redus de deviație.

Fie $\xi_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ abscisele a patru puncte de pe profil, în care ecuațiile (37b), (37c) trebuie să fie verificate. Coeficienții b_i, c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ rezultă imediat rezolvînd sistemele liniare de patru ecuații cu patru necunoscute obținute. Se găsește :

$$b_1 = \sum \frac{B_1\xi_2\xi_3\xi_4}{\xi_1(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_1)}; \quad b_2 = -\sum \frac{B_2(\xi_2\xi_3 + \xi_2\xi_4 + \xi_3\xi_4)}{\xi_1(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_1)},$$

$$b_3 = \sum \frac{B_3(\xi_2 + \xi_3 + \xi_4)}{\xi_1(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_1)}; \quad b_4 = -\sum \frac{B_4}{\xi_1(\xi_2 - \xi_1)(\xi_3 - \xi_1)(\xi_4 - \xi_1)}, \tag{38}$$

$$B_i = \operatorname{tg}(\mu_{2i} + \tau_i - \alpha) - b_0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

În aceste relaţii însumările Σ se fac pentru toate permutările circulare ale indicilor (1, 2, 3,4).

Aceleaşi relaţii (38) se folosesc şi pentru calculul coeficienţilor c_i, valorile B_i fiind înlocuite cu valorile

$$C_i = \operatorname{tg}(\theta_{f_i} - \alpha) - c_0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4). \tag{39}$$

Apoi coeficienţii F_n rezultă din (27) în care facem $k = 4$

$$(b_0 - c_0) F_n = \sum_{i=1}^{4} \left[\left(1 - \frac{i}{n}\right) c_i - b_i \right] F_{n-i} + \sum_{i=0}^{4} (\delta_{i+1,n} b_i - \delta_{i,n} a_i)$$

$$(n = 1, 2, 3, 4, \ldots). \tag{40}$$

Înmulţind relaţia (40) cu ξ^n şi efectuînd suma $\sum_{n=1}^{\infty}$, rezultă

$$X_f \sum_{i=0}^{4} (b_i - c_i)\xi^i = \sum_{i=0}^{4} b_i \xi^{i+1} - \eta - \sum_{n=1}^{6} \frac{c_1 F_n}{n+1} \xi^{n+1} - \sum_{n=1}^{4} \frac{2c_2 F_n}{n+2} \xi^{n+2} -$$

$$- \sum_{n=1}^{3} \frac{3c_3 F_n}{n+3} \xi^{n+3} - \frac{4}{5} c_4 F_1 \xi^5 + R(\xi), \tag{41}$$

în care, pentru $X_f \leqslant 1$, adică practic pentru porţiunea undei de combustie care interesează, s-a neglijat restul

$$R(\xi) = -\sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{c_1 \xi}{n+1} + \frac{2c_2}{n} \frac{F_{n-2}}{F_n} + \frac{3c_3}{n} \frac{F_{n-3}}{F_n} + \frac{4c_4}{\xi(n-1)} \frac{F_{n-5}}{F_n} \right) F_n \xi^n. \tag{42}$$

Unda de combustie fiind apropiată de profil, pentru determinarea coeficienţilor a_i, b_i, c_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, care intră în expresiile (37), se pot alege punctele $\xi_1 = 0{,}2$; $\xi_2 = 0{,}4$; $\xi_3 = 0{,}6$; $\xi_4 = 0{,}8$. Cunoscînd X_f dat de (41) rezultă imediat Y_f din (22a)

$$Y_f = \eta + (X_f - \xi) \sum_{i=0}^{4} b_i \xi^i. \tag{43}$$

Ecuaţiile (41) şi (43) reprezintă ecuaţiile parametrice ale undei de combustie ; cînd parametrul ξ variază de la $\xi = 0$ la $\xi = 0{,}8$, punctul $P'(X_f, Y_f)$ descrie unda de combustie.

În continuare, utilizînd curba găsită pentru unda de combustie, se determină curba undei de şoc. Întrucît curba undei de combustie este

obținută sub formă parametrică, pentru simplificare se va folosi o dezvoltare a acesteia similară cu (37a) :

$$Y_f - a'_0 = a'_1 X_f + a'_2 X_f^2 + a'_3 X_f^3 + a'_4 X_f^4 \qquad (a'_0 = 0), \tag{44}$$

care se justifică mai ales prin faptul că în determinarea curbei undei de șoc intervine numai porțiunea anterioară a undei de combustie.

La fel, pentru funcțiile $\operatorname{tg}(\theta_s - \alpha)$ și $\operatorname{tg}(\mu_1 + \tau_e - \alpha)$ se iau dezvoltări în cinci termeni :

$$\operatorname{tg}(\theta_s - \alpha) - c'_0 = c'_1 X_f + c'_2 X_f^2 + c'_3 X_f^3 + c'_4 X_f^4 \quad (c'_0 = \operatorname{tg}(\theta_{s0} - \alpha)), \tag{45a}$$

$$\operatorname{tg}(\mu_1 + \tau_e - \alpha) - b'_0 = b'_1 X_f + b'_2 X_f^2 + b'_3 X_f^3 + b'_4 X_f^4$$

$$(b'_0 = \operatorname{tg}(\mu_{10} + \tau_{e_0} - \alpha)). \tag{45b}$$

Coeficienții a'_i, b'_i, c'_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ se obțin tot cu ajutorul relațiilor (38) în care punctele ξ_i se înlocuiesc cu punctele X_{fi} $(i = 1, 2, 3, 4)$, iar coeficienții A'_i, B'_i, și C'_i sînt dați de relațiile :

$$\begin{aligned} A'_i &= Y_{fi}, \\ B'_i &= \operatorname{tg}(\mu_{1i} + \tau_{e_i} - \alpha) - b'_0, \\ C'_i &= tg(\theta_{si} - \alpha) - c'_0, \\ (i &= 1, 2, 3, 4). \end{aligned} \tag{46}$$

Dezvoltarea (26) în cazul undei de șoc se scrie :

$$X_s = \sum_{n=1}^{\infty} S_n X_f^n, \tag{47}$$

coeficienții S_n rezultînd dintr-o relație similară cu (40).

Apoi se obțin ecuațiile parametrice ale undei de șoc

$$X_s \sum_{i=0}^{4} (b'_i - c'_i) X_f^i = \sum_{i=0}^{4} b'_i X_f^{i+1} - Y_f - \sum_{n=1}^{6} \frac{c'_1 S_n}{n+1} X_f^{n+1} -$$

$$- \sum_{n=1}^{4} \frac{2c'_2 S_n}{n+2} X_f^{n+2} - \sum_{n=1}^{3} \frac{3c'_3 S_n}{n+3} X_f^{n+3} - \frac{4}{5} c'_4 S_1 X_f^5 + R(X_f), \tag{48a}$$

$$Y_s = Y_f + (X_s - X_f) \sum_{i=0}^{4} b'_i X_f^i, \tag{48b}$$

în care, pentru $X_s \leqslant 2$, s-a neglijat restul:

$$R(X_f) = -\sum_{n=7}^{\infty}\left(\frac{c_1' X_f}{n+1} + \frac{2c_2'}{n}\frac{S_{n-2}}{S_n} + \frac{3c_3'}{n}\frac{S_{n-3}}{S_n} + \frac{4c_4'}{X_f(n-1)}\frac{S_{n-5}}{S_n}\right) S_n X_f^n. \tag{49}$$

S-a găsit că atunci cînd X_s variază de la $X_s = 0$ la $X_s = 2$, adică cînd se parcurge porţiunea undei de şoc care interesează practic, avem $0 \leqslant X_f(\xi) \leqslant X_f(0, 6\xi_L)$.

În consecinţă, pentru determinarea coeficienţilor a_i', b_i', c_i' ($i = 1,2, 3, 4$) din expresiile (44) şi (45) se pot alege punctele X_{fi} corespunzătoare poziţiilor $\xi_1 = 0,15\xi_L$; $\xi_2 = 0,30\xi_L$; $\xi_3 = 0,45\xi_L$; $\xi_4 = 0,60\xi_L$.

Pentru evaluarea restului $R(X_f)$ s-a folosit ipoteza că, pentru $n \to \infty$ seria $\sum_{n=1}^{\infty} S_n X_f^n$ converge ca progresia geometrică de raţie $q = X_f/X_{fL}$, X_{fL} corespunzînd punctului $L_2(\xi_L)$ de pe profil [5]. Astfel se obţine expresia

$$R(X_f) = -\left(c_1' X_f + 2c_2' X_{fL}^2 + 3c_3' X_{fL}^3 + 4c_4' \frac{X_{fL}^5}{X_f}\right) \times$$

$$\times \left[\ln \frac{1}{1 - X_f/X_{fL}} - \sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n}\left(\frac{X_f}{X_{fL}}\right)^n\right], \tag{50}$$

cu care se pot calcula apoi erorile

$$\varepsilon_x = \frac{|R(X_f)|}{X_s \sum_{i=0}^{4} (b_i' - c_i') X_f^i}; \qquad \varepsilon_y = \frac{X_s \varepsilon_x}{Y_s} \sum_{i=0}^{4} b_i' X_f^i. \tag{51}$$

APLICAŢIE LA UN PROFIL DUBLU PARABOLIC SIMETRIC

Se consideră un profil dublu parabolic simetric, avînd grosimea maximă relativă ε, coarda $\overline{OA} = C = 1$ şi incidenţa $\alpha = 0$.

Ecuaţia intradosului profilului este

$$\eta = 2\varepsilon\xi(1 - \xi). \tag{52}$$

Rezultă

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 2\varepsilon, \quad a_2 = -2\varepsilon, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = 0. \tag{53}$$

Calculele au fost efectuate pentru un profil dublu parabolic simetric avînd $\varepsilon = 0$, 10, aşezat într-un curent cu $M_\infty = 2$, $m_\infty = 0,1$ şi compoziţii diferite: $q_0 = 0,01$; $0,25$: $0,50$; $0,75$; $1,0$.

Pentru determinarea curbei undei de șoc în locul ecuației (28a) s-a utilizat ecuația (29), sistemul (30) fiind simplu de rezolvat.

Tabela 1

q_0	ξ_L	ξ	X_f	Y_f	X_s	$\varepsilon_x^{\%}$	Y_s	$\varepsilon_y^{\%}$
0,01	0,517	0,25	0,2811	0,0637	2,323	0,007	1,74	0,013
0,25	0,548	0,247	0,279	0,0689	1,892	0,234	1,468	0,394
0,50	0,580	0,261	0,295	0,0785	1,833	0,049	1,464	0,083
0,75	0,610	0,275	0,311	0,089	1,726	0,233	1,4198	0,390
1,00	0,638	0,287	0,322	0,0988	1,626	0,072	1,381	0,119

Din tabela 1 se constată că $R(\xi'')$ poate fi neglijat în calcul pentru $X_s \leqslant 2$ fără ca erorile să depășească 1 %.

În figurile 3, 4, 5 sînt prezentate rezultatele obținute pentru același profil pe baza metodei propuse, referitoare la coeficientul de presiune pe profil și unda de șoc, pentru diferite compoziții ale amestecului combustibil. Se constată o creștere substanțială a coeficientului de presiune și o deplasare spre bordul de fugă a punctului în care se anulează acesta, față de cazul în care nu există flacără.

În figurile 6 și 7 sînt date rezultatele în ceea ce privește forma undei de combustie și forma undei de șoc. Se observă că unda de combustie urmărește conturul profilului, pe cînd unda de șoc este determinată de porțiunea anterioară a profilului, pentru $X_s \geqslant 1{,}5\ \overline{OA}$ devenind aproape o linie dreaptă.

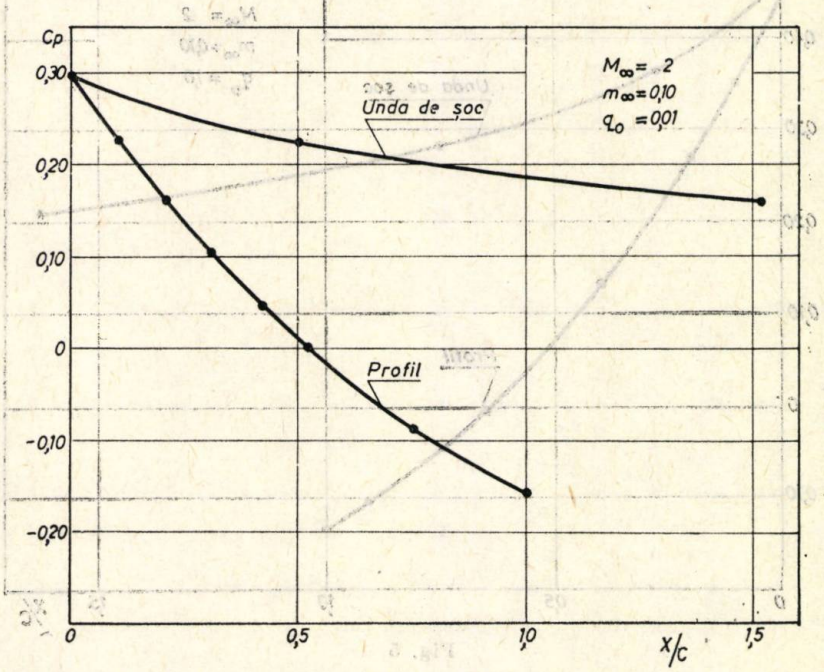


Fig. 3

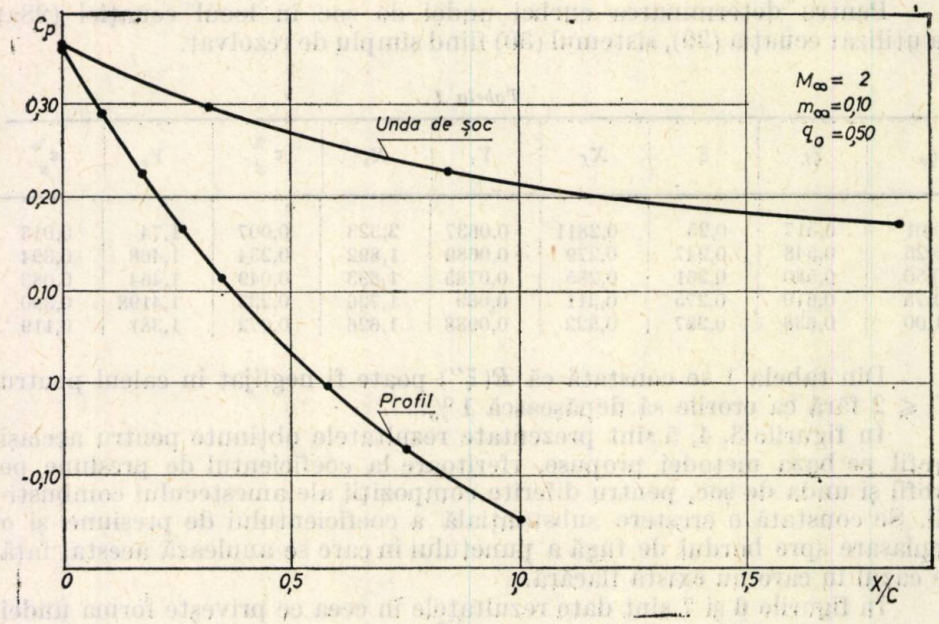

Cp
0,30
0,20
0,10
0
-0,10
0
0,5
1,0
1,5
X/C
Unda de şoc
Profil
M∞ = 2
m∞ = 0,10
q0 = 0,50

Fig. 4

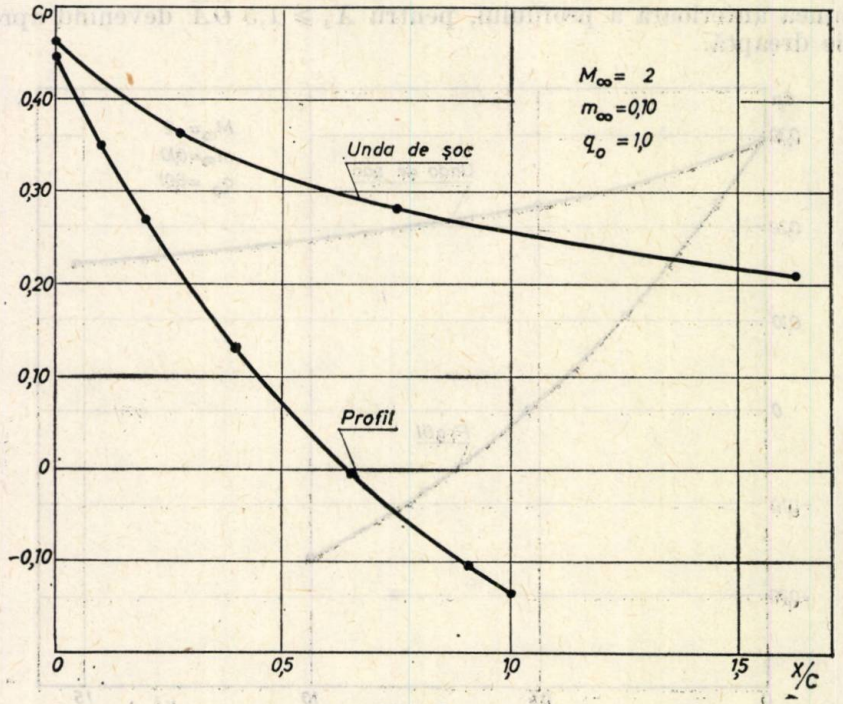

Cp
0,40
0,30
0,20
0,10
0
-0,10
0
0,5
1,0
1,5
X/C
Unda de şoc
Profil
M∞ = 2
m∞ = 0,10
q0 = 1,0

Fig. 5

Se poate trage concluzia că pe baza expresiei (1) se poate determina întregul cîmp de presiuni şi se pot găsi formule analitice simple pentru curbele undelor de şoc şi de combustie, în cazul acestei probleme complexe de dinamica gazelor.

Primită la redacţie la 19 ianuarie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. J. F. Clarke, *Some remarks on the treatment of fully supersonic flammes as gasodynamical discontinuities*, College of Aeronautics, CoA Report Aero, 179 (1965).
2. E. Carafoli, *On a unitary formula for compression-expansion in supersonic-hypersonic flow*, Rev. Roum. Sci. Tech.-Méc. Appl., **7**, 5(1962).
3. R. Foster, J. E. Clarke, *Supersonic fow past a wedge with a flame its apex*, Aeronautical Quarterly, **XIX**, februarie (1968).
4. H. Dumitrescu, *Determinarea undei de combustie într-o curgere supersonică plană*, St. cerc. mec. apl., **33**, 5 (1974).
5. E. Carafoli, C. Berbente, *Determinarea cîmpului de presiuni în mişcarea plană supersonică-hipersonică, moderată*, St. cerc. mec. apl., **31**, 3 (1972).
6. D. Pantazopol, F. Munteanu, *Studiul local al scurgerilor însoţite de unde de şoc şi de combustie cu ajutorul unui nou tip de polară*, St. cerc. mec. apl., **30**, 2 (1971)

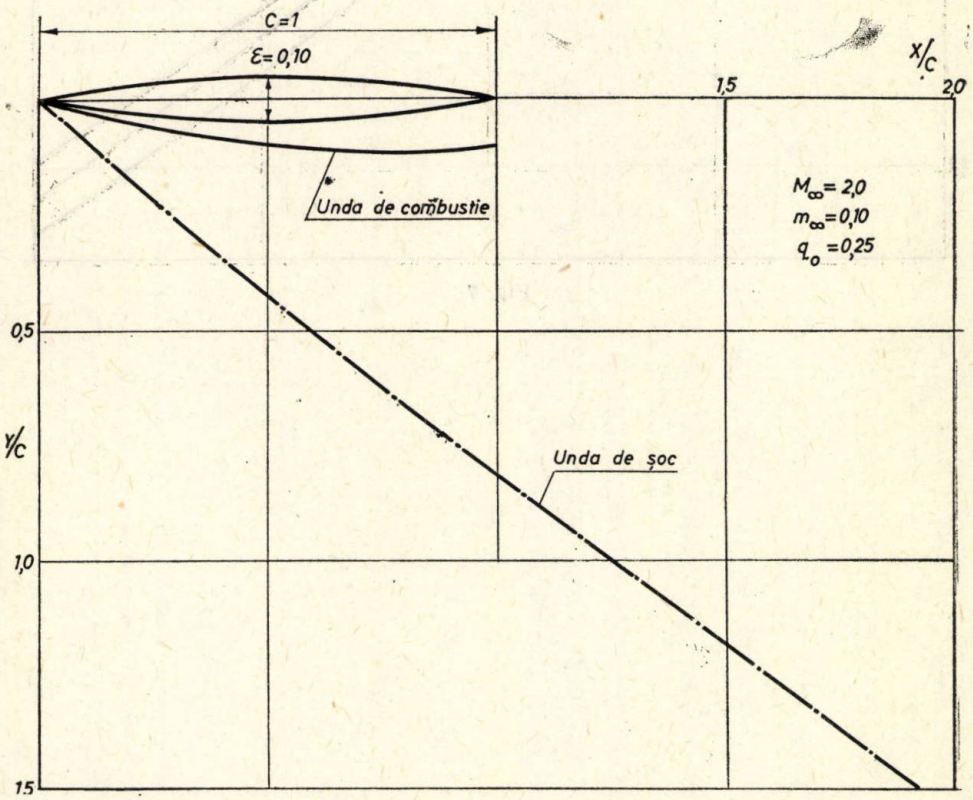


Fig. 6

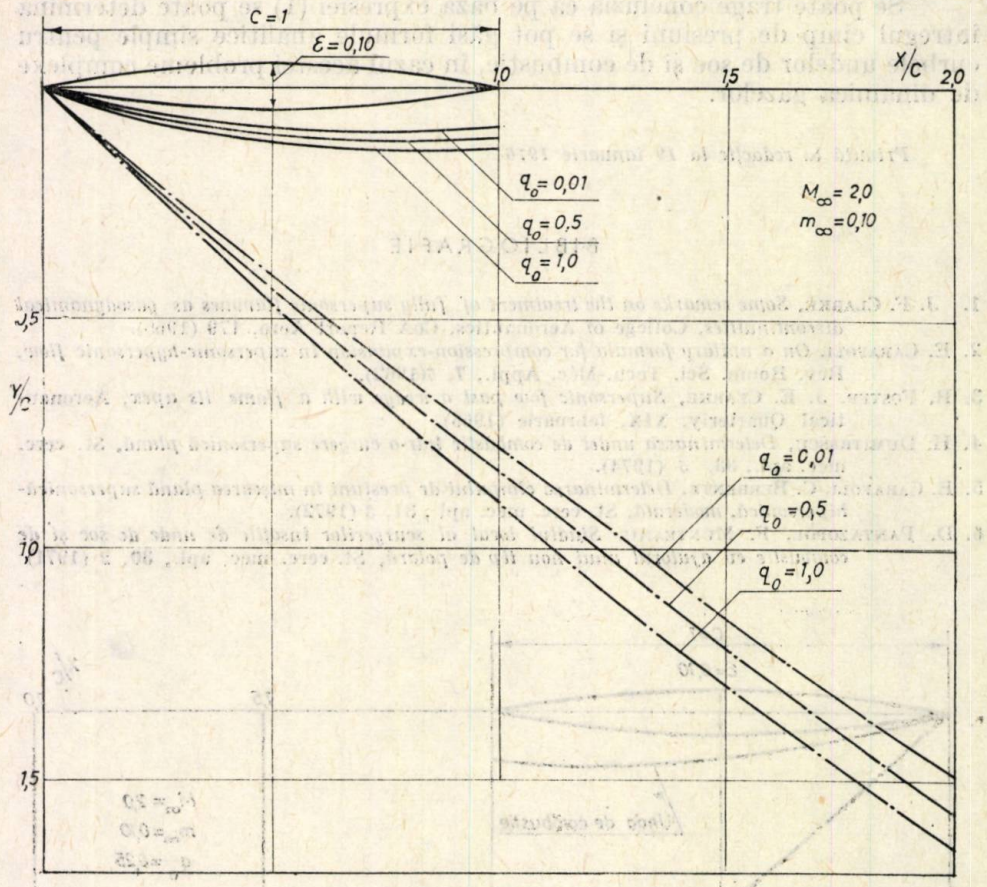

C = 1
ε = 0,10
1,0
1,5
X/C
2,0
q_0 = 0,01
q_0 = 0,5
q_0 = 1,0
M_∞ = 2,0
m_∞ = 0,10
Y/C
0,5
1,0
1,5
q_0 = 0,01
q_0 = 0,5
q_0 = 1,0

Fig. 7

INTRAREA OPTIMĂ RICOŞANTĂ ÎN ATMOSFERĂ, CU MINIMUM DE CĂLDURĂ CEDATĂ VEHICULULUI

de AL. MARINESCU şi D. DUMITRESCU
Institutul de mecanică a fluidelor şi construcţii aerospaţiale

În lucrare se studiază intrarea optimă ricoşantă în atmosferă cu minimum de căldură cedată vehiculului.
Evoluţia se consideră plană, iar variaţia densităţii cu altitudinea se consideră după legea exponenţială.
Problema variaţională este o problemă de extremum condiţionat care se soluţionează numeric cu ajutorul metodei matricei de tranziţie.
Pe baza acestei metode se fac aplicaţii numerice de interes practic.

1. INTRODUCERE

Problema optimizării intrării în atmosferă sub diversele ei aspecte face în prezent obiectul a numeroase preocupări.

Unul dintre aspectele de interes practic ale optimizării intrării este acela al minimizării căldurii cedate vehiculului.

Prezenta lucrare se ocupă de acest aspect al minimizării căldurii totale cedate vehiculului, în evoluţia pe o traiectorie ricoşantă plană, de intrare în atmosferă.

În scopul determinării legilor optime de variaţie a parametrilor mişcării şi a variabilei de control, problema variaţională de extremum condiţionat, se rezolvă prin metoda numerică a matricei de tranziţie, care s-a dovedit prin aplicaţiile efectuate foarte eficientă.

NOTAŢII

z — altitudinea,
x — distanţa pe orizontală,
r — raza vectoare a vehiculului,
R_0 — raza planetei,
l — lungimea de referinţă,
ρ — densitatea $= \rho_0 e^{-\beta z}$,
S — suprafaţă de referinţă,
S_v — aria suprafeţei vehiculului
V — viteza vehiculului,
C_z — coeficientul de portanţă,
C_x — coeficientul de rezistenţă la înaintare,
C_f' — coeficientul echivalent de de frecare,
$\mathcal{R}e$ — numărul Reynolds $= \frac{\rho V l}{\mu}$,

θ — unghiul de înclinare al traiectoriei în raport cu orizontala locală,

β — constantă în expresia variației densității cu înălțimea,

m — masa vehiculului,

$\frac{dq_m}{dt}$ — fluxul mediu $= \frac{C_f'}{4} \rho V^3$,

μ — viscozitatea dinamică,

Q — cantitatea totală de căldură cedată vehiculului $=$

$$= S_v \int_{t_i}^{t_f} \left(\frac{dq_m}{dt} \right) dt,$$

i — indice pentru valori inițiale,

f — indice pentru valori finale,

c — indice pentru valori calculate.

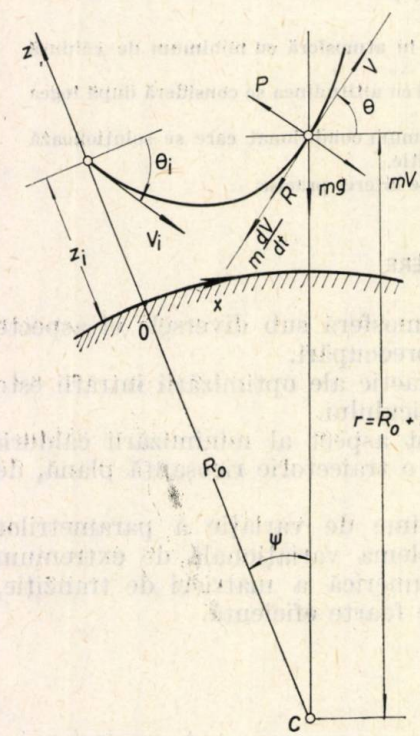


Fig. 1

3. ECUAȚIILE DE MIȘCARE

Considerăm vehiculul care intră în atmosferă într-un punct al traiectoriei presupusă plană, (fig. 1).

Pornind de la ecuațiile intrinseci de mișcare și convenind ca unghiul θ să fie pozitiv la coborîre și negativ la urcare, cu aproximația $r \approx R_0$ ecuațiile de mișcare rezultă sub forma (1)

$$\begin{aligned} m \frac{dV}{dt} &= -\frac{\rho}{2} S V^2 C_x + \\ &+ mg \sin\theta, \\ -mV \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\rho}{2} S V^2 C_z - \\ &- m\left(g - \frac{V^2}{R_0}\right) \cos\theta. \end{aligned} \tag{1}$$

Asociem ecuațiilor (1) ecuațiile cinematice

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= -V \sin\theta, \\ \frac{dx}{dt} &= V \cos\theta. \end{aligned} \tag{2}$$

Considerînd cazul intrării la unghiuri mici și portanța diferită de zero, reținem sistemul de ecuații, care guvernează mișcarea sub forma

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{SC_x}{2m}\rho V^2; \quad \frac{dz}{dt} = -V\sin\theta,$$
$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{SC_z}{2m}\rho V; \quad \frac{dx}{dt} = V\cos\theta. \tag{3}$$

O remarcă în legătură cu coeficientul echivalent de frecare C_f' o considerăm de la început necesară. Deoarece în cazul intrării ricoșante înălțimile minime atinse sînt în jur de 70 km, iar vitezele terminale, în jur de 7 km/s, coeficientul C_f' se situează în domeniul numerelor Mach mai mari ca 10, unde numerele Reynolds atinse arată că scurgerea este laminară.

În această situație C_f' nu este sensibil influențat de numărul Mach și este puțin influențat de numărul Reynolds $\mathcal{R}_e$ deoarece nu se ating straturile dense ale atmosferei ca în cazul intrării pe arce singulare. Cum în general influența numărului Reynolds nu este mare, vom putea considera cu destulă exactitate pentru cazul de față coeficientul C_f' constant (a se vedea și lucrarea [2]).

4. PROBLEMA VARIAȚIONALĂ

În studiul intrării ricoșante vom folosi numai primele trei ecuații (3) pe care le scriem sub forma

$$\Phi_v = \frac{dV}{dt} + \frac{SC_x}{2m}\rho V^2 = 0,$$
$$\Phi_\theta = \frac{d\theta}{dt} + \frac{SC_z}{2m}\rho V = 0, \tag{4}$$
$$\Phi_z = \frac{dz}{dt} + V\sin\theta = 0.$$

Problema variațională care se pune este de a găsi legile optime de variație ale parametrilor mișcării și a variabilei de control C_z astfel ca funcționala

$$Q = \frac{S_v C_f'}{4}\int_{t_i}^{t_f}\rho V^3 dt \tag{5}$$

să devină minimă cu condițiile (4).

Ținînd seama de (4) și (5), cu ajutorul multiplicatorilor lui Lagrange λ_v, λ_θ, λ_z, alcătuim funcția

$$H = \rho V^3 + \lambda_v\Phi_v + \lambda_\theta\Phi_\theta + \lambda_z\Phi_z. \tag{6}$$

Considerînd legea exponențială $\rho = \rho_0 e^{-\beta z}$ pentru variația densității cu înălțimea, și polara de forma

$$C_x = C_{xo} + kC_z^2, \tag{7}$$

ecuațiile lui Euler

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial H}{\partial V} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \frac{dV}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \frac{d\theta}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial H}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial \frac{dz}{dt}} = 0,\\
&\frac{\partial H}{\partial C_z} = 0
\end{aligned} \tag{8}$$

conduc în urma calculelor la sistemul de ecuații diferențiale

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_v}{dt} &= 3\rho_0 e^{-\beta z} V^2 + \lambda_v \frac{\rho_0 \rho}{m}(C_{x0} + kC_z^2)\, e^{-\beta z} V +\\
&+ \lambda_\theta \frac{\rho_0 S}{2m} C_z e^{-\beta z} + \lambda_z \sin\theta,\\
\frac{d\lambda_\theta}{dt} &= \lambda_z V \cos\theta,\\
\frac{d\lambda_v}{dt} &= -\beta\rho_0 e^{-\beta z} V^3 - \lambda_v \beta \frac{\rho_0 S}{2m}(C_{x0} + kC_z^2) e^{-\beta z} V^2 -\\
&- \lambda_\theta \beta \frac{\rho_0 S}{2m} C_z e^{-\beta z} V
\end{aligned} \tag{9}$$

și la ecuația algebrică

$$C_z = -\frac{\lambda_\theta}{2\lambda_v k V}. \tag{10}$$

Ţinînd seama de expresia (10) a lui C_z şi notînd $a = \frac{\rho_0 S}{2m}$, sistemul (9) capătă forma simplă

$$\frac{d\lambda_v}{dt} = 3\rho_0 e^{-\beta z} V^2 + 2\lambda_v a e^{-\beta z} C_{x0} + \lambda_z \sin\theta,$$

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = \lambda_z V \cos\theta, \tag{9'}$$

$$\frac{d\lambda_z}{dt} = -\beta e^{-\beta z}\left[\rho_0 V^3 + aV\left(\lambda_v V C_{x0} + \frac{\lambda_\theta}{2} C_z\right)\right].$$

Pe baza principiului maximului, care conduce la aceleaşi ecuaţii (9) şi (10), se poate demonstra că problema variaţională are sens dacă $C_z > 0$ şi $\lambda_\theta < 0$, ceea ce fizic este legitim.

În vederea demonstrării naturii extremumului să notăm pentru uşurinţă variabilele de stare şi derivatele lor în raport cu timpul după cum urmează

$$\begin{aligned} V &= v_1; & \frac{dV}{dt} &= \dot{v}_1, \\ \theta &= v_2; & \frac{d\theta}{dt} &= \dot{v}_2, \\ z &= v_3; & \frac{dz}{dt} &= \dot{v}_3. \end{aligned} \tag{11}$$

Condiţiile lui Legendre de minimum se scriu atunci

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \dot{v}_1^2} \geqslant 0,$$

. . . . . .

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{v}_1^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{v}_1 \partial \dot{v}_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{v}_1 \partial \dot{v}_3} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{v}_2 \partial \dot{v}_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{v}_2^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{v}_2 \partial \dot{v}_3} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{v}_3 \partial \dot{v}_1} & \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{v}_3 \partial \dot{v}_2} & \frac{\partial^2 H}{\partial \dot{v}_3^2} \end{vmatrix} \geqslant 0. \tag{12}$$

Din expresia (6) a funcției H se vede că ea depinde liniar de mărimile $\dot{v}_1$, $\dot{v}_2$, $\dot{v}_3$ astfel încît condițiile lui Legendre sînt îndeplinite și funcționala (5) este minimă de-alungul extremalei.

Rezolvarea problemei propuse cere soluționarea a șase ecuații diferențiale (4) și (9) cu șase funcții necunoscute V, θ, z, λ_v, λ_θ, λ_z. Vom considera variabilele de stare și variabilele independente date la momentul inițial

$$V_i = V(t_i),$$

$$\theta_i = \theta(t_i),$$

$$z_i = z(t_i),$$

$$t_i = 0,$$

λ_{vi}, $\lambda_{\theta i}$, λ_{zi} fiind libere.

La sfîrșitul evoluției avem (condiția de stop)

$$z_f = z_i,$$

mărimile t_f, V_f, θ_f fiind libere.

Din condiția de transversalitate pe care o scriem ținînd seama de notațiile (11) sub forma generală

$$\left[\left(H - \sum_{j=1}^{3} \dot{v}_j \frac{\partial H}{\partial \dot{v}_j}\right)\delta t + \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial H}{\partial \dot{v}_j}\delta v_j\right]_i^f = 0, \tag{13}$$

rezultă pe baza considerațiilor de mai sus ($\delta z = 0$ deoarece z_f este cunoscut)

$$\lambda_{vf} = \lambda_{\theta f} = 0,$$

$$\left[H - \lambda_v \frac{dV}{dt} - \lambda_\theta \frac{d\theta}{dt} - \lambda_z \frac{dz}{dt}\right]^f = 0$$

sau, în forma calculelor,

$$\lambda_{vf} = \lambda_{\theta f} = 0,$$

$$\lambda_{zf} = -\frac{\rho_0 e^{-\beta z_f} V_f^2}{\sin\theta_f}. \tag{14}$$

5. CALCULUL LEGILOR OPTIME DE VARIAȚIE ALE PARAMETRILOR MIȘCĂRII

Problema astfel formulată este o problemă bilocală și prezintă dificultatea caracteristică acestui tip de probleme : rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale (9′) nu poate fi făcută prin simpla integrare deoa-

rece nu se cunosc valorile inițiale. Problema se rezolvă numeric cu ajutorul metodei matricei de tranziție [3].

Notînd cu $[\Lambda] = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$ vectorul coloană $\begin{bmatrix} \lambda_v \\ \lambda_\theta \\ \lambda_z \end{bmatrix}$, vom înțelege prin $[\Lambda_i]$ și $[\Lambda_f]$ vectorul valorilor inițiale și, respectiv, vectorul valorilor finale.

O variație $[\delta\Lambda_i] = \begin{bmatrix} \delta\lambda_{1i} \\ \delta\lambda_{2i} \\ \delta\lambda_{3i} \end{bmatrix}$ a vectorului valorilor inițiale produce o variație $[\delta\Lambda_f]^T = (\delta\lambda_{1f}, \delta\lambda_{2f}, \delta\lambda_{3f})$ a vectorului valorilor finale. Matricea de tranziție se definește astfel :

$$[\delta\Lambda_f] = [T]([\delta\Lambda_i]. \tag{15}$$

Invers, o variație $[\delta\Lambda_f]$ a vectorului $[\Lambda_f]$ este produsă de o variație

$$[\delta\Lambda_i] = [T]^{-1}[\delta\Lambda_f] \tag{16}$$

a vectorului $[\Lambda_i]$.

Matricea de tranziție poate fi calculată cu ajutorul ecuațiilor în perturbații ale lui $[\Lambda]$ care se integrează simultan cu ecuațiile de optimalitate compuse din (4), (9′) și (10). Ecuațiile în perturbații se obțin ușor din (9′) prin diferențiere. Dacă sistemul (9′) se scrie

$$\frac{\mathrm{d}\lambda_k}{\mathrm{d}t} = f_k(V, \theta, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, C_z), \qquad k = 1, 2, 3, \tag{17}$$

atunci ecuațiile în perturbații sînt :

$$\frac{\mathrm{d}(\delta\lambda_k)}{\mathrm{d}t} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_j}\delta\lambda_j + \frac{\partial f_k}{\partial C_z}\delta C_z, \qquad k = 1, 2, 3 \tag{18}$$

sau

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}(\delta\lambda_v)}{\mathrm{d}t} &= 2a\mathrm{e}^{-\beta z}VC_{x0}\delta\lambda_v, \\
\frac{\mathrm{d}(\delta\lambda_\theta)}{\mathrm{d}t} &= V\cos\theta\,\delta\lambda_z, \\
\frac{\mathrm{d}(\delta\lambda_z)}{\mathrm{d}t} &= -\beta a\mathrm{e}^{-\beta z}V\left[VC_{x0}\,\delta\lambda_a + \right. \\
&\quad \left. + \left(\delta\lambda_\theta - \frac{1}{2}\frac{\lambda_\theta}{\lambda_v}\delta\lambda_v\right)C_z\right].
\end{aligned} \tag{19}$$

Pentru determinarea matricei de tranziţie să remarcăm mai întîi că o variaţie de felul $\begin{bmatrix} \delta\lambda_{1i} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ produce o variaţie $\begin{bmatrix} \delta\lambda_{1f} \\ \delta\lambda_{2f} \\ \delta\lambda_{3f} \end{bmatrix}$ astfel că

$$t_{11} = \frac{\delta\lambda_{1f}}{\delta\lambda_{1i}}; \qquad t_{21} = \frac{\delta\lambda_{2f}}{\delta\lambda_{1i}}; \qquad t_{31} = \frac{\delta\lambda_{3f}}{\delta\lambda_{1i}},$$

adică elementele coloanei j din matricea $[T]$ reprezintă chiar variaţiile $[\delta\Lambda_f]$ pentru o variaţie unitară a variabilei λ_{ji}, celelalte variaţii ale vectorului $[\Lambda_i]$ fiind nule.

Vom integra sistemul (19) de trei ori împreună cu sistemul de optimalitate, succesiv cu condiţiile iniţiale

$$\delta\lambda_{ji} = \delta_{jk}, \qquad \begin{matrix} j = 1, 2, 3, \\ k = 1, 2, 3, \end{matrix}$$

δ_{jk} fiind simbolul lui Kronnecker şi vom avea

$$\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ t_{3k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta\lambda_{1f} \\ \delta\lambda_{2f} \\ \delta\lambda_{3f} \end{bmatrix}.$$

Deoarece vectorul $[\Lambda_f]$ este cunoscut, este posibil următorul algoritm:

1°. Cu nişte $[\Lambda_i]_{\text{vechi}}$, care iniţial sînt alese arbitrar, se calculează matricea de tranziţie aşa cum s-a arătat.

2°. Se inversează matricea de tranziţie.

3°. Se calculează vectorul $[\delta\Lambda_f] = [\Lambda_f]_c - [\Lambda_f]_e$, unde $[\Lambda_f]_c$ este vectorul calculat prin integrare, iar $[\Lambda_f]_e$ este vectorul valorilor exacte. Aici, în calculul lui $\lambda_{3f} = \lambda_{zf}$, trebuie să ţinem seama că λ_{1f} şi λ_{2f} nu sînt cele exacte ci cele calculate. Prin urmare

$$\lambda_{zf} = \left[\frac{H - \lambda_1 \dfrac{dV}{dt} - \lambda_2 \dfrac{d\theta}{dt}}{\dfrac{dz}{dt}} \right]_f. \tag{20}$$

4°. Dacă $[\delta\Lambda_f]$ este suficient de mic (în programul de calcul aceasta s-a apreciat după cît de repede tinde către 0, C_z) se opreşte procesul iterativ, în caz contrar se trece la etapa următoare.

5°. Se calculează $[\delta\Lambda_i]$ efectuînd produsul $[T]^{-1}[\delta\Lambda_f]$.

6°. Se reevaluează vectorul $[\Lambda_i]$

$$[\Lambda_i]_{\text{nou}} = [\Lambda_i]_{\text{vechi}} - \varepsilon [T]^{-1}[\delta\Lambda_f], \tag{21}$$

unde ε este un număr pozitiv subunitar introdus pentru a compensa în calcule aproximația liniară. El își modifică valoarea de la o iterație la alta tinzînd către 0. Mai departe se reia procesul iterativ începînd cu punctul 1 cu valorile $[\Lambda_i]$ astfel modificate.

6. APLICAȚIE NUMERICĂ ȘI CONCLUZII

Pentru o mai bună desfășurare a calculelor și pentru a ușura alegerea valorilor inițiale a mărimilor nespecificate s-au folosit mărimile adimensionale după cum urmează

$$V^* = \frac{V}{V_i}; \qquad \theta^* = \theta; \qquad z^* = \frac{z}{z_i}.$$

Atunci sistemul (4) devine

$$\Phi_v^* = \frac{\Phi_v}{V_i} = \frac{dV^*}{dt} + a^* e^{-\beta^* z^*} V^{*2} C_x,$$

$$\Phi_\theta^* = \Phi_\theta = \frac{d\theta}{dt} + a^* e^{-\beta^* z^*} V^* C_z, \tag{22}$$

$$\Phi_z^* = \frac{\Phi_z}{z_i} = \frac{dz^*}{dt} + \frac{V_i}{z_i} V^* \sin\theta,$$

unde $a^* = aV_i$ și $\beta^* = \beta z_i$.
Mergînd mai departe cu adimensionalizarea, avem

$$H^* = \frac{H}{V_i^3} = \rho V^{*3} + \lambda_v^* \Phi_v^* + \lambda_\theta^* \Phi_\theta^* + \lambda_z^* \Phi_z^*, \tag{23}$$

astfel că

$$\lambda_v^* = \frac{\lambda_v}{V_i^2}; \qquad \lambda_\theta^* = \frac{\lambda_\theta}{V_i^3}; \qquad \lambda_z^* = \lambda_z \frac{z_i}{V_i^3} \tag{24}$$

și

$$\frac{d\lambda_v^*}{dt} = 3\rho_0 e^{-\beta^* z^*} V^{*2} + \lambda_v^* 2a^* e^{-\beta^* z^*} V^* C_{x0} + \frac{V_i}{z_i} \lambda_z^* \sin\theta,$$

$$\frac{d\lambda_\theta^*}{dt} = \frac{V_i}{z_i} \lambda_z^* V^* \cos\theta, \tag{25}$$

$$\frac{d\lambda_z^*}{dt} = -\beta^* e^{-\beta^* z^*} \left[\rho_0 V^{*3} + a^* V^* \left(\lambda_v^* V^* C_{x0} + \lambda_\theta^* \frac{C_z}{2} \right) \right],$$

$$\frac{d(\delta\lambda_v^*)}{dt} = 2a^* e^{-\beta^* z^*} V^* C_{x0} \delta\lambda_v^* + \frac{V_i}{z_i} \sin\theta\ \delta\lambda_z^*,$$

$$\frac{d(\delta\lambda_\theta^*)}{dt} = \frac{V_i}{z_i} V^* \cos\theta\ \delta\lambda_z^*,$$

$$\frac{d(\delta\lambda_z^*)}{dt} = -\beta^* a^* e^{-\beta^* z^*} V^* \left[V^* C_{x0} \delta\lambda_v^* + \left(\delta\lambda_\theta^* - \frac{1}{2} \frac{\lambda_\theta^*}{\lambda_v^*} \delta\lambda_v^* \right) C_z \right], \quad (26)$$

$$C_z = -\frac{\lambda_\theta^*}{2\lambda_v^* k\ V^*}.$$

cu următoarele date

$V_i = 7950$ m/s, $\beta = 1{,}395 \cdot 10^{-4}$ m^{-1},
$\theta_i = 3°$, $\rho_0 = 0{,}125$ kgs^2 m^{-4},
$z_i = 110.000$ m,
$C_{x0} = 0{,}02$,
$k = 0{,}55$,

s-au calculat conform celor de mai sus legile optime de variație ale parametrilor mișcării înscrise în forma adimensională în graficele din figurile

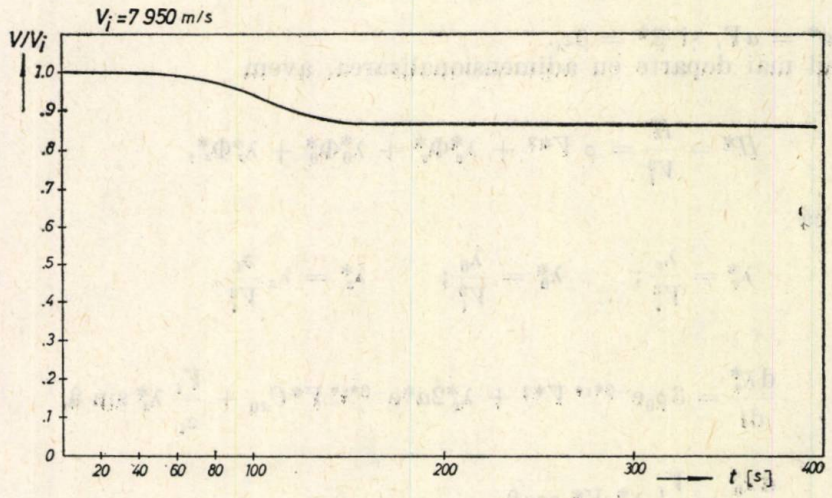


Fig. 2

2—5, unde, în figura 5, s-a preferat așa cum se obișnuiește să se reprezinte finețea în locul portanței.

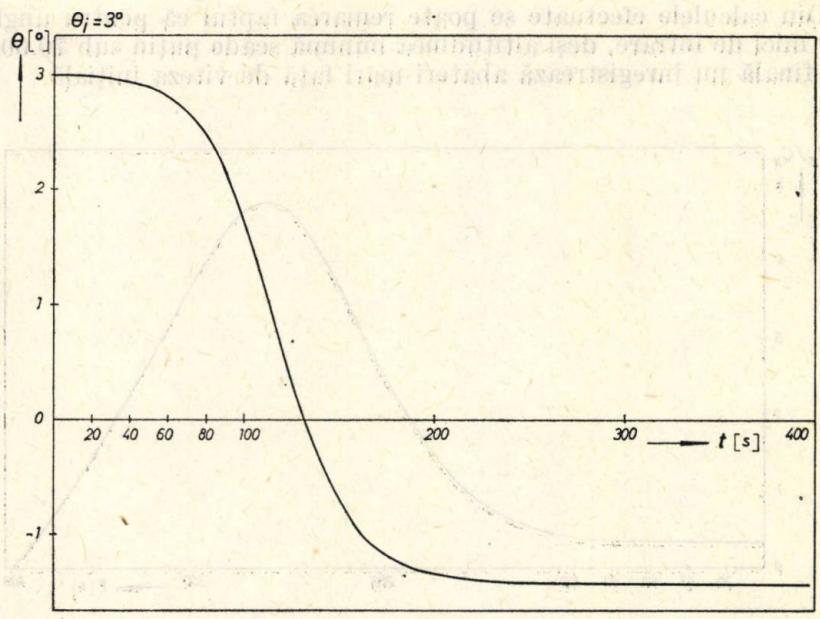

$\theta_i = 3°$
θ [°]
3
2
1
0
-1
20
40
60
80
100
200
300
400
t [s]

Fig. 3

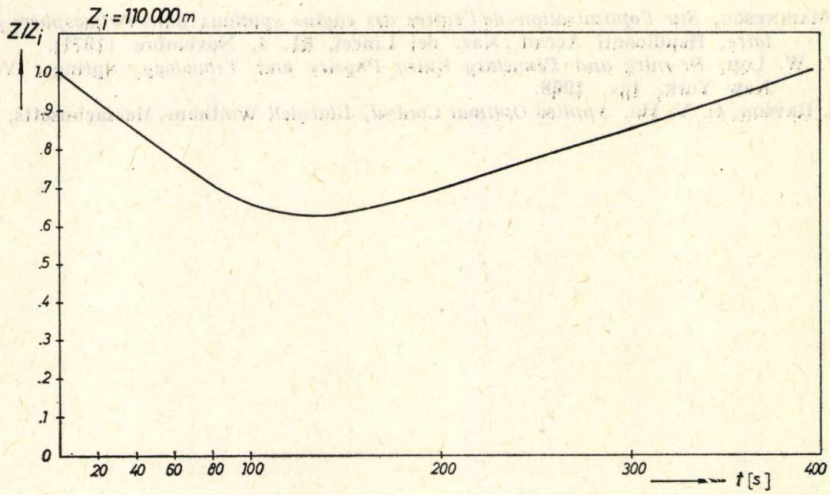

$Z_i = 110\,000$ m
Z/Z_i
1.0
.9
.8
.7
.6
.5
.4
.3
.2
.1
0
20
40
60
80
100
200
300
400
t [s]

Fig. 4

Din calculele efectuate se poate remarca faptul că pentru unghiuri relativ mici de intrare, deși altitudinea minimă scade puțin sub 70.000 m, viteza finală nu înregistrează abateri mari față de viteza inițială.

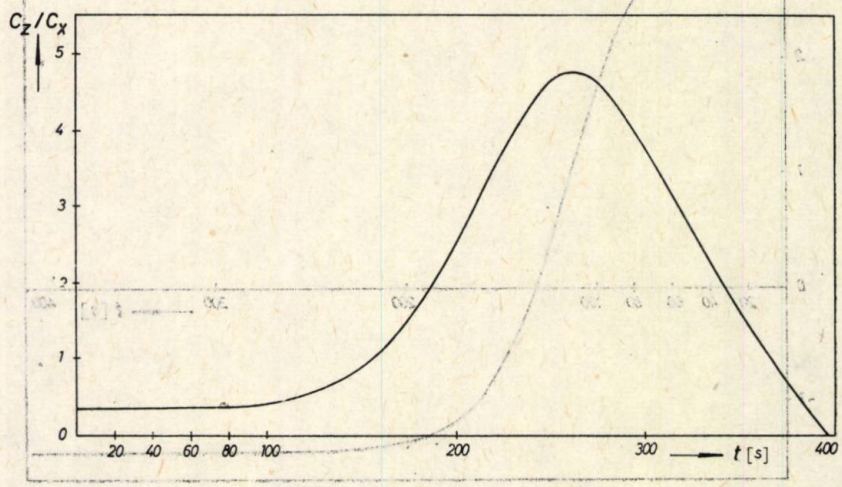


Fig. 5

Acest lucru apare explicabil prin creșterea finețiii în regiunea altitudinii minime.

Primită la redacție la 24 aprilie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. AL. MARINESCU, *Sur l'optimisation de l'entrée des engins spatiaux dans l'atmosphère planétaire*, Rendiconti Accad. Naz. dei Lincei, **51**, 5, Novembre (1971).
2. H. T. W. LOH, *Re-entry and Planetary Entry Physics and Tehnology*, Springer Verlag, New York, Inc. 1968.
3. A. E. BRYSON, C. Y. Ho, *Applied Optimal Control, Blaisdell* Waltham Massachusetts, 1969.

ASUPRA CIOCNIRII RIGIDULUI ÎN MIŞCAREA GENERALĂ

de ŞTEFAN STAICU şi CĂTĂLINA LEFTER
Institutul politehnic Bucureşti

Lucrarea studiază ciocnirea unui rigid aflat în mişcarea generală, în ipoteza că unul din punctele sale este obligat să rămînă permanent pe o suprafaţă lucie sau pe o curbă lucie. Scriind ecuaţiile generale ale ciocnirii, se determină percuţia de legătură şi elemetele cinematice ale mişcării la sfîrşitul ciocnirii.
În continuare se analizează condiţiile de aplicare a percuţiei exterioare, pentru a obţine toate distribuţiile posibile ale vitezelor instantanee de la sfîrşitul ciocnirii. În final se arată că ecuaţiile generale ale ciocniriilor pot fi deduse cu ajutorul teoremei energiei cinetice sau cu ajutorul teoremei lui Kelvin din cazul fenomenului de ciocnire.

Se consideră un corp de masă M supus unei percuţii $\vec{\mathcal{P}}$ aplicată într-un punct A. Dacă solidul are anumite legături va trebui să se ţină seama în ecuaţiile generale ale ciocnirilor şi de torsul percuţiilor de legătură.

1. *Ciocnirea rigidului în cazul în care unul din punctele lui se află permanent pe o suprafaţă lucie.*

Să presupunem că un punct 0 al unui rigid este obligat să se mişte pe o suprafaţă fixă (Σ). Aceasta înseamnă că în punctul 0 este un reazem simplu (fig. 1)

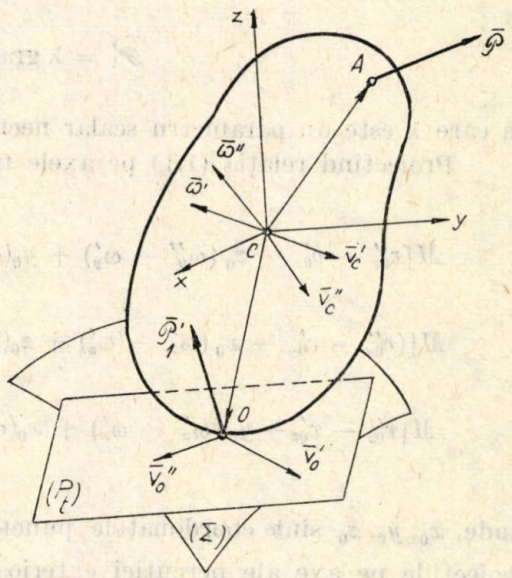


Fig. 1

Cunoscînd viteza $\vec{v}_0$ a punctului 0 al rigidului şi viteza unghiulară $\vec{\omega}'$ în jurul centrului de greutate, la începutul ciocnirii, se cere să se determine percuţia de legătură $\vec{\mathcal{P}}_1'$ şi parametrii cinematici ai mişcării rigidului la sfîrşitul ciocnirii: $\vec{v}_0''$, $\vec{\omega}$. Aceştia reprezintă în realitate viteza iniţială a punctului 0 şi, respectiv, viteza unghiulară iniţială în jurul centrului de greutate pentru mişcarea generală a rigidului care începe la sfîrşitul ciocnirii.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR 3, 1976, P. 351–362

Pentru aceasta se raportează mişcarea rigidului la un triedru mobil $Cxyz$, solidar cu rigidul, avînd originea în centrul maselor C şi axele Cx, Cy, Cz orientate după direcţiile principale şi centrale de inerţie (fig. 1).

Pentru studiul complet al problemei se aplică teoremele generale ale ciocnirilor : teorema impulsului şi teorema momentului cinetic.

Teorema impulsului se scrie :

$$\vec{H}'' - \vec{H}' = \vec{\mathscr{P}}_1' + \vec{\mathscr{P}}, \tag{1.1}$$

unde

$$\vec{H}' = M\vec{v}_c' = M(\vec{v}_0' + \vec{\omega}' \times \overrightarrow{OC}),\ \vec{H}'' = M\vec{v}_c'' = M(\vec{v}_0'' + \vec{\omega}'' \times \overrightarrow{OC}). \tag{1.2}$$

Deoarece legătura este ideală, percuţia $\vec{\mathscr{P}}_1'$ va fi orientată, conform axiomei legăturilor extinsă în cazul ciocnirilor, pe direcţia normalei în punctul 0 la suprafaţa Σ. Exprimînd prin

$$\varphi(x, y, z) = 0 \tag{1.3}$$

ecuaţia suprafeţei Σ în raport cu sistemul $Cxyz$, putem scrie

$$\vec{\mathscr{P}}_1' = \lambda \operatorname{grad} \varphi, \tag{1.4}$$

în care λ este un parametru scalar necunoscut.

Proiectînd relaţia (1.1) pe axele triedrului $Oxyz$, se obţin ecuaţiile

$$\begin{aligned}
M[v_{0x}'' - v_{0x}' - z_0(\omega_y'' - \omega_y') + y_0(\omega_z'' - \omega_z')] &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathscr{P}_x, \\
M[(v_{0y}'' - v_{0y}' - x_0(\omega_z'' - \omega_z') + z_0(\omega_x'' - \omega_x')] &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathscr{P}_y, \\
M[v_{0z}'' - v_{0z}' - y_0(\omega_x'' - \omega_x') + x_0(\omega_y'' - \omega_y')] &= \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \mathscr{P}_z,
\end{aligned} \tag{1.5}$$

unde x_0, y_0, z_0 sînt coordonatele punctului 0, iar $\mathscr{P}_x, \mathscr{P}_y, \mathscr{P}_z$ reprezintă proiecţiile pe axe ale percuţiei exterioare $\vec{\mathscr{P}}$.

Teorema momentului cinetic, aplicată faţă de centrul maselor C, se scrie

$$\vec{K}_c'' - \vec{K}_c' = \overrightarrow{CO} \times \vec{\mathscr{P}}_1' + \overrightarrow{CA} \times \vec{\mathscr{P}}, \tag{1.6}$$

unde

$$\vec{K} = J_1\omega_x'\vec{i} + J_2\omega_y'\vec{j} + J_3\omega_c'\vec{k}, \tag{1.7a}$$

$$\vec{K}_c'' = J_1\omega_x''\vec{i} + J_2\omega_y''\vec{j} + J_3\omega_z''\vec{k}, \tag{1.7b}$$

J_1, J_2, J_3 reprezentînd momentele principale şi centrale de inerţie ale rigidului.

Notînd cu x, y, z coordonatele punctului A, se proiectează relaţia vectorială (1.6) pe cele trei axe şi se obţine sistemul de ecuaţii:

$$\begin{aligned}
J_1(\omega_x'' - \omega_x') &= \lambda\left(y_0\frac{\partial\varphi}{\partial z} - z_0\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + y\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y,\\
J_2(\omega_x'' - \omega_y') &= \lambda\left(z_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} - x_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + z\mathscr{P}_x - x\mathscr{P}_z,\\
J_3(\omega_z'' - \omega_z') &= \lambda\left(x_0\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Observînd mai departe că saltul vitezei punctului 0, pe perioada ciocnirii, este situat în planul tangent la suprafaţă (P_t) împreună cu vectorii $\vec{v}_0'$, $\vec{v}_0''$, putem scrie relaţia

$$(\vec{v}_0'' - \vec{v}_0')\cdot\operatorname{grad}\varphi = 0. \tag{1.9}$$

Dacă vom înmulţi fiecare din ecuaţiile sistemului (1.5) prin $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, respectiv $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ şi le vom aduna pe coloană se obţine o relaţie, care, ţinînd seama şi de (1.9), devine

$$\begin{aligned}
&(\omega_x'' - \omega_x')\left(y_0\frac{\partial\varphi}{\partial z} - z_0\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + (\omega_y'' - \omega_x')\left(z_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} - x_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) +\\
&+ (\omega_z'' - \omega_z')\left(x_0\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = -\frac{1}{M}(\vec{\mathscr{P}} + \lambda\nabla\varphi)\cdot\nabla\varphi,
\end{aligned} \tag{1.10}$$

unde ∇ reprezintă operatorul diferenţial „nabla".

Pornind de aici şi ţinînd seama de relaţiile (1.8), se obţine expresia parametrului λ.

Introducînd valoarea lui λ în relaţiile (1.8) deducem componentele vitezei unghiulare $\vec{\omega}''$ a rigidului şi cele ale vitezei punctului la sfîrşitul ciocnirii.

Dacă punctul 0 coincide cu centrul de greutate C ($C \equiv 0$) vom face în rezultatele precedente $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ şi vom obţine

$$\lambda = -\frac{\vec{\mathscr{P}}\cdot\nabla\varphi}{(\nabla\varphi)^2}, \quad \vec{v}_0'' = \vec{v}_0' + \frac{1}{M}(\vec{\mathscr{P}} + \lambda\nabla\varphi),$$

$$\omega_x'' = \omega_x' + \frac{1}{J_1}(y\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y),$$

$$\omega_y'' = \omega_y' + \frac{1}{J_2}(z\mathscr{P}_z - x\mathscr{P}_z), \tag{1.11}$$

$$\omega_z'' = \omega_z' + \frac{1}{J_3}(x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x).$$

CAZURI POSIBILE

1°. Pentru ca mişcarea rigidului la sfîrşitul ciocnirii să corespundă unei translaţii instantanee, cu viteza v'', sînt necesare condiţiile

$$\omega_x'' = 0, \quad \omega_y'' = 0, \quad \omega_z'' = 0, \tag{1.12}$$

de unde rezultă un sistem algebric

$$y\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y = -J_1\omega_z', \quad z\mathscr{P}_x - x\mathscr{P}_z = -J_2\omega_z', \quad x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x = -J_3\omega_z', \tag{1.13}$$

al cărui determinant principal este nul. Sistemul este compatibil şi simplu nedeterminant dacă şi determinantul caracteristic este egal cu zero, adică

$$\vec{K}_c'\cdot\mathscr{P} = 0. \tag{1.14}$$

Aşadar, percuţia va fi aplicată în punctele unei drepte definită de două din ecuaţiile (1.13) şi va avea suportul situat într-un plan normal la momentul cinetic iniţial al rigidului, calculat faţă de centrul de greutate.

2°. Pentru ca mişcarea rigidului la sfîrşitul ciocnirii să caracterizeze o rotaţie instantanee, cu viteza unghiulară $\vec{\omega}''$, în jurul unei axe care să treacă printr-un punct dat (I (a, b, c) al rigidului sînt necesare condiţiile din care rezultă ecuaţiile

$$v_{Ix}'' = 0, \quad v_{Iy}'' = 0 \quad v_{Iz}'' = 0, \tag{1.15}$$

din care rezultă ecuaţiile

$$b\omega_z'' - c\omega_y'' = v_{0x}'', \quad c\omega_x'' - a\omega_z'' = v_{0z}'', \quad a\omega_y'' - b\omega_x'' = v_{0z}''. \tag{1.16}$$

Ţinînd seama de (1.11) sistemul (1.16) devine

$$\left(\frac{b\mathscr{P}_y}{J_3}+\frac{c\mathscr{P}_z}{J_2}\right)x-\frac{b\mathscr{P}_x}{J_3}y-\frac{c\mathscr{P}_x}{J_2}z=\frac{\mathscr{P}_x}{M}+$$

$$+v'_{0x}-b\omega'_z+c\omega'_y+\frac{\lambda}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial x},$$

$$-\frac{a\mathscr{P}_y}{J_3}x+\left(\frac{c\mathscr{P}_z}{J_1}+\frac{a\mathscr{P}_x}{J_3}\right)y-\frac{c\mathscr{P}_y}{J_1}z=\frac{\mathscr{P}_y}{M}+$$

$$+v'_{0y}-c\omega'_x+a\omega'_z+\frac{\lambda}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{1.17}$$

$$-\frac{a\mathscr{P}_x}{J_2}x-\frac{b\mathscr{P}_z}{J_1}y+\left(\frac{a\mathscr{P}_x}{J_2}+\frac{b\mathscr{P}_y}{J_1}\right)z=\frac{\mathscr{P}}{M}+$$

$$+v'_{0z}-\alpha\omega'_y+b\omega'_x+\frac{\lambda}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Determinantul principal Δ al sistemului este egal cu zero. Pentru ca sistemul (1.17) să fie compatibil şi simplu nedeterminat este necesar ca şi determinantul caracteristic să fie nul:

$$\Delta_z=-\frac{\mathscr{P}_z}{MJ_1J_2J_3}(aJ_1\mathscr{P}_x+bJ_2\mathscr{P}_y+cJ_3\mathscr{P}_z)\left[a\left(\mathscr{P}_x+Mv'_{0x}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\right. \tag{1.18}$$

$$\left.+b\left(\mathscr{P}_y+Mv'_{0y}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+c\left(\mathscr{P}_z+Mv'_{0z}+\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right]=0.$$

De aici rezultă condiţia

$$\vec{CI}\cdot(\vec{\mathscr{P}}+M\vec{v}'_0+\lambda\Delta\varphi)=0. \tag{1.19}$$

Aşadar, percuţia va fi aplicată în punctele unei drepte definită de două din ecuaţiile (1.17), iar componentele sale vor satisface condiţia (1.19) vectorul de poziţie al punctului I va avea direcţia perpendiculară pe planul determinat de suma vectorială dintre percuţia $\vec{\mathscr{P}}$ şi impulsul iniţial $M\vec{v}'_0$ şi de normala la suprafaţă dusă la punctul O.

Cazul fixării brusce a unui punct I al rigidului, echivalează cu introducerea unei legături rigide, persistente şi se deduce din cele de mai sus dacă se înlocuieşte $x=a$, $y=b$, $z=c$.

În particular, să analizăm cazul rotaţiei instantanee în jurul centrului de greutate al rigidului, pentru care $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Se obţin condiţiile

$$\frac{\mathscr{P}_x + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}}{v'_{0x}} = \frac{\mathscr{P}_y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}}{v'_{0z}} = \frac{\mathscr{P}_z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}}{v'_{0z}} = -M, \tag{1.20}$$

care arată că solidul îşi continuă mişcarea sa, după ciocnire, începînd cu o distribuţie de viteze caracteristică rotaţiei instantanee în jurul unei axe ce trece prin centrul de greutate, dacă suportul percuţiei va fi paralel cu planul determinat de vectorul impuls iniţial şi de normala la suprafaţă dusă în punctul O.

3°. Pentru ca mişcarea rigidului la sfîrşitul ciocnirii să fie caracterizată printr-o distribuţie de viteze a unei mişcări elicoidale în jurul unei axe trecînd printr-un punct $I(a, b, c,)$ sînt necesare următoarele condiţii

$$\frac{\omega''_x}{v''_{0x} + c\omega''_y - b\omega''_z} = \frac{\omega''_y}{v''_{0y} + a\omega''_z - c\omega''_x} = \frac{\omega''_z}{v''_{0z} + b\omega''_x - a\omega''_y} = \alpha, \tag{1.21}$$

unde s-a notat $\alpha = \frac{|\vec{\omega}''|}{|\vec{v}''_I|}$.

Pentru simplificarea calculelor se va considera cazul mişcării elicoidale în jurul unei axe care trece prin centrul de greutate, adică $a = 0$, $b = 0$, $c = 0$. Se obţine sistemul

$$\begin{aligned}
y\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y &= -J_1\omega'_x + \alpha J_1\left(\frac{\mathscr{P}_x}{M} + v'_{0x} + \frac{\lambda}{M}\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right),\\
z\mathscr{P}_x - x\mathscr{P}_z &= -J_2\omega'_y + \alpha J_2\left(\frac{\mathscr{P}_y}{M} + v'_{0y} + \frac{\lambda}{M}\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right),\\
x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x &= -J_3\omega'_z + \alpha J_3\left(\frac{\mathscr{P}_z}{M} + v'_{0z} + \frac{\lambda}{M}\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right),
\end{aligned} \tag{1.22}$$

al cărui determinant principal este nul. Ecuaţiile (1.22) vor reprezenta o dreaptă pentru punctele de aplicaţie ale percuţiei exterioare, dacă determinantul caracteristic este egal cu zero, adică

$$\begin{aligned}
J_1\omega'_x\mathscr{P}_x + J_2\omega'_y\mathscr{P}_y + J_3\omega'_z\mathscr{P}_z = \frac{\alpha}{M}\Bigg[J_1\mathscr{P}_x\left(\mathscr{P}_x + Mv'_{0x} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) +\\
+ J_2\mathscr{P}_y\left(\mathscr{P}_y + Mv'_{0y} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right) + J_3\mathscr{P}_z\left(\mathscr{P}_z + Mv'_{0z} + \lambda\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)\Bigg].
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Acest caz corespunde mişcării generale ale rigidului, deoarece distribuţia de viteze a lui este reductibilă la cea din mişcarea elicoidală.

4°. Pentru ca rigidul considerat să se oprească brusc datorită aplicării unei percuții $\vec{\mathcal{P}}$ într-un anumit punct sînt necesare următoarele condiții

$$v'_{0x} = 0,\ v'_{0y} = 0,\ v'_{0z} = 0, \tag{1.24a}$$

$$\omega'_x = 0,\ \omega'_y = 0,\ \omega'_z = 0, \tag{1.24b}$$

din care rezultă ecuațiile

$$\frac{v'_{0x}}{\mathcal{P}_x + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{v'_{0y}}{\mathcal{P}_y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{v'_{0z}}{\mathcal{P}_z + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}} = -\frac{1}{M},$$

$$y\mathcal{P}_z - z\mathcal{P}_y = -J_1\omega'_x,\ z\mathcal{P}_x - x\mathcal{P}_z = -J_2\omega'_y,\ x\mathcal{P}_y - y\mathcal{P}_x = J_3\omega'_z, \tag{1.25}$$

și condiția

$$J_1\omega'_x\left(Mv'_{0x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + J_2\omega'_y\left(Mv'_{0y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + J_3\omega'_z\left(Mv'_{0z} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = 0, \tag{1.26}$$

adică

$$\vec{K}'_c\cdot(M\vec{v}'_0 + \lambda\Delta\varphi) = 0. \tag{1.27}$$

Deci, oprirea instantanee a rigidului considerat mai sus prin aplicarea unei singure percuții exterioare $\vec{\mathcal{P}}$ este posibilă dacă vectorul moment cinetic inițial, calculat față de centrul de greutate, are direcția perpendiculară pe planul determinat de vectorul impuls inițial și de normala la suprafață dusă în punctul 0. De asemenea, percuția va fi aplicată într-un punct al dreptei definită de ecuațiile

$$y = \frac{Mv'_{0y} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y}}{Mv'_{0x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}}x - \frac{J_3\omega_z}{Mv'_{0x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}}, \tag{1.28 a}$$

$$z = \frac{Mv'_{0z} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z}}{Mv'_{0x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}}x + \frac{J_2 v\omega'_y}{Mv'_{0x} + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x}}, \tag{1.28 b}$$

și va avea suportul situat într-un plan normal la momentul cinetic inițial al rigidului, calculat față de centrul de greutate.

2. *Ciocnirea rigidului în cazul în care unul din punctele lui se află permanent pe o curbă lucie*

În cele ce urmează vom presupune că un punct 0 al rigidului este obligat să se deplaseze pe o curbă fixă (Γ). Această legătură a rigidului echivalează cu un reazem simplu în punctul respectiv (fig. 2).

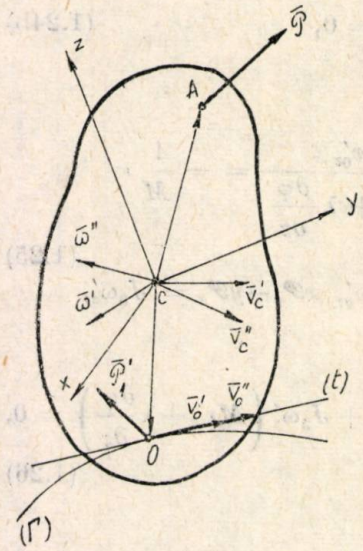


Fig. 2

Deoarece legătura este ideală, percuția $\vec{\mathcal{P}}_1$ va fi situată în planul normal la curba (Γ) în punctul 0. Dacă

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0 \qquad (2.1)$$

sînt ecuațiile curbei date, pe care trebuie să se afle punctul 0, atunci percuția $\vec{\mathcal{P}}_1'$ poate fi exprimată astfel

$$\vec{\mathcal{P}}_1' = \lambda_1 \operatorname{grad} \varphi + \lambda_2 \operatorname{grad} \psi, \qquad (2.2)$$

unde λ_1, λ_2 sînt doi scalari necunoscuți.

Pentru determinarea vitezelor $\vec{v}_0''$ și $\vec{\omega}''$ și a percuției $\vec{\mathcal{P}}_1'$ se aplică teorema impulsului (1.1) și teorema momentului cinetic (1.6).

Proiectînd aceste relații vectoriale pe axele Cx, Cy, Cz se obține următorul sistem de ecuații:

$$M[v_{0x}'' - v_{0x}' - z_0(\omega_y'' - \omega_y') + y_0(\omega_z'' - \omega_z')] = \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial x} + \mathcal{P}_x,$$

$$M[v_{0y}'' - v_{0y}' - x_0(\omega_z'' - \omega_z') + z_0(\omega_x'' - \omega_x')] = \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial y} + \mathcal{P}_y,$$

$$M[v_{0z}'' - v_{0z}' - y_0(\omega_x'' - \omega_x') + x_0(\omega_y'' - \omega_y')] = \lambda_1 \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \lambda_2 \frac{\partial \psi}{\partial z} + \mathcal{P}_z, \qquad (2.3)$$

$$J_1(\omega_x'' - \omega_x') = \lambda_1 \left(y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} - z_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \lambda_2 \left(y_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} - z_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + y\mathcal{P}_z - z\mathcal{P}_y,$$

$$J_2(\omega_y'' - \omega_y') - \lambda_1 \left(z_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) + \lambda_2 \left(z_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} - x_0 \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + z\mathcal{P}_x - x\mathcal{P}_z,$$

$$J_3(\omega_z'' - \omega_z') = \lambda_1 \left(x_0 \frac{\partial \varphi}{\partial y} - y_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \lambda_2 \left(x_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} - y_0 \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + x\mathcal{P}_y - y\mathcal{P}_x.$$

Întrucît saltul vitezei punctului O, în intervalul ciocnirii este situat pe tangenta (t) la curbă împreună cu vitezele $\vec{v}_0'$, $\vec{v}''_0$, se pot scrie condiţiile de legătură

$$(\vec{v}_0'' - \vec{v}_0')\text{grad}\,\varphi = 0,\ (\vec{v}_0'' - \vec{v}_0')\cdot\text{grad}\,\psi = 0. \tag{2.4}$$

În continuare vom multiplica primele trei ecuaţii ale sistemului (2.3) prin $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ şi, respectiv, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$ şi le vom aduna pe coloană; se obţine o relaţie, care, ţinînd seama şi de (2.4a), devine

$$(\omega_x'' - \omega_x')\left(y_0\frac{\partial\varphi}{\partial z} - z_0\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + (\omega_y'' - \omega_y')\left(z_0\frac{\partial\varphi}{\partial x} - x_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) +$$

$$+ (\omega_z'' - \omega_z')\left(x_0\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) = -\frac{1}{M}[\lambda_1(\nabla\varphi)^2 + \lambda_2(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi) + \vec{\mathscr{P}}\cdot\nabla\varphi]. \tag{2.5}$$

Înmulţind aceleaşi ecuaţii cu $\frac{\partial\psi}{\partial x}$, $\frac{\partial\psi}{\partial y}$, $\frac{\partial\psi}{\partial z}$ şi însumînd pe coloană se obţine o altă relaţie, care, împreună cu (2.4 b), conduce la

$$(\omega_x'' - \omega_x')\left(y_0\frac{\partial\psi}{\partial z} - z_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + (\omega_y'' - \omega_y')\left(z_0\frac{\partial\psi}{\partial x} - x_0\frac{\partial\psi}{\partial z}\right) +$$

$$+ (\omega_z'' - \omega_z')\left(x_0\frac{\partial\psi}{\partial y} - y_0\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = -\frac{1}{M}[\lambda_2(\nabla\psi)^2 + \lambda_1(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi) + \vec{\mathscr{P}}\cdot\nabla\psi]. \tag{2.6}$$

Se introduc în relaţiile (2.5), (2.6) salturile $\omega_x'' - \omega_x'$, $\omega_y'' - \omega_y'$, $\omega_z'' - \omega_z'$, date de sistemul (2.3) şi se obţine un sistem de ecuaţii din care rezultă parametrii λ_1 şi λ_2.

Revenind la sistemul (2.3), se introduc valorile scalarilor λ_1, λ_2 şi se obţin componentele vitezei unghiulare : ω_x'', ω_y'', ω_z'', iar apoi componentele vitezei punctului O : v_{0x}'', v_{0y}'', v_{0z}'', la sfîrşitul ciocnirii.

În cazul particular în care punctul O coincide cu centrul de greutate C, vom obţine

$$\lambda_1 = \frac{(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)(\vec{\mathscr{P}}\cdot\nabla\psi) - (\nabla\psi)^2(\vec{\mathscr{P}}\cdot\nabla\varphi)}{(\nabla\varphi)^2(\nabla\psi)^2 - (\Delta\varphi\cdot\nabla\psi)^2},$$

$$\lambda_2 = \frac{(\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)(\mathscr{P}\cdot\nabla\varphi) - (\nabla\varphi)^2(\mathscr{P}\cdot\nabla\psi)}{(\nabla\varphi)^2(\nabla\psi)^2 - (\nabla\varphi\cdot\nabla\psi)^2}, \tag{2.7}$$

$$\vec{v}_0'' = \vec{v}_0'' + \frac{1}{M}(\vec{\mathscr{P}} + \lambda_1\nabla\varphi + \lambda_2\nabla\psi),$$

$$\omega_x'' = \omega_x' + \frac{1}{J_1}(y\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y),\ \omega_y'' = \omega_y' + \frac{1}{J_2}(z\mathscr{P}_x - x\mathscr{P}_z),\ \omega_z'' = \omega_z' + \frac{1}{J_3}(x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x).$$

CAZURI POSIBILE

1°. Pentru ca mişcarea rigidului la sfîrşitul ciocirii să reprezinte o translaţie instantanee, cu viteza $\vec{v}_0''$, percuţia va fi aplicată în punctele dreptei definită de două din ecuaţiile (1.13) şi va satisface relaţia (1.14).

2°. Pentru ca mişcarea rigidului la sfîrşitul ciocnirii să corespundă unei rotaţii instantanee, cu viteza unghilară $\vec{\omega}''$, în jurul unei axe care să treacă prin punctul I (a, b, c) al rigidului, sînt necesare condiţiile (1.16), care, ţinînd seama de (2.7), devin

$$\left(\frac{b\mathscr{P}_y}{J_3}+\frac{c\mathscr{P}_z}{J_2}\right)x-\frac{b\mathscr{P}_x}{J_3}y-\frac{c\mathscr{P}_x}{J_2}z=\frac{\mathscr{P}_x}{M}+v_{0x}'-b\omega_z'+c\omega_y'+\frac{\lambda_1}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\frac{\lambda_2}{M}\frac{\partial\psi}{\partial x},$$

$$-\frac{a\mathscr{P}_y}{J_3}x+\left(\frac{c\mathscr{P}_z}{J_1}+\frac{a\mathscr{P}_x}{J_3}\right)y-\frac{c\mathscr{P}_y}{J_1}z=\frac{\mathscr{P}_y}{M}+v_{0y}'-c\omega_x'+a\omega_z'+\frac{\lambda_1}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\frac{\lambda_2}{M}\frac{\partial\psi}{\partial y}, \tag{28}$$

$$-\frac{a\mathscr{P}_z}{J_2}x-\frac{b\mathscr{P}_z}{J_1}y+\left(\frac{a\mathscr{P}_x}{J_2}+\frac{b\mathscr{P}_y}{J_1}\right)z=\frac{\mathscr{P}_z}{M}+v_{0z}'-a\omega_y'+b\omega_x'+\frac{\lambda_1}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\lambda_2}{M}\frac{\partial\psi}{\partial z}.$$

Deoarece determinantul principal Δ este nul, sistemul (2.8) va fi compatibil şi simplu determinat dacă şi determinantul caracteristic Δ_z este egal cu zero.

Efectuînd calculele se obţine condiţia

$$\vec{CI}\cdot(\vec{\mathscr{P}}+M\vec{v}_0'+\lambda_1\nabla\varphi+\lambda_2\nabla\psi)=0, \tag{2.9}$$

care va fi satisfăcută de componentele $\mathscr{P}_x$, $\mathscr{P}_y$, $\mathscr{P}_z$ ale percuţiei exterioare aplicate.

Cazul fixării brusce a punctului I al rigidului, se deduce ca mai sus, făcînd $x=a$, $y=b$, $z=c$, în rezultatele precedente.

Analizînd situaţia unei rotaţii instantanee în jurul centrului de greutate $(a=0,\ b=0,\ c=0)$, rezultă condiţiile

$$\frac{\mathscr{P}_x+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial x}}{v_{0x}'}=\frac{\mathscr{P}_y+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y}+\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial y}}{v_{0y}'}=$$

$$=\frac{\mathscr{P}_z+\lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial z}}{v_{0z}'}=-M. \tag{2.10}$$

3°. Pentru ca mişcarea solidului la sfîrşitul ciocnirii să fie caracterizată printr-o distribuţie de viteze a unei mişcări elicoidale în jurul unei axe trecînd prin punctul I (a, b, c) se impun condiţii analoage cu (1.21).

Dacă se analizează, pentru simplificare, cazul mişcării elicoidale în jurul unei axe care trece prin centrul de greutate ($a = 0$, $b = 0$, $c = 0$), se obţine sistemul

$$y\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y = -J_1\omega_x' + \beta J_1\left(\frac{\mathscr{P}_x}{M} + v_{0x}' + \frac{\lambda_1}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\lambda_2}{M}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),$$

$$z\mathscr{P}_x - x\mathscr{P}_z = -J_2\omega_y' + \beta J_2\left(\frac{\mathscr{P}_y}{M} + v_{0y}' + \frac{\lambda_1}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\lambda_2}{M}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right), \quad (2.11)$$

$$x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x = -J_3\omega_z' + \beta J_3\left(\frac{\mathscr{P}_z}{M} + v_{0z}' + \frac{\lambda_1}{M}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\lambda_2}{M}\frac{\partial\psi}{\partial z}\right),$$

şi o condiţie analoagă cu (1.23)

$$J_1\omega_x'\mathscr{P}_x + J_2\omega_y'\mathscr{P}_y + J_3\omega_y'\mathscr{P}_z = \frac{\beta}{M}\left[J_1\mathscr{P}_x\left(\mathscr{P}_x + Mv_{0x}' + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \right.$$

$$+ J_2\mathscr{P}_y\left(\mathscr{P}_y + Mv_{0y}' + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \quad (2.12)$$

$$\left. + J_3\mathscr{P}_z\left(\mathscr{P}_z + Mv_{0z}' + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right],$$

unde

$$\beta = \frac{|\vec{\omega}''|}{|\vec{v}''|}.$$

4°. Pentru ca corpul material studiat să se oprească brusc datorită aplicării unei singure percuţii exterioare $\vec{\mathscr{P}}$, într-un anumit punct, se impun condiţiile (1.24 a), (1.24 b) şi se obţin sistemul

$$\frac{v_{0x}'}{\mathscr{P}_x + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial x}} = \frac{v_{0y}'}{\mathscr{P}_y = \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial y}} =$$

$$= \frac{v_{0z}'}{\mathscr{P}_z + \lambda_1\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \lambda_2\frac{\partial\psi}{\partial z}} = -\frac{1}{M}, \quad (2.13)$$

$$y\mathscr{P}_z - z\mathscr{P}_y = -J_1\omega_x', \; z\mathscr{P}_x - x\mathscr{P}_z = -J_2\omega_y',$$

$$x\mathscr{P}_y - y\mathscr{P}_x = -J_3\omega_y',$$

împreună cu condiția

$$\vec{K}'_c \cdot (M\vec{v}'_0 + \lambda_1 \nabla\varphi + \lambda_2 \nabla\psi) = 0. \tag{2.14}$$

Așadar percuția $\vec{\mathscr{P}}$ va fi aplicată într-un punct al dreptei definită de ecuațiile

$$y = \frac{Mv'_{0y} + \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \lambda_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial y}}{Mv'_{0x} + \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial x}} x - \frac{J_3\omega'_z}{Mv'_{0x} + \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial x}}, \tag{2.15a}$$

$$z = \frac{Mv'_{0x} + \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial z} + \lambda_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial z}}{Mv'_{0x} + \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial x}} x + \frac{J_2\omega'_y}{Mv'_{0x} + \lambda_1 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial\psi}{\partial x}}, \tag{2.15b}$$

și va avea suportul situat într-un plan normal la momentul cinetic inițial al rigidului, calculat față de centrul de greutate.

Primită la redacție la 23 septembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. V. VÂLCOVICI, ȘT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanică teoretică*, Edit. tehnică, 1968.
2. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*, Edit. Academiei, 1970.
3. ȘT. STAICU, *Mecanica. Statica și Cinematica*, Litografia Institutului politehnic București, 1973.
4. ȘT. STAICU, *Mecanica. Dinamica și elemente de Mecanica fluidelor*, Litografia Institutului politehnic București, 1973.

DETERMINAREA CÎMPURILOR DE DEPLASĂRI, MOMENTE, FORȚE TĂIETOARE ȘI TENSIUNI, ÎN PLĂCILE GROASE DREPTUNGHIULARE ACȚIONATE HIDROSTATIC, CU LATURILE OPUSE REZEMATE ȘI ÎNCASTRATE,

de G. KÜMBETLIAN

Institutul de marină Constanța

În lucrare se prezintă etapele și concluziile calculului exact al plăcilor plane groase dreptunghiulare, cu laturile opuse rezemate, respectiv, încastrate, acționate hidrostatic, în ipoteza creșterii sarcinii spre latura încastrată sau spre latura rezemată. Calculul s-a făcut pe baza rezolvării problemei antimediane a teoremei mobilității elastice, pentru încovoierea cilindrică.

Pentru fiecare caz în parte s-a determinat variația deplasărilor, momentelor, forțelor și tensiunilor, precum și eroarea teoriei tehnice, care poate ajunge pînă la 19,5%.

I. PREMISE PENTRU CALCUL

La baza rezolvării problemei de față stă teoria exactă a plăcilor groase [4] și soluțiile problemei antimediane a plăcilor, [5] sub încărcări laterale normale, date de o funcție armonică p. Calculul tensiunilor, momentelor și al forțelor rezultate pe înălțimea plăcii și pe unitatea de lungime se face cu ajutorul funcțiilor deplasărilor, considerate ca variind proporțional cu puteri impare, respectiv pare ale distanței z față de planul median. Considerînd cîmpul antimedian triarmonic asociat încovoierii plăcilor și limitînd analiza la cazul unor deplasări transversale avînd o lege de variație dată de un polinom de gradul cinci în raport cu variabila transversală, se obține soluția de încovoiere căutată.

În cazul încovoierii cilindrice a plăcilor plane dreptunghiulare, pentru a satisface condiția de armonicitate, p trebuie să fie de forma :

$$p = P + Qx \text{ sau } p = Qx \quad (p_{,x} = Q\,;\; p_{,xx} = 0), \tag{1}$$

ceea ce duce, pentru deplasarea planului median, la soluția

$$Dw = R + Sx + T\frac{x^2}{2} + U\frac{x^3}{3!} + P\frac{x^4}{4!} + Q\frac{x^5}{5!}. \tag{2}$$

Cu acestea, expresiile eforturilor și tensiunilor devin :

— pentru momentul încovoietor :

$$M = -Dw_{,xx} - \frac{8-3\nu}{40(1-\nu)} h^2 p, \tag{3}$$

— pentru forța tăietoare :

$$T = -D\Delta w_{,x} - \frac{8-3\nu}{40(1-\nu)} h^2 p_{,x}\,; \quad [\Delta w_{,x} = (w_{,xx})_{,x}], \tag{4}$$

— pentru tensiunea normală maximă :

$$\sigma_{max.} = -\frac{1}{Wy} Dw_{,xx} - \frac{4-\nu}{4(1-\nu)} p \left(Wy = \frac{h^2}{6}\right), \tag{5}$$

— pentru tensiunea tangențială maximă :

$$\tau_{max.} = -\frac{3}{2h} (D w_{,xx})_{,x} - \frac{5-2\nu}{1-\nu} \cdot \frac{Qh}{16}. \tag{6}$$

II. SITUAȚIA ÎN CARE SARCINA CREȘTE SPRE LATURA ÎNCASTRATĂ (fig. 1)

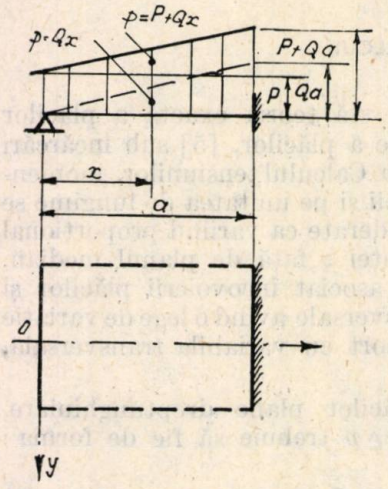


Fig. 1

Se consideră placa din figura 1 funcția deplasării (2) I, precum și condițiile de margine :

$$Dw(0) = 0\,; Dw(a) = 0, \quad Dw'(a) = 0 \text{ și } M(0) = 0. \tag{1}$$

Aplicînd condițiile (1) obținem

$$Dw(0) = R = 0 \tag{2}$$

și

$$Dw(a) = Sa + T\frac{a^2}{2} + U\frac{a^3}{6} + P\frac{a^4}{24} + Q\frac{a^5}{120} = 0 \tag{3}$$

sau

$$S + T\frac{a}{2} + U\frac{a^2}{6} + P\frac{a^3}{24} + Q\frac{a^4}{120} = 0$$

și

$$Dw'(a) = S + Ta + U\frac{a^2}{2} + P\frac{a^3}{6} + Q\frac{a^4}{24} = 0. \tag{4}$$

Momentul se poate scrie pentru $k^2 = \frac{8-3\nu}{1-\nu}\left(\frac{h}{a}\right)^2$

$$M = -Dw_{,xx} - \frac{1}{40}k^2a^2p\,;\quad \left(Dw_{,xx} = T + Ux + P\frac{x^2}{2} + Q\frac{x^3}{3!}\right) \tag{5}$$

și, din ultima condiție (1), rezultă

$$M(0) = -T - \frac{1}{40}k^2a^2P = 0, \text{ deci } T = -\frac{1}{40}k^2a^2P, \tag{6}$$

iar din sistemul constituit cu ecuațiile (3) și (4) în care s-a înlocuit T, rezultă

$$U = -\frac{3}{8}\left(1 - \frac{k^2}{10}\right)Pa - \frac{Qa^2}{10} \tag{7}$$

și

$$S = \frac{1}{16}\left(\frac{k^2}{10} + \frac{1}{3}\right)Pa^3 + \frac{Qa^4}{120}. \tag{8}$$

Introducînd (2), (6), (7) și (8) în (2) I, obținem funcția deplasării

$$Dw = \frac{P}{240}\left[10x^4 - \frac{3}{2}(10 - k^2)ax^3 - 3k^2a^2x^2 + \frac{1}{2}(3k^2 + 10)a^3x\right] +$$

$$+ \frac{Q}{120}(x^5 - 2a^2x^3 + a^4x). \tag{9}$$

Problema se rezolvă pe baza principiului suprapunerii efectelor sarcinilor, considerînd placa încărcată succesiv fie numai cu sarcina uniform distribuită $p = P$ fie numai cu sarcina pur hidrostatică $p = Qx$.

Se determină pentru fiecare caz în parte :

deplasările : $Dw_P = \alpha_P\, Pa^4$ și $Dw_Q = \alpha_Q\, Qa^5$, (10)

momentele : $M_P = \mu_P\, Pa^2$ și $M_Q = \mu_Q\, Qa^3$, (11)

forțele tăietoare : $T_P = \varphi_P\, Pa$ și $T_Q = \varphi_Q\, Qa^2$ (12)

și se acceptă că sarcina Qa este o fracțiune β din sarcina P

$$Qa = \beta P. \tag{13}$$

Mărimile rezultate, se vor putea calcula atunci prin însumarea mărimilor din aceeaşi secţiune, pentru fiecare caz în parte. Astfel :

Deplasarea totală, va fi :

$$Dw = Dw_P + Dw_Q = \alpha_P P a^4 + \alpha_Q Q a^5 = (\alpha_P + \beta\alpha_Q) P a^4. \quad (14)$$

Momentul total va fi $M = (\mu_P + \beta\mu_Q) P a^2.$ (15)

Forţa tăietoare totală $T = (\varphi_P + \beta\varphi_Q) P a.$ (16)

A. CAZUL PLĂCII SUB SARCINA UNIFORM DISTRIBUITĂ $p = P$

§1. *Deplasarea transversală în planul median*

Dw_P se obţine din (9) I, în care $Q = 0$,

$$Dw_P = \frac{P}{240}\left[10x^4 - \frac{3}{2}(10 - k^2)\, ax^3 - 3k^2a^2x^2 + \frac{1}{2}(3k^2 + 10)\, a^3x\right]. \quad (1)$$

În teoria tehnică, $h/a \to 0$, ceea ce duce la

$$Dw_P = \frac{P}{240}\,[10x^4 - 15ax^3 + 5a^3x] = \frac{P}{48}\,(2x^4 - 3ax^3 + a^3x), \quad (2)$$

pentru care $w_{P\max.} = \alpha_{P\max.} \dfrac{Pa^4}{D}$ în care $\alpha_{P\max.} = \dfrac{1}{185} = 5{,}4 \times 10^{-3}$ (3)

corespunzător secţiunii $x = 0{,}4215\ a$ (4)

§2. *Determinarea momentelor încovoietoare*

Se face cu relaţia (3)I, care devine :

$$Mp = -Dw_{,xx} - \frac{P}{40}\, k^2a^2, \quad (1)$$

în care

$$k^2 = \frac{8 - 3\nu}{1 - \nu}\left(\frac{h}{a}\right)^2 \quad (2)$$

şi ale cărui valori se dau în tabelul nr. 1

Tabelul 1

cu valorile coeficientului $K^2 \cdot 10^2$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	0	0	0	0
1/20	2	2,35	2,625	3,25
1/10	8	9,4	10,5	13
1/5	32	37.6	42	52

În relația (1)

$$Dw_{,xx} = \frac{P}{240}\,[120\,x^2 - 9\,(10 - k^2)\,ax - 6\,k^2a^2], \tag{3}$$

cu acestea, expresia momentului M_P, devine

$$M_P = -\frac{P}{2}\left[x^2 - \frac{3}{40}\,(10 - k^2)\,ax\right] = \mu_P\,Pa^2, \tag{4}$$

în care $$\mu_P = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \frac{3}{40}\,(10 - k^2)\,\frac{x}{a}\right]. \tag{5}$$

Pe latura rezemată $(x = 0)$ $\mu_{P_0} = 0$ și $M_{P_0} = 0$. (6)

Pe latura încastrată $(x = a)$, $\mu_{Pa} = -\dfrac{10 + 3k^2}{80}$ și $M_{Pa} = \mu_{Pa}pa^2$. (7)

Secțiunea de moment maxim se obține din condiția

$$\mu_P,\left(\frac{x}{a}\right) = 0, \tag{8}$$

din care rezultă $$(x/a)_{\max} = \frac{3(10 - k^2)}{80} \tag{9}$$

și pentru care, $$\mu_{P_{\max}} = \frac{9(10 - k)^2}{12\,800}. \tag{10}$$

Cu acestea expresia momentului încovoietor maxim devine

$$M_{P_{\max}} = \mu_{P_{\max.}}\,Pa^2 = \frac{9(10 - k^2)^2}{12800}\,Pa^2. \tag{11}$$

În teoria tehnică se consideră că $h/a \to 0$ și deci $k^2 \to 0$.

În acest caz, $$M_{Pa} = -\frac{1}{8}\,pa^2 = -\,0{,}125\,Pa^2 \tag{12}$$

și

$$M_{P_{\max}} = \frac{9}{128}\,Pa^2 = 0{,}0703\,Pa^2. \tag{13}$$

$M_{P_{\max}}$ apare în secțiunea $x = \dfrac{3}{8}\,a = 0{,}375\,a$ și este mai mic decît valoarea absolută a mometului Mp_a

În cazul plăcilor groase, $h/a \neq 0$, aststfel încît momentele încovoietoare M_{Pa} și $M_{P_{\max}}$ vor prezenta variații atît funcție de h/a cît și de ν.

De asemenea, secţiunea în care apare momentul maxim pozitiv, variază atît cu h/a, cît şi cu ν, după cum se vede în tabelul nr. 2, cu valorile rapoartelor (x/a) maxim.

Tabelul 2

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	0,375	0,375	0,375	0,375
1/20	0,37425	0,37412	0,37402	0,37318
1/10	0,372	0,37148	0,37106	0,37013
1/5	0,363	0,3609	0,35925	0,3555

Se observă că pe măsura creşterii valorilor h/a şi ν, secţiunea în care apare momentul maxim pozitiv se apropie de reazem astfel încît pentru $h/a = 1/5$ şi $\nu = 1/2$, eroarea teoriei tehnice este de 5,2%.

Tabelul 3

cu valorile coeficientului $\mu_{P_{max}} \cdot 10^2$

h/a	0	1/5	1/3	1/2
0	7,03	7,03	7,03	7,03
1/20	7,003	6,998	6,994	6,963
1/10	6,919	6,899	6,884	6,849
1/5	6,588	6,512	6,453	6,319

Momentul maxim se calculează cu relaţia (11) şi valorile $\mu_{P_{max}}$ din tabelul nr. 3 şi diagrama nr. 1.

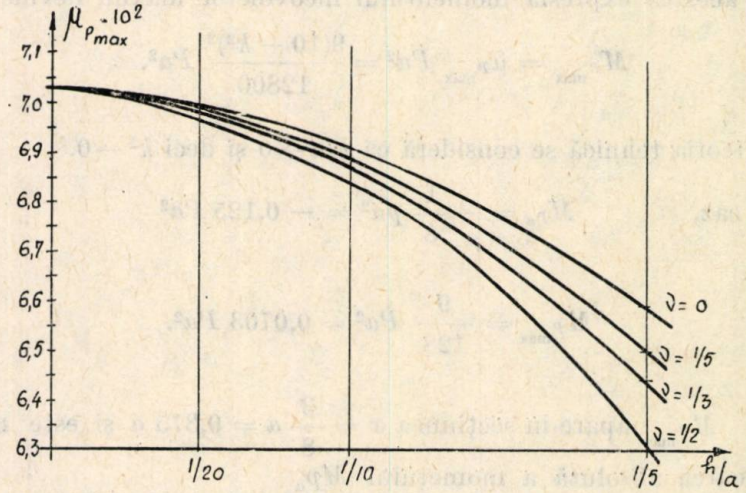


Diagrama 1, cu valorile $\mu_{P_{max}} 10^2$.

Se observă din tabel că, pentru valori h/a și ν din ce în ce mai mari, valoarea coeficientului $\mu_{P_{max}}$ scade, astfel încît, pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$ eroarea teoriei tehnice este de 10,2%.

Se observă, de asemenea, că diferențe mai mari apar pentru valori h/a mai mari, adică odată cu creșterea grosimii relative a plăcii.

Momentul încovoietor pe latura încastrată ($x = a$) se calculează cu relația (7) și valorile μ_{Pa} din tabelul nr. 4 și diagrama nr. 2.

Tabelul 4

cu valorile coeficientului $\mu_{Pa}\,10^2$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	12,5	12,5	12,5	12,5
1/20	12,575	12,588	12,598	12,622
1/10	12,8	12,852	12,894	12,987
1/5	13,7	13,91	14,075	14,45

Se observă că pentru valori h/a și ν din ce în ce mai mari, coeficientul μ_{Pa} crește în valoare absolută, astfel încît, pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$, eroarea teoriei tehnice este de 15,6%.

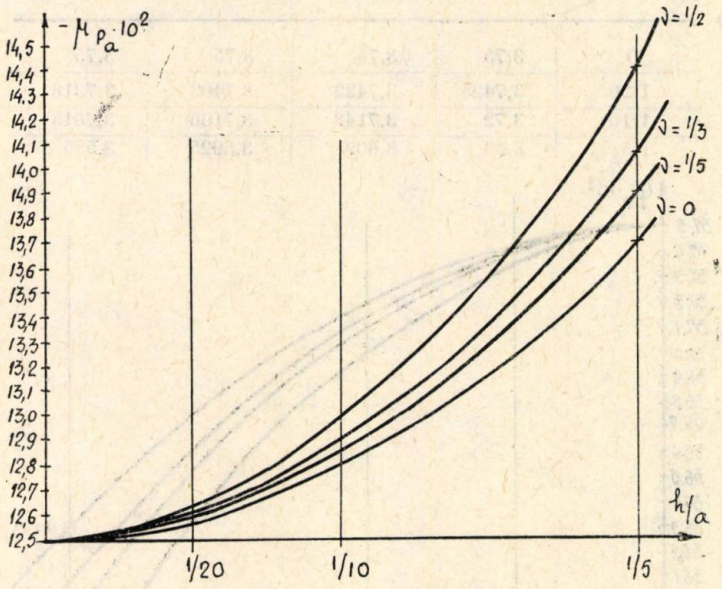


Diagrama 2, cu valorile $-\mu_{Pa} \cdot 10^2$.

§3. *Determinarea forțelor tăietoare*

Se face cu relația (4) în care

$$D\Delta w_{,x} = (Dw_{,xx})_{,x} = \frac{P}{80}\,[80x - 3(10 - k^2)\,a] \text{ și } p_{,x} = 0. \qquad (1)$$

Rezultă $$T_P = -\frac{P}{80}\,[80x - 3(10 - k^2)\,a] = \varphi_P\, Pa, \tag{2}$$

în care

$$\varphi_P = -\frac{1}{80}\left[80\,\frac{x}{a} - 3\,(10 - k^2)\right]. \tag{3}$$

Pe latura rezemată ($x = 0$)

$$\varphi_{P_0} = \frac{3(10 - k^2)}{80} \quad \text{și} \quad T_{P_0} = \varphi_{P_0} Pa = \frac{3(10 - k^2)}{80}\,Pa. \tag{4}$$

Pe latura încastrată ($x = a$)

$$\varphi_{Pa} = -\frac{50 + 3k^2}{80} \quad \text{și} \quad T_{Pa} = \varphi_{Pa} Pa = -\frac{50 + 3k^2}{80}\,Pa. \tag{5}$$

Valoarea maximă absolută a lui T_P, apare pe latura încastrată ($x = a$) și se anulează în secțiunea de moment maxim (9) § 2.

Valorile coeficienților φ_{P_0} și φ_{Pa} sînt date în tabelul nr. 5 și 6 și diagramele nr. 3 și 4.

Tabelul 5

cu valorile coeficientului $\varphi_{P_0} \cdot 10$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	3,75	3,75	3,75	3,75
1/20	3,7425	3,7422	3,7402	3,7318
1/10	3,72	3,7148	3,7106	3,7013
1/5	3,63	3,609	3,5925	3,555

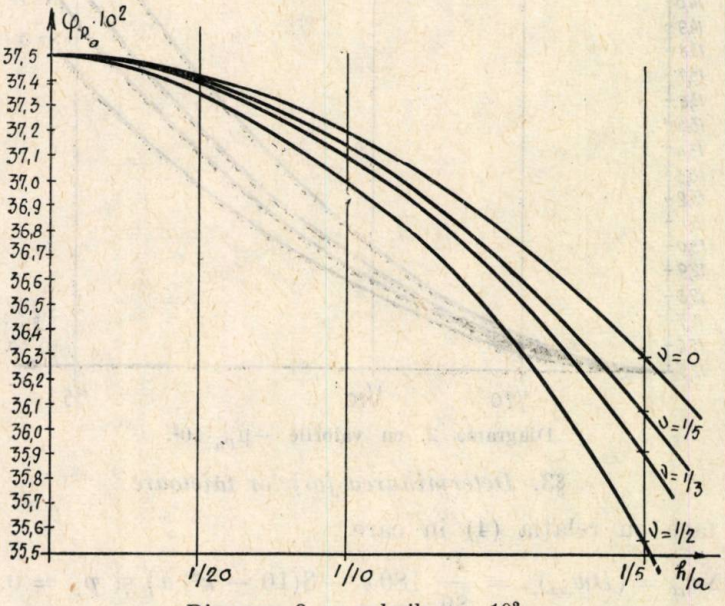


Diagrama 3, cu valorile $\varphi_{P_0} \cdot 10^2$.

Se observă că pe măsura creșterii grosimii relative a plăcii și a lui ν, φ_{P_0} scade astfel încît pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$, eroarea teoriei tehnice, este de 5,2%.

Tabelul 6

cu valorile coeficientului $-\varphi_{P_a} \cdot 10$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	6,25	6,25	6,25	6,25
1/20	6,2575	6,2588	6,2598	6,2622
1/10	6,28	6,2852	6,2894	6,2987
1/5	6,37	6,391	6,4075	6,445

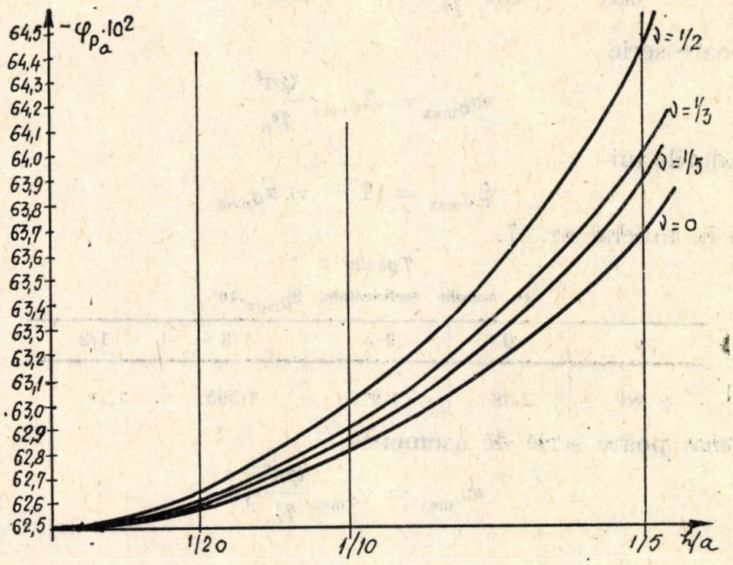


Diagrama 4, cu valorile $-\varphi_{P_a} \cdot 10^2$.

Pe măsura creșterii grosimii relative a plăcii și lui ν, φ_{P_a} crește în valoare absolută, astfel încît, pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$, eroarea teoriei tehnice este de 3,12%

§4. *Tensiunile normale și tangențiale*

se calculează cu relațiile (5) și (6)I, care devin

$$\sigma_{max} = \frac{M}{W_y} + \frac{P}{5} \qquad \left(W_y = \frac{h^2}{6}\right) \tag{1}$$

și

$$\tau_{max} = \frac{3T}{2h}. \tag{2}$$

B. Cazul plăcii sub sarcină hidrostatică $p = Qx$

§5. *Deplasarea transversală în planul median*

Introducînd în (9)I condiția $P = 0$, obținem

$$Dw_Q = \frac{Q}{120}(x^5 - 2a^2x^3 + a^4x). \tag{1}$$

Secțiunea de deplasare maximă, se obține pentru condiția

$$Dw_{,x} = 0, \tag{2}$$

din care rezultă

$$x = 0{,}448\, a \tag{3}$$

și pentru care

$$w_{Q_{max}} = \alpha_{Q_{max}} \frac{Qa^5}{D}; \qquad \alpha_{Q_{max}} = 2{,}38 \times 10^{-3}. \tag{4}$$

Se mai poate scrie

$$w_{Q_{max}} = \beta_{Q_{max}} \frac{Qa^5}{D_0}, \tag{5}$$

în care valorile lui

$$\beta_{Q_{max}} = (1 - \nu)\, \alpha_{Q_{max}} \tag{6}$$

sînt date în tabelul nr. 7.

Tabelul 7

cu valorile coeficientului $\beta_{Q_{max}} \cdot 10^3$

ν	0	1/5	1/3	1/2
$\beta.10^3$	2,38	1,915	1,595	1,195

Se mai poate scrie de asemenea,

$$w_{Q_{max}} = \gamma_{Q_{max}} \frac{Qa^2}{E_0}, \tag{7}$$

în care

$$\gamma_{Q_{max}} = \frac{12\, \beta_{Q_{max}}}{(k|a|^3)}. \tag{8}$$

Valorile coeficientului $\gamma_{Q_{max}}$ sînt date în tabelul nr. 8

Tabelul 8

cu valorile coeficientului $\gamma_{Q_{max}}$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
1/20	229	184	153	114,5
1/10	28,6	23	19,1	14,3
1/5	3,58	2,88	2,39	1,795

§6. *Determinarea momentelor încovoietoare*

se face cu relația (3)I, care devine :

$$M_Q = - Dw_{,xx} - \frac{1}{40} k^2 a^2 p \tag{1}$$

și în care

$$Dw_{,xx} = \frac{Q}{30}(5x^3 - 3a^2 x) \text{ și } p = Qx. \tag{2}$$

Introducînd expresiile (2) în relația (1), obținem

$$M_Q = - \frac{Q}{120}[20\, x^3 - 3\,(4 - k^2)\, a^2 x] = \mu_Q Q a^3, \tag{3}$$

în care

$$\mu_Q = - \frac{1}{120}\left[20\left(\frac{x}{a}\right)^3 - 3(4 - k^2)\frac{x}{a}\right]. \tag{4}$$

Pe latura rezemată ($x = 0$),

$$\mu_{Q_0} = 0 \quad \text{și} \quad M_{Q_0} = 0. \tag{5}$$

Pe latura încastrată ($x = a$)

$$\mu_{Q_a} = - \frac{8 + 3k^2}{120} \tag{6}$$

și

$$M_{Q_a} = \mu_{Q_a} Q a^3 = - \frac{8 + 3k^2}{120} Q a^3. \tag{7}$$

Secțiunea de moment maxim, se obține din condiția

$$\mu_Q,\ (x/a) = 0, \tag{8}$$

din care rezultă

$$(x/a)_{\max} = \sqrt{\frac{4 - k^2}{20}} \tag{9}$$

și pentru care

$$\mu_{Q\max} = \frac{1}{120}\sqrt{\frac{(4 - k^2)^3}{5}}. \tag{10}$$

Ţinînd cont de relaţiile (3) şi (10), expresia momentului încovoietor maxim, devine

$$M_{Q_{max}} = \mu_{Q_{max}} Qa^3 = \frac{Qa^3}{120}\sqrt{\frac{(4-k^2)^3}{5}}. \tag{11}$$

Momentul se anulează pe intervalul dintre laturile rezemate şi incastrate, în secţiunea definită
prin raportul :

$$(x/a)_0 = \sqrt{\frac{3(4-k^2)}{20}}. \tag{12}$$

În teoria tehnică, $h/a \to 0$ şi $k^2 \to 0$, $\forall\, \nu$.
În acest caz

$$M_{Q_a} = -\frac{Qa^3}{15} = -6{,}66 \times 10^{-2} Qa^3, \tag{13}$$

iar

$$M_{Q_{max}} = 3 \times 10^{-2}\, Qa^3, \text{ la } (x/a)_{max} = 0{,}447. \tag{14}$$

Momentul maxim pe interval, este mai mic decît valoarea absolută a momentului de pe latura încastrată
Anularea momentului are loc în secţiunea

$$x = 0{,}775\, a. \tag{15}$$

În cazul plăcilor groase, $h/a \neq 0$, astfel încît momentele încovoietoare M_{Q_a} şi $M_{Q_{max}}$ vor prezenta variaţii atît funcţie de grosimea relativă a plăcii, cît şi de ν.

De asemenea, va prezenta variaţii cu h/a şi ν şi raportul $(x/a)_{max}$; care defineşte secţiunea în care momentul este maxim, după cum se vede din tabelul nr. 9.

Tabelul 9

cu valorile raportului $(x/a)_{max}$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	0,448	0,448	0,4488	0,448
1/20	0,4461	0,4459	0,4457	0,4454
1/10	0,4427	0,4419	0,4413	0,4399
1/5	0,429	0,4257	0,4231	0,4171

Pe măsura creșterii grosimii relative și lui ν, secțiunea de moment maxim se apropie de latura rezemată astfel încît, pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$, eroarea teoriei tehnice este de 6,9%.

Momentul maxim se calculează cu relația (11), în care $\mu_{Q_{max}}$ iar valorile din tabelul nr. 10 și diagrama nr. 5

Tabelul 10

cu valorile coeficientului $\mu_{Q_{max}} \cdot 10^2$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	3	3	3	3
1/20	2,9591	2,9552	2,9521	2,9452
1/10	2,8924	3,8769	2,8648	2,8373
1/5	2,6309	2,5711	2,5244	2,4194

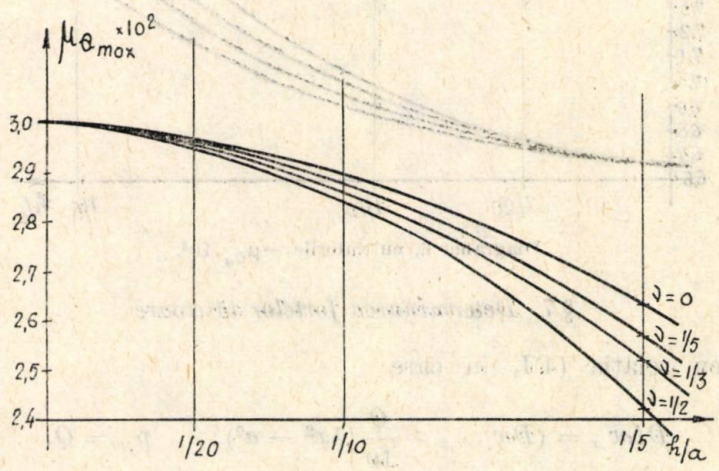


Diagrama 5, cu valorile $\mu_{\theta_{max}} \cdot 10^2$.

Pe măsura creșterii grosimii relative și lui ν $\mu_{Q_{max}}$ deci și valoarea momentului încovoietor maxim scade, astfel încît pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$ eroarea teoriei tehnice devine de 19,36%.

Momentul încovoietor pe latura încastrată ($x = a$) se calculează cu relația (7) și cu valorile coeficientului μ_{Q_a}, din tabelul nr. 11 și diagrama nr. 6.

Pe măsura creșterii grosimii relative și a lui ν valoarea μ_{Q_a}, deci și a momentului încovoietor M_{Q_a} crește, astfel încît, pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$, eroarea teoriei tehnice devine de 19,5%.

Tabelul 11

cu valorile coeficientului $-\mu_{Q_a} \cdot 10^2$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	6,6666	6,6666	6,6666	6,6666
1/20	6,7166	6,7254	6,7323	6,7479
1/10	6,8666	6,9016	6,9292	6,9916
1/5	7,4666	7,0666	7,7166	6,9666

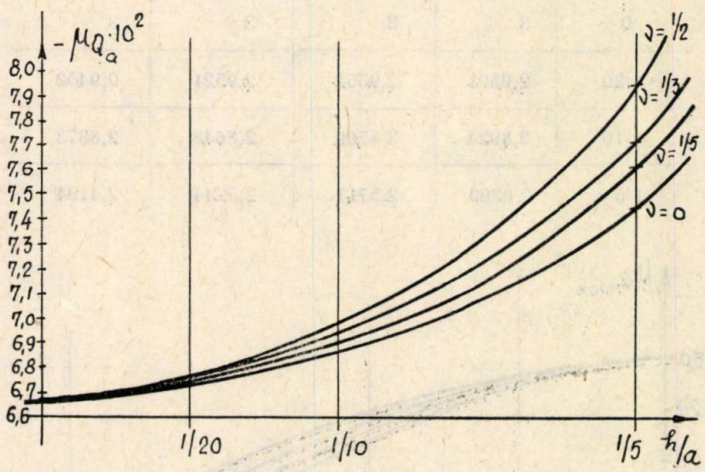


Diagrama 6, cu valorile $-\mu_{Q_a} \cdot 10^2$.

§ 7. *Determinarea forțelor tăietoare*

se face cu relația (4)I, în care

$$D\Delta w_{,x} = (Dw_{,xx})_{,x} = \frac{Q}{10}(5x^2 - a^2); \qquad p_{,x} = Q. \tag{1}$$

Rezultă

$$T_Q = -\frac{Q}{40}[20x^2 - (4 - k^2)\,a^2] = \varphi_Q Q a^2, \tag{2}$$

în care

$$\varphi_Q = -\frac{1}{40}\left[20\left(\frac{x}{a}\right)^2 - (4 - k^2)\right]. \tag{3}$$

Pe latura rezemată ($x = 0$),

$$\varphi_{Q_0} = \frac{4 - k^2}{40} \tag{4}$$

și

$$T_{Q_a} = \varphi_{Q_a} Q a^2 = -\frac{4 - k^2}{40} Q a^2. \tag{5}$$

Pe latura încastrată ($x = a$),

$$\varphi_{Q_a} = -\frac{16 + k^2}{40} \tag{6}$$

și

$$T_{Q_a} = \varphi_{Q_a} Q a^2 = -\frac{16 + k^2}{40} Q a^2. \tag{7}$$

Valoarea maximă absolută a lui T_Q apare pe latura încastrată ($x = a$). Forța tăietoare se anulează în secțiunea de moment maxim.

Valorile coeficienților φ_{Q_a} și φ_{Q_a} sînt redate în tabelele nr. 12 și 13 și diagramele nr. 7 și 8.

Tabelul 12

cu valorile coeficientului φ_{Q_a} 10

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	1	1	1	1
1/20	0,995	0,99412	0,99344	0,99188
1/10	0,98	0,9765	0,97375	0,9676
1/5	0,92	0,906	0,895	0,87

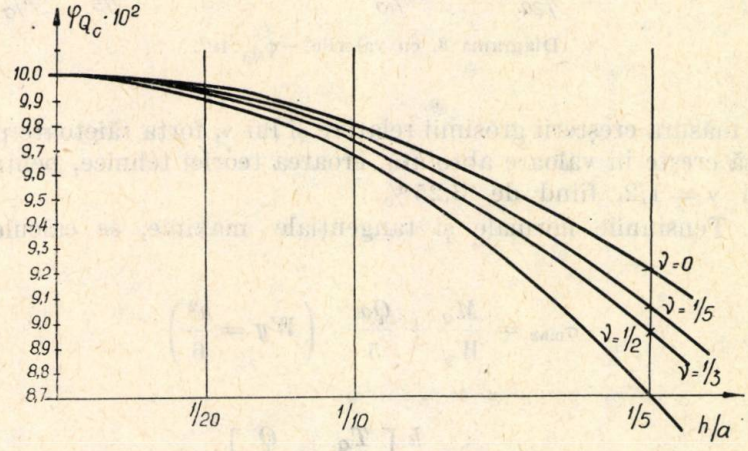


Diagrama 7, cu valorile $\varphi_{Q_a} \cdot 10^2$.

Pe măsura creşterii grosimii relative şi lui ν, valoarea forţei tăietoare pe latura rezemată scade; pentru $h/a = 1/5$ şi $\nu = 1/2$ eroarea teoriei tehnice fiind de 13%.

Tabelul 13

cu valorile coeficientului $\varphi_{Qa} \cdot 10^2$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	4	4	4	4
1/20	4,005	0,40059	4,0066	5,0081
1/10	4,02	4,0235	4,0263	4,0325
1/5	4,08	4,094	4,105	4,13

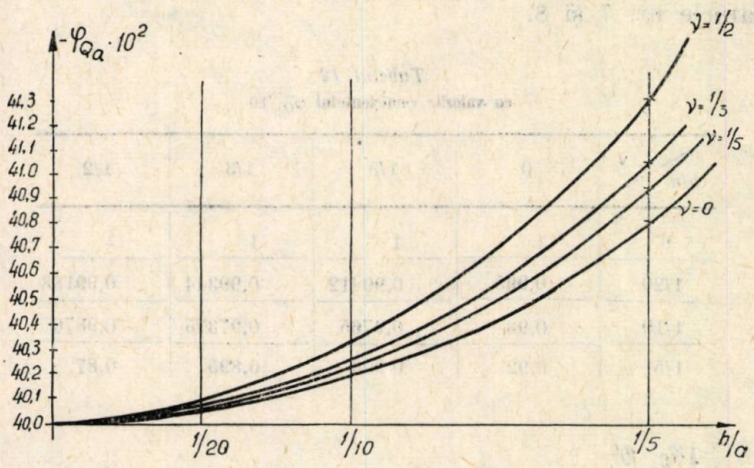


Diagrama 8, cu valorile $-\varphi_{Qa} \cdot 10^2$.

Pe măsura creşterii grosimii relative şi lui ν, forţa tăietoate pe latura încastrată creşte în valoare absolută, eroarea teoriei tehnice, pentru $h/a = 1/5$ şi $\nu = 1/2$, fiind de 3,25%.

§ 8. Tensiunile normale şi tangenţiale maxime, se calculează cu relaţiile

$$\sigma_{max} = \frac{M_Q}{W_y} + \frac{Qx}{5} \quad \left(Wy = \frac{h^2}{6} \right) \tag{1}$$

şi

$$\tau_{max} = \frac{h}{4} \left[\frac{T_Q}{W_y} - \frac{Q}{20} \right] \tag{2}$$

III SITUAȚIA ÎN CARE SARCINA CREȘTE SPRE LATURA REZEMATĂ (FIG. 2)

§9. *Determinarea deplasărilor*

Se consideră funcția deplasării (2)I și condițiile de margine :

$$Dw(0) = 0,\quad Dw(a) = 0,\quad Dw'(0) = 0,\quad M(a) = 0, \text{ deci} \tag{1}$$

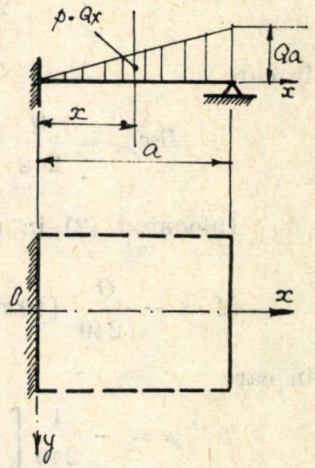


Fig. 2.

aplicînd condițiile (1), obținem din

$$Dw(0)=Q,\ R=0, \text{ din } Dw'(0)=0,\ S=0, \tag{2}$$

din

$$Dw(a)=0,\quad T + U\frac{a}{3} + Q\frac{a^3}{60} = 0 \tag{3}$$

și din $M(a) = 0$,

$$T + U_a + \frac{Qa^3}{6} + \frac{Qa^3}{40}k^2 = 0. \tag{4}$$

Din sistemul constituit cu ecuațiile (3) și (4) rezultă :

$$U = -\frac{3Qa^3}{80}(6 + k^2) \quad \text{și} \quad T = \frac{Qa^3}{240}(14 + 3k^2), \tag{5}$$

Înlocuind R, S, T și U din (2) și (5) în (2)I, obținem funcția deplasării

$$Dw = \frac{Q}{480}[4x^5 - 3(6 + k^2)\,a^2x^3 + (14 + 3k^2)\,a^3x^3]. \tag{6}$$

Deplasarea maximă în teoria tehnică ($h/a \to 0$; $k^2 \to 0$) se obține n secțiunea $x = 0{,}598\,a$, unde

$$Dw_{\max} = \alpha Qa^5, \text{ în care } \alpha = 3{,}04 \times 10^{-3}. \tag{7}$$

Se mai poate scrie

$$w_{\max} = \beta\frac{Qa^5}{D_0} \text{ în care } \beta = (1 - \nu)\,\alpha, \tag{8}$$

β ia valorile din tabelul nr. 14.

Tabelul 14

cu valorile coeficientului $\beta.10^3$

ν	0	1/5	1/3	1/2
$\beta.10^3$	3,04	2,43	2,026	1,52

§ 10. *Determinarea momentelor încovoietoare*

Pentru calculul momentelor se foloseşte relaţia (3)I, care devine

$$M = - Dw_{,xx} - \frac{1}{40} k^2 a^2 p, \tag{1}$$

în care

$$Dw_{,xx} = \frac{Q}{240} [40x^3 - 9(6 + k^2)\, a^2 x + [14 + 3k^2)\, a^3]. \tag{2}$$

Înlocuind (2) în (1), obţinem funcţia

$$M = - \frac{Q}{240} [40x^3 - 3(18 + k^2) a^2 x + (14 + 3k^2)\, a^3] = \mu Q a^3, \tag{3}$$

în care

$$\mu = - \frac{1}{240} \left[40 \left(\frac{x}{a} \right)^3 - 3(18 + k^2) \frac{x}{a} + (14 + 3k^2) \right]. \tag{4}$$

Pe latura încastrată ($x = 0$),

$$\mu_0 = - (14 + 3k^2)/240 \tag{5}$$

şi deci

$$M_0 = \mu_0 Q a^3 = - \frac{14 + 3k^2}{240} Q a^3. \tag{6}$$

Pe latura rezemată ($x = a$)

$$\mu_a = 0 \text{ şi } M_a = 0. \tag{7}$$

Secţiunea de moment maxim se obţine din condiţia

$$\mu, (x/a) = 0, \tag{8}$$

din care rezultă

$$(x/a)_{\max} = \sqrt{\frac{18 + k^2}{40}} \tag{9}$$

şi, pentru care,

$$\mu_{\max} = - \frac{1}{240} \left[14 + 3k^2 - \sqrt{\frac{(18 + k^2)^3}{10}} \right]. \tag{10}$$

Ținînd cont de relațiile (3) și (10), expresia momentului încovoietor maxim devine :

$$M_{\max} = \mu_{\max} Qa^3 = -\frac{Qa^3}{240}\left[14 + 3k^2 - \sqrt{\frac{(18 + k^2)^3}{10}}\right]. \qquad (11)$$

În teoria tehnică, $h/a \to 0$; $k^2 \to 0$, $\forall\, \nu$. În acest caz

$$M_0 = -\frac{7}{120} Qa^3 = -5{,}84 \times 10^{-2} Qa^3 ; \quad M_a = 0 \qquad (12)$$

și

$$M_{\max} = 4{,}23 \times 10^{-2}\, Qa^3, \text{ pentru } (x/a)_{\max} = 0{,}672. \qquad (13)$$

Momentul „maxim" este mai mic decît valoarea absolută a momentului M_0 de pe latura încastrată.

Anularea momentului are loc în secțiunea

$$x = 0{,}275\, a. \qquad (14)$$

În cazul plăcilor groase, $h/a \neq 0$ și $k^2 \neq 0$, astfel încît valoarea momentelor încovoietoare M_0 și $M_{\max}$ va depinde atît de grosimea relativă a plăcii, cît și de ν.

De asemenea, va depinde de aceiași parametri și raportul $(x/a)_{\max}$ care definește secțiunea, în care momentul pe interval este maxim.

Tabelul 15

cu valorile raportului $(x/a)_{\max}$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	0,672	0,672	0,672	0,672
1/20	0,67119	0,67125	0,67131	0,67142
1/10	0,67231	0,67257	0,67277	0,67324
1/5	0,67675	0,67779	0,67860	0,68044

Pe măsura creșterii grosimii relative și valorii ν raportul x/a crește, secțiunea de moment maxim se apropie de latura rezemată, astfel încît, pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$, eroarea teoriei tehnice este de 1,25%.

Momentul încovoietor maxim pe interval se calculează cu relaţia (11) şi cu valorile coeficientului μ_{max} din tabelul nr. 16 şi diagrama nr. 9.

Tabelul 16

cu valorile coeficientului $\mu_{max} \cdot 10^2$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	4,23	4,23	4,23	4,23
1/20	4,2207	4,2192	4,2184	4,2155
1/10	4,1961	4,1904	4,1868	4,1757
1/5	4,0983	4,0758	4,0581	4,0181

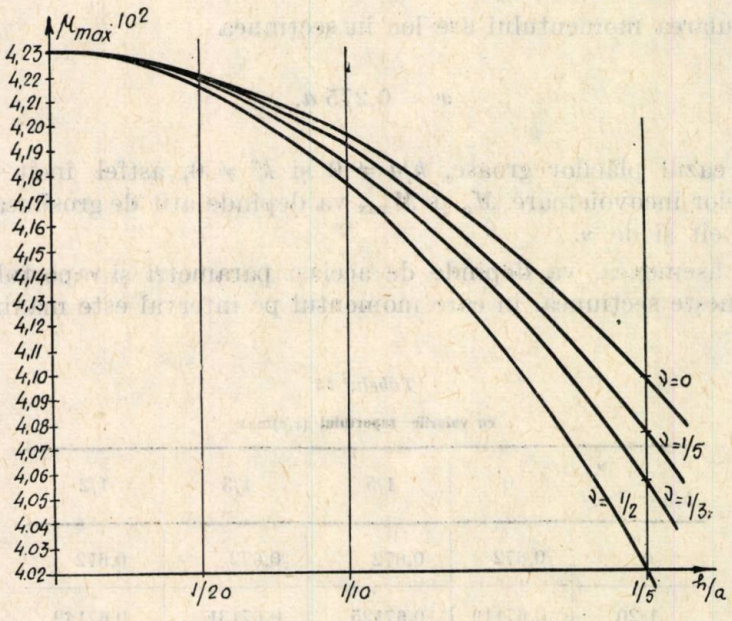


Diagrama 9, cu valorile $\mu_{max} \cdot 10^2$.

Pe măsura creşterii grosimii relative a plăcii şi a lui ν, valorile momentului maxim scad, astfel încît, pentru $h/a = 1/5$ şi $\nu = 1/2$, eroarea teoriei tehnice este de 5%.

Momentul încovoietor pe latura încastrată ($x = 0$) se calculează cu relaţia (6) şi cu valorile coeficientului μ_0, din tabelul 17 şi diagrama nr. 10.

Tabelul 17

cu valorile coeficientului $-\mu_0 \cdot 10^2$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	5,84	5,84	5,84	5,84
1/20	5,8583	5,8626	5,8658	5,8739
1/10	5,9333	5,9508	5,9646	5,9958
1/5	6,2333	6,3033	6,3583	6,4833

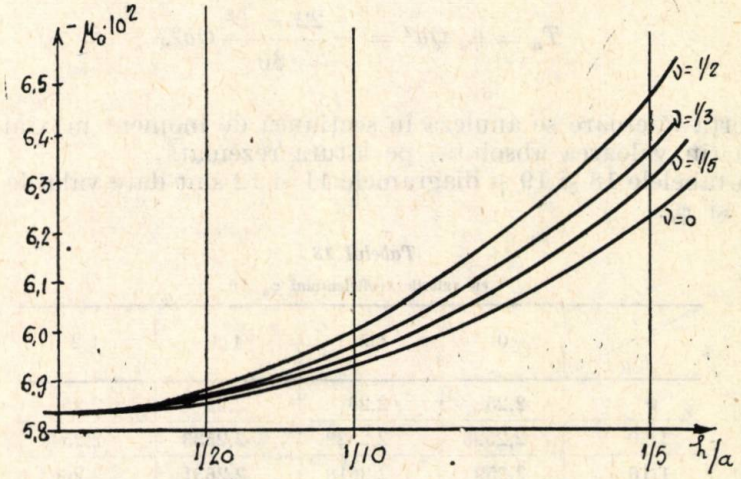


Diagrama 10, cu valorile $-\mu_0 \cdot 10^2$.

Pe măsura creșterii grosimii relative și a lui ν valorile absolute ale momentului încovoietor M_0 cresc, astfel încît, pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$, eroarea teoriei tehnice este de 11%.

§ 11. *Determinarea forțelor tăietoare*

Se folosește în acest scop relația (4)I, în care

$$D\Delta w_{,x} = (Dw_{,xx})_{,x} = \frac{Q}{80}[40x^2 - 3(6 + k^2)\,a^2] \text{ și } p_{,x} = Q. \tag{1}$$

Rezultă

$$T = -\frac{Q}{80}[40x^2 - (18 + k^2)\,a^2] = \varphi Q a^2, \tag{2}$$

în care

$$\varphi = -\frac{1}{80}\left[40\left(\frac{x}{a}\right)^2 - (18 + k^2)\right]. \tag{3}$$

Pe latura încastrată ($x = 0$),

$$\varphi_0 = \frac{18 + k^2}{80} \tag{4}$$

și

$$T_0 = \varphi_0 Q a^2 = \frac{18 + k^2}{80} Q a^2. \tag{5}$$

Pe latura rezemată, ($x = a$),

$$\varphi_a = -\frac{22 - k^2}{80} \tag{6}$$

și

$$T_a = \varphi_a Q a^2 = -\frac{22 - k^2}{80} Q a^2. \tag{7}$$

Forța tăietoare se anulează în secțiunea de moment maxim și devine maximă (în valoarea absolută) pe latura rezemată.

În tabelele 18 și 19 și diagramele 11 și 12 sînt date valorile coeficienților φ_0 și φ_a.

Tabelul 18

cu valorile coeficientului $\varphi_0 .10$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	2,25	2,25	2,25	2,25
1/20	2,2525	2,2529	2,2533	2,2541
1/10	2,259	2,2618	2,2631	2,2663
1/5	2,29	2,297	2,3025	2,315

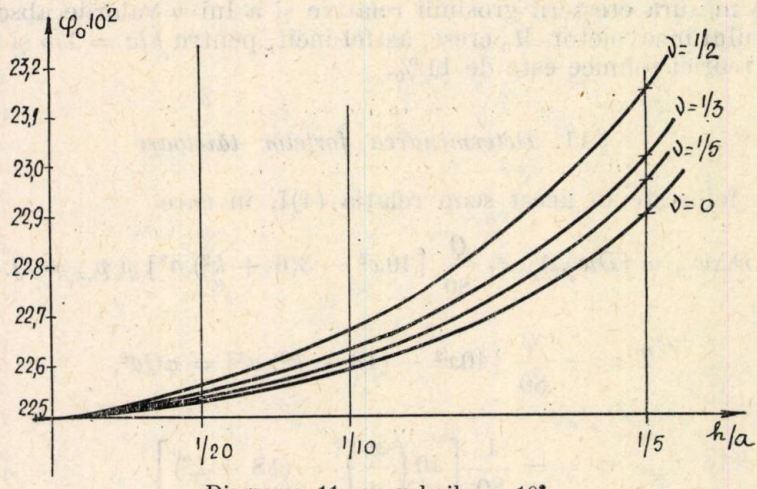


Diagrama 11, cu valorile $\varphi_0 .10^2$.

Valoarea coeficientului φ_0 crește odată cu creșterea grosimii relative și a lui ν, eroarea teoriei tehnice, pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$, fiind de 2,89%.

Tabelul 19

cu valorile coeficientului $-\varphi_a.10$

h/a \ ν	0	1/5	1/3	1/2
0	2,75	2,75	2,75	2,75
1/20	2,7475	2,7471	2,7467	2,7459
1/10	2,740	2,7383	2,7369	2,7338
1/5	2,710	2,703	2,6975	2,685

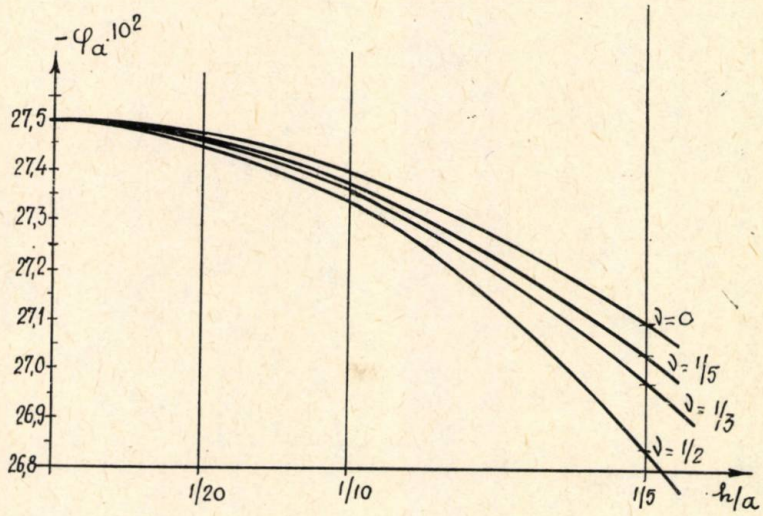


Diagrama 12, cu valorile $-\varphi_a.10^2$.

Valoarea absolută a coeficientului φ_a scade odată cu creșterea grosimii relative și a coeficientului ν, eroarea teoriei tehnice, pentru $h/a = 1/5$ și $\nu = 1/2$, fiind de 2,36%.

§ 12. *Tensiunile normale și tangențiale maxime*

se calculează cu relațiile

$$\tau_{max} = \frac{M}{Wy} + \frac{Qx}{5} \qquad \left(Wy = \frac{h^2}{6}\right), \tag{1}$$

$$\tau_{max} = \frac{h}{4}\left[\frac{T}{Wy} - \frac{Q}{20}\right]. \tag{2}$$

Primită la redacție la 4 noiembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. M. Mișicu, *Grinzi și plăci pe teren elastic*, Bul. științific al Acad. R. S. R., **III** 2—4 (1951).
2. — *Mecanica meditor deformabile*, Edit. Academiei, 1967.
3. — *Teoria mobilității elastice*, Edit. Academiei, 1972.
4. — *Exact theories of thick shells, derived by means of the method of transversal mobility. of physical fields, and correlations with other theories*, Rev. Roum, Sci. Techn. Mec. Appl., **18**, 4, 663—682, (1973).
5. — *Solutions of the antimedian problem for rectangular plates, using real functions*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., **18**, *6*, 1159—1174, (1974).
6. — Încovoiere și torsiune, Edit. Academiei, 1973.
7. Stephen P. Timoshenko, S. Woinovsky — Krieger, *Teoria plăcilor plane și curbe*, Edit. tehn., 1968.

PLACĂ ORTOTROPĂ CU DIAFRAGME

de ION BELEȘ
Institutul de construcții București

Se stabilesc relații de calcul deduse pe baza teoriei plăcilor ortotrope adaptate la situația reală a unor platelaje : tabla cu nervuri dispuse des pe o direcție și cu diafragme dispuse rar pe cealaltă. Repartizarea diafragmelor pe direcția lor de acționare nefiind justificată, influența diafragmelor a fost considerată ca a unor reazeme elastice pentru placa ortotropă ideală obținută prin repartizarea numai a nervurilor.

Structurile de rezistență de beton armat sau metalice, alcătuite din tablie și grinzi așezate pe două direcții perpendiculare, formînd nervuri și diafragme, poartă denumirea de platelaje. Ele sînt mult răspîndite în construcțiile de poduri, construcțiile industriale, construcțiile hidrotehnice (stavile, batardouri, porți de ecluze) etc. Calculul acestor platelaje se face în general pe baza teoriei plăcilor ortotrope care, a făcut obiectul a numeroase lucrări. Ernst Gienke [5] a indicat o metodă exactă, care, prin simplificări admisibile, reduce studiul problemei la o ecuație analoagă cu ecuația tip Huber :

$$K_x \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + K_y \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = p(x, y). \tag{1}$$

S-a admis că atît nervurile, cît și diafragmele pot fi distribuite ca efecte, pe lățimea plăcii.

Coeficienții K_x, K_y și $2H$ care deosebesc ecuația (1) de ecuația plăcii izotrope sînt rigiditățile la încovoiere, respectiv la torsiune a plăcii ortotrope.

În figura 1 se arată, după Gienke, distribuția grinzilor pe placă pentru obținerea plăcii ortotrope echivalente și relațiile generale din care rezultă coeficienții care intervin în calcule.

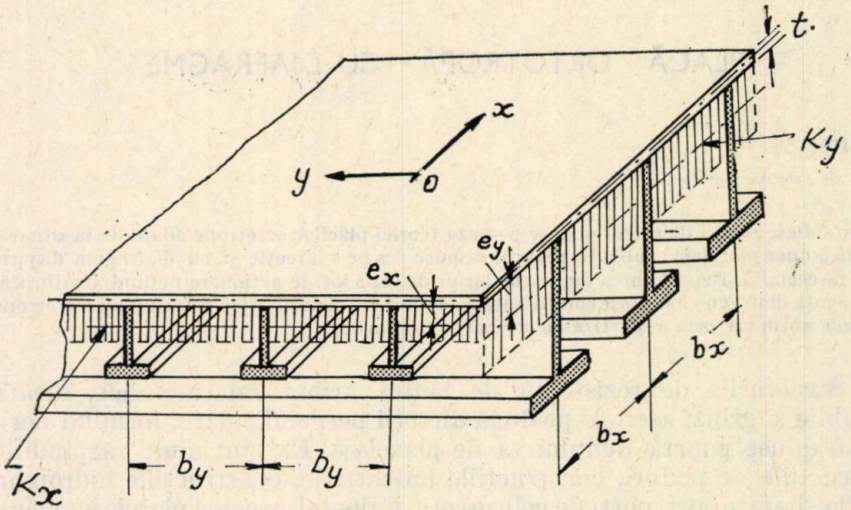
O simplificare a relațiilor precedente rezultă dacă tabla este rigidizată cu nervuri într-o singură direcție, de exemplu direcția x. În acest caz :

$$K_x = \frac{EI_x}{b_x} \; ; \; K_y = K \; ; \; K_{xy} = \frac{Et^3 h}{2(1+\mu)\, 3b_x} \; ,$$

$$K_{yx} = 0 \; ; \; e_y = 0,$$

$$H = K + K_{xy} + D \frac{1-\mu}{4} e_x^2 .$$

Sînt însă construcţii care prezintă particularitatea că tabla are nervurile dispuse des pe o direcţie şi diafragmele dispuse la distanţe mari pe cealaltă direcţie (stavile metalice, buncăre, corpuri de nave etc.). Pentru



$K_x = \frac{EI_x}{by}$; $K_y = \frac{EI_y}{bx}$; $K = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)}$ rigiditatea la încovoiere a plăcii ortotrope raportate la planul median.

$$K_{xy} = \frac{GI_x}{by} + \frac{GI_y}{bx} \; ; \; H = K + K_{xy} + K_{yx} + \mu D e_x e_y + D \frac{1-\mu}{2} (e_x + e_y)^2,$$

$D = \frac{Et}{1-\mu^2}$ rigiditatea axială a tablei (plăcii).

Fig. 1. Distribuţia grinzilor pe placă pentru obţinerea plăcii ortotrope echivalente şi relaţiile generale ale coeficienţilor.

calculul unor asemenea platelaje, ipoteza admisă la calculul plăcilor ortotrope, de distribuire pe deschiderile respective atît ale nervurilor, cît şi ale diafragmelor, apare ca insuficient justificată.

În cele ce urmează vom considera că tabla împreună cu nervurile dese formează o placă ortotropă, diafragmele fiind elemente de construcţii cu care placa este obligată să conlucreze. Sistemul astfel format îl vom denumi „placă ortotropă cu diafragme".

Vom admite că diafragmele sînt legate articulat de placa ortotropă; în acest fel condiţiile de conlucrare trebuie să exprime egalitatea de săgeţi a plăcii ortotrope şi a diafragmelor — în secţiunea de contact, sub acţiunea încărcărilor exterioare.

Starea de deformaţii a plăcii ortotrope, va fi guvernată de ecuaţia cu derivate parţiale (1) în care K_x, K_y şi H reprezintă rigidităţi la încovoiere,

respectiv la torsiune. Ţinînd seama că placa are nervuri pe o singură direcţie, rigiditatea la încovoiere în direcţia diafragmelor se reduce la aceea a tablei, adică

$$K_y = K = \frac{Et^3}{12(1-\mu^2)} \cdot \tag{2}$$

În mod asemănător, rigiditatea la torsiune se simplifică, avînd expresia

$$H = K + K_{xy} + \frac{1-\mu}{4} De_x^2 . \tag{3}$$

Diafragmele sînt elemente liniare, săgeţile lor satisfăcînd ecuaţii diferenţiale de tipul

$$\frac{d^4W}{dy^4} = \frac{p(y)}{EI} . \tag{4}$$

Am admis că diafragmele sînt dispuse paralel cu axa Oy (verticală), iar nervurile dese sînt cu axa Ox (orizontală).

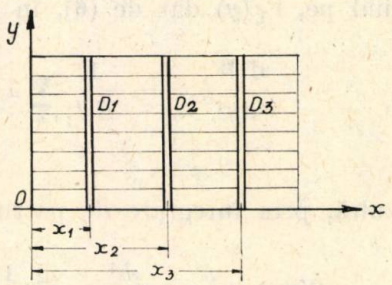


Fig. 2. Schema platelajului cu nervuri şi diafragme.

Pentru simplificare vom mai presupune pentru început că diafragmele sînt în număr de trei, fiind dispuse ca în figura 2.

În privinţa condiţiilor marginale, placa este simplu rezemată pe cele două laturi paralele cu Oy (verticale); de asemenea, ea este simplu rezemată în lungul laturii inferioare, pe latura superioară putînd fi, fie simplu rezemată, fie liberă.

Ne vom situa, pentru obţinerea soluţiei analitice, în primul caz, cînd placa este simplu rezemată pe toate cele patru laturi.

Vom alege originea axelor de coordonate în colţul din stînga jos al plăcii; axele Ox şi Oy coincid cu două din laturile plăcii (fig. 2).

Fie a şi b laturile plăcii.

Ţinînd seama de consideraţiile de rezemare ale plăcii, pentru rezolvarea problemei vom utiliza seriile trigonometrice.

Vom începe cu studierea diafragmelor.

Efectul diafragmei (D_1) asupra plăcii ortotrope se traduce prin prezenţa unei încărcări liniare $Y_1(y)$, de mărime necunoscută pentru început.

Această încărcare liniară va produce nişte săgeţi ale diafragmei, care satisfac ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^4 W_1}{dy^4} = -\frac{Y_1(y)}{E I_1}. \tag{5}$$

Expresia încărcării liniare $Y_1(y)$ poate fi însă pusă sub forma unei serii trigonometrice simple

$$Y_1(y) = \sum_m Y_{1n} \sin \frac{n\pi y}{b} = Y_{11} \sin \frac{\pi y}{b} + Y_{12} \sin \frac{2\pi y}{b} + \tag{6}$$

$$+ Y_{13} \sin \frac{3\pi y}{b} + \ldots$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Coeficienţii Y_{1n} (avînd dimensiunea unei încărcări liniare) sînt necunoscute, ce urmează a fi determinate mai departe.

Înlocuind pe $Y_1(y)$ dat de (6), în (5), rezultă ecuaţia diferenţială

$$\frac{d^4 W_1}{dy^4} = -\frac{1}{E I_1} \sum_n Y_{1n} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{7}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

din care rezultă, prin integrare de patru ori,

$$W_1(y) = -\frac{b^4}{\pi^4 E I_1} \sum_n \frac{1}{n^4} Y_{1n} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{8}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Presupunînd cunoscuţi coeficienţii Y_{1n}, momentele încovoietoare şi forţele tăietoare în diafragmă rezultă din relaţiile :

$$M_{y1} = -EI_1 \frac{d^2 W_1}{dy^2} = \frac{b^2}{\pi^2} \sum_n \frac{1}{n^2} Y_{1n} \sin \frac{n\pi y}{b}, \tag{9 a}$$

$$Q_{y1} = -EI_1 \frac{d^3 W_1}{dy^3} = \frac{b}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} Y_{1n} \cos \frac{n\pi y}{b} \tag{9 b}$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Relaţiile relative la diafragmele D_2 şi D_3 se deduc din (5) ... (9) prin schimbarea indicelui 1 în 2 şi respectiv în 3.

Revenind la placa ortotropă, o soluţie a ecuaţiei cu derivate parţiale (1), care satisface şi condiţiile marginale fixate, este de forma

$$W(x, y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{10}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots),$$

în care coeficienţii W_{mn} corespunzători fiecărui rang m, n al seriei duble trigonometrice, sînt necunoscute ce urmează a fi determinate ulterior.

Placa ortotropă este acţionată de încărcarea exterioară distribuită pe suprafaţă şi de încărcările liniare reprezentînd efectul diafragmelor. Ţinînd seama de forma soluţiei (10) va trebui să exprimăm şi încărcările sub o formă similară.

Încărcarea exterioară oarecare $p_0(x, y)$ este presupusă dată ; expresia ei sub formă de serie dublă trigonometrică se scrie :

$$p_0(x, y) = \sum_m \sum_n p_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{11}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots),$$

în care coeficienţii $p_{m,n}$ sînt cunoscute pentru fiecare $p_0(x, y)$.

Rămîne să mai exprimăm încărcarea liniară $Y_1(y)$, dată de (6) sub forma unei încărcări de suprafaţă.

Este cunoscut că o încărcare concentrată P, acţionînd o grindă simplu rezemată, cu deschiderea a, la distanţa x respectiv x_1 de la reazeme, poate fi exprimată cu ajutorul seriei simple trigonometrice

$$p_0(x) = \frac{2P}{a} \sum_m \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi x}{a}$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Luînd mai sus $P = 1$ şi înmulţind cu relaţia (6) rezultă

$$p_1(x, y) = \frac{2}{a} \sum_m \sum_n Y_{1n} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{12}$$

pentru încărcarea plăcii ortotrope cu încărcarea liniară transmisă de diafragma D_1.

În mod asemănător se exprimă $p_2(x, y)$ şi $p_3(x, y)$.

Încărcarea totală a plăcii ortotrope rezultă din suprapunerea efectelor :

$$p(x, y) = p_0(x, y) + p_1(x, y) + p_2(x, y) + p_3(x, y) =$$

$$= \sum_m \sum_n \left[p_{m,n} + \frac{2}{a} \left(Y_{1n} \sin \frac{m\pi x_1}{a} + Y_{2n} \sin \frac{m\pi x_2}{a} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + Y_{3n} \sin \frac{m\pi x_3}{a} \right) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{13}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Putem acum exprima că ecuaţia (1), în care încărcarea exterioară este dată de (13), este satisfăcută de soluţia (10) pentru săgeţi.

Făcînd aceste substituţii, rezultă

$$\sum_m \sum_n \left\{ \pi^4 \left(K_x \frac{m^4}{a^4} + 2H \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + K_y \frac{n^4}{b^4} \right) W_{mn} - \right.$$

$$\left. - \left[p_{m,n} + \frac{2}{a} \left(Y_{1n} \sin \frac{m\pi x_1}{a} + Y_{2n} \sin \frac{m\pi x_2}{a} + Y_{3n} \sin \frac{m\pi x_3}{a} \right) \right] \right\} \times$$

$$\times \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \tag{14}$$

$$(m, n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Relaţia (14) va fi identic verificată doar dacă fiecare coeficient $\{\}$, corespunzător perechii de valori m, n, va fi egal cu zero. De aici rezultă

$$W_{m,n} = \frac{p_{mn} + \frac{2}{a} \left(Y_{1n} \sin \frac{m\pi x_1}{a} + Y_{2n} \sin \frac{m\pi x_2}{a} + Y_3 \sin \frac{m\pi x_3}{a} \right)}{\pi^4 \left(K_x \frac{m^4}{a^4} + H \frac{m^2 n^2}{a^2 b^2} + K_y \frac{n^4}{b^4} \right)}.$$

Pentru simplificarea scrierii, vom introduce notaţiile :

$$\alpha = \frac{a}{b} \text{ raportul laturilor,} \tag{15}$$

$$\rho_1 = \frac{H}{K_x}; \quad \rho_2 = \frac{K_y}{K_x} \text{ rapoartele rigidităţilor,} \tag{16}$$

$$N_{mn} = m^4 + 2\rho_1 \alpha^2 m^2 n^2 + \rho_2 \alpha^4 n^4. \tag{17}$$

Cu aceste notaţii, expresia generală a coeficientului W_{mn} devine :

$$W_{mn} = \frac{p_{mn} + \frac{2}{a}\left(Y_{1n} \sin \frac{m\pi x_1}{a} + Y_{2n} \sin \frac{m\pi x_2}{a} + Y_{3n} \sin \frac{m\pi x_3}{a}\right)}{N_{mn}} \cdot \frac{a^4}{\pi^2 K_x} \cdot \tag{18}$$

În felul acesta, săgeţile plăcii sînt date de (10) şi (18), presupunînd că încărcările liniare $Y_1(y)$, $Y_2(y)$, $Y_3(y)$ au fost determinate în prealabil.

În particular, săgeţile plăcii în dreptul diafragmelor, se deduc din (10), făcînd succesiv $x = x_1$, respectiv $x = x_2$ şi $x = x_3$. Rezultă astfel :

$$W(x_1, y) = \sum_m \sum_n W_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{19}$$

şi relaţii similare pentru $W(x_2, y)$ şi $W(x_3, y)$.

Vom căuta să exprimăm mai departe compactibilitatea săgeţilor plăcii ortotrope şi diafragmelor, în secţiunile de contact.

Aceste condiţii de compatibilitate vor servi tocmai la determiarea încărcărilor liniare necunoscute $Y_1(y)$, $Y_2(y)$ şi $Y_3(y)$.

Observăm că atît relaţia (8), cît şi (19) conţin în factor pe $\sin \frac{n\pi y}{b}$.

Prin egalarea celor două săgeţi, factorul trigonometric se simplifică şi prin aceasta se asigură egalitatea

$$W_{\text{placă}} - W_{\text{diafragmă}} = 0 \tag{20}$$

pe toată lungimea b.

Vom scrie mai detaliat egalitatea (20) în cazul primei diafragme, scriind dezvoltat suma în raport cu m şi strîngînd toţi termenii sub aceeaşi sumă în raport cu n :

$$\sum_n \left[\left(W_{1n} \sin \frac{\pi x_1}{a} + W_{2n} \sin \frac{2\pi x_1}{a} + \ldots + W_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} + \ldots\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{b^4}{\pi^4 EI_1 n^4} Y_{1n}\right] \sin \frac{n\pi y}{b} = 0.$$

Relaţia precedentă va fi o identitate doar dacă paranteza dreaptă, corespunzătoare fiecărui rang n, va fi zero, adică

$$W_{1n} \sin \frac{\pi x_1}{a} + W_{2n} \sin \frac{2\pi x_1}{a} + \ldots + W_{mn} \sin \frac{m\pi x_1}{a} + \ldots +$$

$$+ \frac{b^4}{\pi^4 EI_1 n^4} Y_{1n} = 0. \tag{21}$$

Mai sus, coeficienţii W_{1n}, W_{2n} ... se obţin direct din relaţia (18), făcînd succesiv $m = 1, 2, \ldots$ Vom avea de, exemplu,

$$W_{1n} = \frac{2a^3}{\pi^4 K_x} \cdot \frac{\frac{p_{1n}a}{2} + Y_{1n}\sin\frac{\pi x_1}{a} + Y_{2n}\sin\frac{\pi x_2}{a} + Y_{3n}\sin\frac{\pi x_3}{a}}{N_{1n}},$$

$$W_{2n} = \frac{2a^3}{\pi^4 K_x} \cdot \frac{\frac{p_{2n}a}{2} + Y_{1n}\sin\frac{2\pi x_1}{a} + Y_{2n}\sin\frac{2\pi x_2}{a} + Y_{3n}\sin\frac{2\pi x_3}{a}}{N_{2n}},$$

. . . . . .

. . . . . (22)

$$W_{mn} = \frac{2a^3}{\pi^4 K_x} \cdot \frac{\frac{p_{mn}a}{2} + Y_{1n}\sin\frac{m\pi x_1}{a} + Y_{2n}\sin\frac{m\pi x_2}{a} + Y_{3n}\sin\frac{n\pi x_3}{a}}{N_{mn}}.$$

Substituind valorile (22) cu (21) şi grupînd convenabil termenii în raport cu necunoscutele Y_{1n}, Y_{2n}, Y_{3n}, se obţine

$$Y_{1n}\left(\frac{2a^3}{\pi^4 K_x}\sum\frac{\sin^2\frac{m\pi x_1}{a}}{N_{mn}} + \frac{b^4}{\pi^4 EI_1 n^4}\right) + Y_{2n}\left(\frac{2a^3}{\pi^4 K_x}\sum\right.$$

$$\left.\sum\frac{\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_2}{a}}{N_{mn}}\right) + Y_{3n}\left(\frac{2a^3}{\pi^4 K_x}\sum\frac{\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_3}{a}}{N_{mn}}\right) +$$

$$+ \frac{a^4}{\pi^4 K_x}\sum\frac{p_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{a}}{N_{mn}} = 0.$$

Simplificînd cu $\frac{2a^3}{\pi^4 K_x}$ şi notînd $\gamma_{1n} = \frac{b^4 K_x}{2a^3 EI_1 n^4}$, (23)

relaţia precedentă se scrie:

$$\left(\gamma_{1n} + \sum_m \frac{\sin^2\frac{m\pi x_1}{a}}{N_{mn}}\right) Y_{1n} + \left(\sum_m \frac{\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_2}{a}}{N_{mn}}\right) Y_{2n} +$$

$$+ \left(\sum_m \frac{\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_3}{a}}{N_{mn}}\right) Y_{3n} + \frac{a}{2}\sum_m \frac{p_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{a}}{N_{mn}}. \quad (24)$$

Pe o cale absolut asemănătoare vom obţine încă două relaţii care exprimă egalitatea de săgeţi între placa ortotropă şi diafragmele D_2 şi D_3 în secţiunile de contact:

$$\left(\sum_m \frac{\sin\frac{m\pi x_2}{a}\sin\frac{m\pi x_1}{a}}{N_{mn}}\right)Y_{1n}+\left(\gamma_{2n}+\sum_m \frac{\sin^2\frac{m\pi x_2}{a}}{N_{mn}}\right)Y_{2n}+$$

$$+\left(\sum_m \frac{\sin\frac{m\pi x_2}{a}\sin\frac{m\pi x_3}{a}}{N_{mn}}\right)Y_{3n}+\frac{a}{2}\sum_m \frac{p_{mn}\sin\frac{m\pi x_2}{a}}{N_{mn}}=0, \qquad (25a)$$

și

$$\left(\sum_m \frac{\sin\frac{m\pi x_3}{a}\sin\frac{m\pi x_1}{a}}{N_{mn}}\right)Y_{1n}+\left(\sum_m \frac{\sin\frac{m\pi x_3}{a}\sin\frac{m\pi x_2}{a}}{N_{mn}}\right)Y_{2n}+$$

$$+\left(\gamma_{3n}+\sum_m \frac{\sin^2\frac{m\pi x_3}{a}}{N_{mn}}\right)Y_{3n}+\frac{a}{2}\sum_m \frac{p_{mn}\sin\frac{m\pi x_3}{a}}{N_{mn}}=0. \qquad (25b)$$

Dacă se notează coeficienţii necunoscutelor

$$\delta_{11.n}=\gamma_{1n}+\sum_m \frac{\sin^2\frac{m\pi x_1}{a}}{N_{mn}},$$

$$\delta_{22.n}=\gamma_{2n}+\sum_m \frac{\sin^2\frac{m\pi x_2}{a}}{N_{mn}},$$

$$\delta_{33.n}=\gamma_{3n}+\sum_m \frac{\sin^2\frac{m\pi x_3}{a}}{N_{mn}},$$

$$\delta_{12.n}=\delta_{21.n}=\sum_m \frac{\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_2}{a}}{N_{mn}},$$

$$\delta_{13.n}=\delta_{31.n}=\sum_m \frac{\sin\frac{m\pi x_1}{a}\sin\frac{m\pi x_3}{a}}{N_{mn}}, \qquad (26)$$

$$\delta_{23.n}=\delta_{32.n}=\sum_m \frac{\sin\frac{m\pi x_2}{a}\sin\frac{m\pi x_3}{a}}{N_{mn}},$$

$$\Delta_{1n}=\frac{a}{2}\sum_m \frac{p_{mn}\sin\frac{m\pi x_1}{a}}{N_{mn}},$$

$$\Delta_{2n}=\frac{a}{2}\sum_m \frac{p_{mn}\sin\frac{m\pi x_2}{a}}{N_{mn}},$$

$$\Delta_{3n}=\frac{a}{2}\sum_m \frac{p_{mn}\sin\frac{m\pi x_3}{a}}{N_{mn}},$$

sistemul de ecuații (24), (25a), (25b) devine :

$$\begin{aligned}
&\delta_{11.n} Y_{1n} + \delta_{12.n} Y_{2n} + \delta_{13.n} Y_{3n} + \Delta_{1n} = 0,\\
&\delta_{21.n} Y_{1n} + \delta_{22.n} Y_{2n} + \delta_{23.n} Y_{3n} + \Delta_{2n} = 0,\\
&\delta_{31.n} Y_{1n} + \delta_{32.n} Y_{2n} + \delta_{33.n} Y_{3n} + \Delta_{3n} = 0.
\end{aligned} \tag{27}$$

El reprezintă sistemul de ecuații canonice care determină coeficienții Y_n și deci, încărcările liniare din diafragme.

Trebuie observat că sistemul (27) corespunde termenului de rang n din seriile duble trigonometrice ; de aceea va trebui să scriem atîtea sisteme

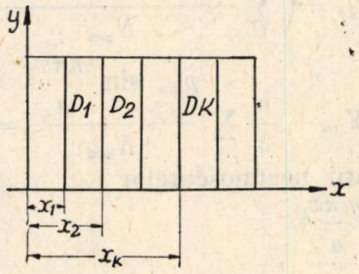


Fig. 3. — Platelajul cu k diafragme.

de ecuații canonice de tipul (27) cîți termeni $n = 1, 2, 3, \ldots$ este necesar să luăm în considerare.

Prin rezolvarea sistemelor (27) și cunoașterea coeficienților (Y_{11}, Y_{12}, Y_{13}, ... Y_{1n} ...), (Y_{21}, Y_{22}, Y_{23} .... Y_{2n} ...) și (Y_{31}, Y_{32}, Y_{33} ... ... Y_{3n} ...), problema este complet rezolvată

În calculele numerice va fi util să se verifice rezultatele, controlînd dacă săgețile plăcii ortrotope date de (19) sînt identice cu săgețile diafragmei D_1 date de (8) și analog pentru celelalte două diafragme.

Rezultatele obținute precedent, pot fi generalizate în cazul unei construcții avînd un număr k de diafragme (D_1, D_2, ... D_k) situate la distanțe x_1, x_2 ... x_k de origine (fig. 3).

Încărcările liniare ce acționează asupra plăcii ortotrope, vor fi tot de forma (6) în care trebuie să determinăm coeficienții :

$$\begin{aligned}
&(D_1) \quad Y_{11}, Y_{12}, \ldots Y_{1n}, \ldots\\
&(D_2) \quad Y_{21}, Y_{22}, \ldots Y_{2n}, \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(D_k) \quad Y_{k1}, Y_{k2}, \ldots Y_{kn}, \ldots
\end{aligned}$$

Fiecare coloană de coeficienți, corespunzătoare unui rang n al seriilor trigonometrice, rezultă dintr-un sistem de ecuații canonice cu k necunoscute ; el se scrie :

$$\begin{aligned}
&\delta_{11.n} Y_{1n} + \delta_{12.n} Y_{2n} + \ldots \delta_{1k.n} Y_{kn} + \Delta_{1n} = 0,\\
&\delta_{21.n} Y_{1n} + \delta_{22.n} Y_{2n} + \ldots \delta_{2k.n} Y_{kn} + \Delta_{2n} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_{k1.n} Y_{1n} + \delta_{k2.n} Y_{2n} + \ldots \delta_{kk.n} Y_{kn} + \Delta_{kn} = 0.
\end{aligned} \tag{28}$$

În sistemul (28) coeficienţii de influenţă au următoarele expresii :

$$\delta_{ii,n} = \gamma_{in} + \sum_m \frac{\sin^2 \frac{m\pi x_i}{a}}{N_{mn}}, \qquad (i = 1, 2, 3 \ldots k), \tag{29a}$$

$$\delta_{ij,n} = \delta_{ji,n} = \sum_m \frac{\sin \frac{m\pi x_i}{a} \sin \frac{m\pi x_j}{a}}{N_{mn}}, \quad (i \neq j = 1, 2, 3, \ldots k), \tag{29b}$$

$$\Delta_{in} = \frac{a}{2} \sum_m \frac{p_{mn} \sin \frac{m\pi x_i}{a}}{N_{mn}}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots k), \tag{29c}$$

pentru $k = 3$ coeficienţii daţi de relaţiile (29) concordă cu coeficienţii definiţi anterior prin relaţiile (26).

În practică diafragmele sînt dispuse în poziţii deobicei simetrice în raport cu planul median al plăcii, diafragmele simetrice fiind identice (cu momente de inerţie egale). În acest caz expresiile coeficienţilor de influenţă (29) se simplifică, iar numărul ecuaţiilor şi al necunoscutelor se reduce.

O dată rezolvată problema încovoierilor liniare transmise la diafragme şi determinate săgeţile plăcii ortotrope, momentele încovoietoare în placă rezultă :

$$M_x = \frac{K_x \pi^2}{a^2} \sum_m \sum_n (m^2 + \mu \rho_2 \alpha^2 n^2) W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b},$$

$$M_y = \frac{K\pi^2}{a^2} \sum_m \sum_n (\alpha^2 n^2 + \mu m^2) W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \tag{30}$$

Momentele de torsiune, eforturile normale şi forţele tăietoare, aşa cum rezultă din calculele numerice făcute, au efect neglijabil în comparaţie cu cel al momentelor încovoietoare.

Volumul mare de calcule necesar rezolvării unei probleme ca cea dezvoltată mai sus, impune folosirea calculatorului electronic.

Primită în redacţie la 4 noiembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. I. Beleş, *Contribuţii la calculul construcţiilor metalice hidrotehnice, cu elementele de rezistenţă din tablă şi grinzi, ţinînd seama de efectul de conlucrare spaţială*, teză de doctorat, 1971.
2. R. Bares şi Ch. Massonet, *Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes selon la méthode Guyon-Massonnet-Bares*, Paris. Dunod, 1966.

3. N. M. Dehousse, *Les bordages raidis en construction hydraulique*, Association Internationale des Ponts et Charpentes, **22**, Zürich, 37—71, (1962).
4. A. Feige, *Trägerrost-Brücken (Kreuzwerk-Brükken) und orthotrope Platten*, Secţiunea Baustatik din Stahlbau, Vol. 1, p. 220 — 242, Köln 1956, Stahlbau — Verlags H. G.m.b.
5. E. Giencke, *Die Grundgleichungen für die orthotrope Platte mit exzentrischen Steifen*, Der Stahlbau, **24**, *6*, 128—129, (1955).
6. K. Girkmann, *Flächentragwerke*, Ed. 6-a. Wien, Springer-Verlag, 1963.
7. K. Klöppel şi M. Yamada, *Anisotrope Flussbedingung*, Der Stahlbau, Jg, *9*, 173—179, (1960).
8. F. W. Mader *Berechnung orthotroper Platten unter Flächenlasten Randmomenten und Randdurichbiegungen.* Der Stahlbau, **26**, *5*, 131—135, 1957.
9. J. D. Renton, *The related behaviour of plane grids, space grids and plates*, Space Structurs (Edited by R.M. Davies). Oxford and Edinburgh, Blackwell Scientific Publications, p. 19—32, 1967.
10. M. Soare, *Calculul plăcilor ortotrope cu rigidizări excentrice* (în manuscris).
11. O. Steinhardt, *Zur vollständigen Berechnung von ,,orthotropen Platten'' im Stahlbau*, Stahlbau und Baustatik. Aktuelle Probleme. Editori: H. Grengg, W. Pelikan, F. Reinitzhuber. Wien, New York, Springer-Verlag, p. 58—73, 1965.
12. St. P. Timoshenko şi S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Ed. a 2-a, New York, Toronto, London, McGraw-Hill Book Comany, 1959.
13. K. Trensk, *Beitrag zur Berechnung orthogonal anisotroper Rechteckplatten*, Der Bauingenieur, **29**, *10*, 372—377 (1954).

ASUPRA CALCULULUI STATIC AL BAREI DREPTE

de GHEORGHIU ZAHARIA
I.P.I.U.

Lucrarea abordează problema calculului stărilor de deformaţii-eforturi în bara dreaptă, plană, avînd sau nu rezemări parţiale sau totală pe mediu elastic, în cadrul ipotezelor staticei liniare sau neliniare, în condiţii de generalitate asupra formei şi variaţiei secţiunii transversale, condiţiilor de fixare a extremităţilor, încărcărilor.
Elementele teoretice ale problemei sînt dezvoltate într-o formulare matematică orientată în mod special spre calculul numeric, formulare care conferă procedeului de calcul propus o mare generalitate şi în acelaşi timp o mare flexibilitate în utilizarea lui într-un program pentru un calculator automat.
În final sînt prezentate condiţiile concrete în care a fost realizat un program, scris în limbajul FORTRAN-4 şi testat pe calculatorul electronic IBM 360/40, care rezolvă problema propusă.

I. INTRODUCERE

Obiectul acestei lucrări este calculul stărilor de deformaţii-eforturi în bara dreaptă, plană, în cadrul ipotezelor staticei liniare sau neliniare, în condiţii de generalitate asupra formei şi variaţiei secţiunii transversale, condiţiilor de fixare a extremităţilor, încărcărilor, cu intenţia programării lui pe un calculator automat.

Lucrarea tratează elementele teoretice principale ale problemei, prezentîndu-le într-o formulare matematică orientată în mod special spre calculul numeric, iar în final precizează condiţiile concrete în care a fost realizat un program ce rezolvă problema propusă.

Necesitatea abordării acestei probleme derivă din considerente generale specifice proiectării şi calculului structurilor de rezistenţă ale construcţiilor, din condiţiile particulare dificile de rezolvare numerică cu instrumente de calcul clasice, dar în special din perspectiva considerării barei drepte ca element constitutiv fundamental al structurilor plane complexe.

În lumina acestei expuneri de motive, scopul lucrării este dublu :
— pe de o parte, a pune la îndemîna celor interesaţi un procedeu de calcul adecvat, precum şi programul corespunzător de conversaţie cu calculatorul, în rezolvarea problemelor de tipul enunţat.
— pe de altă parte, a pregăti elementele teoretice şi practice legate de bara dreaptă, plană, necesare tratărilor ulterioare ale structurilor alcătuite din bare.

T. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 3, P. 399–415

II. BARA CU O SINGURĂ DESCHIDERE

A. PRECIZĂRI INIȚIALE

1. Fie bara dreaptă $A-B$, referită la sistemul rectangular de axe $xAyz$, supusă acțiunii unor încărcări oarecare, date (fig. 1).

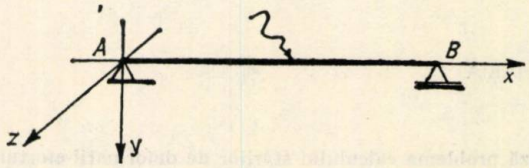


Fig. 1

În condițiile în care forma secțiunii transversale este oarecare (dar fără a ieși din limitele problemei plane), în condițiile unei variații oarecare a dimensiunilor secțiunii transversale în lungul barei, și, pentru condiții de legătură — la extremitățile barei — oarecare, urmărim să determinăm stările de deformații-eforturi într-un număr oarecare de secțiuni, cel puțin egal cu numărul de secțiuni caracteristice[1].

2. Definim vectorii :

VA_x și VN_x care conțin, ca elemente,componentele axiale, respectiv normale, ale stărilor de deformații-eforturi din secțiunea x, oarecare :

$$VA_x = \begin{pmatrix} u_x \\ N_x \\ 1 \end{pmatrix}; \quad VN_x = \begin{pmatrix} v_x \\ \varphi_x \\ M_x \\ T_x \\ 1 \end{pmatrix},$$

DVA_x și DVN_x, care conțin, ca elemente, încărcările concentrate ce acționează în secțiunea x, altfel spus, variațiile concentrate ale componentelor axiale, respectiv normale, ale stărilor de deformații-eforturi din secțiune :

$$DVA_x = \begin{pmatrix} DU_x \\ DN_x \\ 0 \end{pmatrix}; \quad DVN_x = \begin{pmatrix} Dv_x \\ D\varphi_x \\ DM_x \\ DT_x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Secțiuni caracteristice sînt extremitățile barei, precum și secțiunile intermediare în care acționează încărcările concentrate, sau în care se produc schimbări ale legilor de variație a dimensiunilor transversale sau a forțelor distribuite.

3. Componentele stării de deformaţii din secţiunea x, u_x, v_x, φ_x, sînt prezentate în figura 2, cu sensurile pozitive :

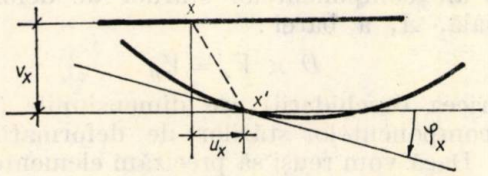


Fig. 2

Componentele stării de eforturi, N_x, T_x, M_x, se referă la faţa din dreapta a secţiunii şi sunt prezentate în figura 3, cu sensurile pozitive :

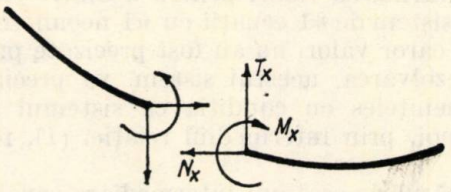


Fig. 3

Subliniem că N_x şi T_x sunt definite pe poziţia nedeformată a axei, în timp ce M_x se referă la axa deformată.

4. Prin încărcări oarecare înţelegem forţe distribuite, forţe şi cupluri concentrate, deplasări concentrate, în limitele problemei plane şi acţionînd în direcţiile axelor de coordonate.

Încărcările distribuite sînt pozitive dacă au sensul axei în direcţia căreia acţionează.

Încărcările concentrate sînt privite ca variaţii concentrate ale deformaţiilor şi eforturilor şi, prin urmare, sensurile lor pozitive decurg din această precizare.

5. În sensul precizării referitoare la eforturi, din cadrul punctului 3, este implicată influenţa forţei axiale asupra componentelor normale ale stărilor de deformaţii-eforturi, ceea ce impune o organizare a calculului în faze succesive :

— calculul componentelor axiale ale stărilor de deformaţii-eforturi în secţiunile considerate pe parcursul barei,

— determinarea legilor de variaţie a forţei axiale pe tronsoanele definite între secţiunile considerate,

— verificarea stabilităţii barei, în cazul că există tronsoane comprimate,

— calculul componentelor normale ale stărilor de deformaţii-eforturi în secţiunile considerate.

B. CALCULUL COMPONENTELOR STĂRILOR DE DEFORMAŢII—EFORTURI

1. Procedeul parametrilor iniţiali în formulare matriceală

Fie V_x notaţia sub care vom înţelege VA_x sau VN_x, după cum urmărim calculul componentelor axiale sau normale ale stărilor de deformaţii-eforturi.

Procedeul se bazează pe observaţia că, componentele stărilor de deformaţii-eforturi din extremitatea finală a barei, B, se pot exprima ca combinaţii liniare ale componentelor stărilor de deformaţii-eforturi din extremitatea iniţială, A, a barei :

$$D \times V_A = V_B \tag{1}$$

Matricea D (matricea deschiderii) are dimensiunile $(n+1) \times (n+1)$, n fiind numărul componentelor stărilor de deformaţii-eforturi prezente într-un vector V_x. Dacă vom reuşi să precizăm elementele acestei matrice, atunci relaţia (1) este echivalentă cu n relaţii. Deoarece în aceste relaţii intervine un număr dublu de necunoscute (componentele stărilor de deformaţii-eforturi la cele două extremităţi ale barei), condiţiile impuse în aceste secţiuni trebuie să furnizeze valori pentru n dintre ele. În acest mod, din (1) vom obţine un sistem de $n1$ ecuaţii cu $n1$ necunoscute — componentele prezente în V_A, ale căror valori nu au fost precizate prin condiţiile impuse, cu $0 \leqslant n1 \leqslant n$. Rezolvarea acestui sistem va preciza toate elementele vectorului V_A, bineînţeles cu condiţia ca sistemul să fie compatibil şi determinat[2)], iar apoi, prin intermediul relaţiei (1), toate elementele vectorului V_B.

Fie NSI numărul de secţiuni intermediare considerate pe parcursul deschiderii. Notînd NT numărul tronsoanelor în care se divide astfel grinda, avem $NT = NSI + 1$.

Fie tronsonul i, definit între secţiunile consecutive $i-1$ şi i (fig. 4).

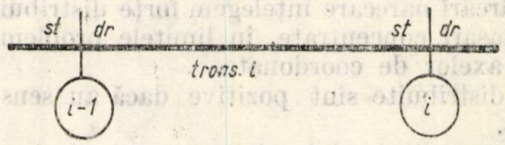


Fig. 4

Ca şi în cazul deschiderii întregi, componentele stărilor de deformaţii-eforturi din extremitatea finală a tronsonului se pot exprima drept combinaţii liniare ale componentelor stărilor de deformaţii-eforturi din extremitatea sa iniţială :

$$T_i \times V_{i\ 1,dr} = V_{i,st} \tag{2}$$

Matricea T_i (matricea tronsonului i, $i = 1, 2, \ldots NT$) are aceleaşi dimensiuni ca matricea deschiderii, şi elementele de asemenea nedeterminate.

Fie secţiunea intermediară i, figura 4. Între componentele stărilor de deformaţii-eforturi dintr-o secţiune infinit vecină la stînga secţiunii i şi componentele stărilor de deformaţii-eforturi dintr-o secţiune infinit vecină la dreapta secţiunii i, există relaţia evidentă :

$$V_{i,st} + DV_i = V_{i,dr} \tag{3}$$

Vectorul DV_i (vectorul de discontinuitate al secţiunii i, $i = 1, 2, \ldots NSI$) reprezintă unul dintre vectorii DVA_i sau DVN_i, definiţi anterior, care

---

[2)] Sistemul este compatibil şi determinat, dacă nedeformabilitatea geometrică a barei, împreună cu legăturile cu terenul (din punctul de vedere al mecanicei corpurilor rigide) este asigurată şi, dacă bara se găseşte în stare de echilibru stabil sub încărcările date.

conţin, ca elemente, încărcările concentrate interesante ce acţionează în secţiunea i, date.

Dacă vom reuşi să precizăm elementele matricelor T_i, pentru rezolvarea problemei vom proceda prin aplicarea succesivă a relaţiilor (2) şi (3) pentru fiecare tronson şi secţiune intermediară întîlnite, începînd de la extremitatea iniţială a barei :

$$\begin{aligned}
&T_1 \times V_A = V_{1,st},\\
&V_{1,st} + DV_1 = V_{1,dr},\\
&T_2 \times V_{1,dr} = V_{2,st},\\
&V_{2,st} + DV_2 = V_{2,dr}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&T_i \times V_{i-1,dr} = V_{i,st},\\
&V_{i,st} + DV_i = V_{i,dr},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&T_{NT-1} \times V_{NSI-1,dr} = V_{NSI,st},\\
&V_{NSI,st} + DV_{NSI} = V_{NSI,dr},\\
&T_{NT} \times V_{NSI,dr} = V_B.
\end{aligned} \tag{4}$$

Cum posibilitatea determinării vectorilor V_A şi V_B a fost evidenţiată anterior în legătură cu relaţia (1), modul de lucru enunţat este fundamentat; în plus, ultima dintre relaţiile (4) poate servi pentru verificare.

2. Determinarea elementelor matricei deschiderii (D)

Matricea D se poate exprima în funcţie de matricele tronsoanelor T_i şi elementele vectorilor de discontinuitate DV_i. Aceasta decurge din dubla posibilitate de determinare a vectorului V_B din relaţiile (1) sau (4).

Introducem, în acest scop, în fiecare din relaţiile (4) relaţia imediat precedentă :

$$\begin{aligned}
&T_1 \times V_A = V_{1,st},\\
&T_1 \times V_A + DV_1 = V_{1,dr},\\
&T_2 \times (T_1 \times V_A + DV_1) = V_{2,st}\\
&T_2 \times (T_1 \times V_A + DV_1) + DV_2 = V_{2,dr},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&T_i \times (\ldots (T_2 \times (T_1 \times V_A + DV_1) + DV_2) + \ldots) = V_{i,st},\\
&T_i \times (\ldots (T_2 \times (T_1 \times V_A + DV_1) + DV_2) + \ldots) + DV_i = V_{i,dr},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&T_{NT-1} \times (\ldots (T_i \times (\ldots (T_2 \times (T_1 \times V_A + DV_1) + DV_2) + \ldots) +\\
&\qquad + DV_i) + \ldots) = V_{NSI,st},\\
&T_{NT-1} \times (\ldots T_i \times (\ldots (T_2 \times (T_1 \times V_A + DV_1) + DV_2) + \ldots) +\\
&\qquad + DV_i) + \ldots) + DV_{NSI} = V_{NSI,dr},\\
&T_{NT} \times (T_{NT-1} \times (\ldots (T_i \times (\ldots (T_2 \times (T_1 \times V_A + DV_1) + DV_2) + \ldots) +\\
&\qquad + DV_i) + \ldots) + DV_{NSI}) = V_B.
\end{aligned}$$

În ultima relație scoatem în dreapta tuturor parantezelor vectorul V_A. În acest mod, vectorii DV_i se transformă în matrice de dimensiuni $(n+1) \times (n+1)$, pe care le vom nota $\mathcal{D}V_i$. Aceste matrice (matrice de discontinuitate ale secțiunilor i) conțin pe ultima coloană elementele vectorilor DV_i, iar restul elementelor lor sunt nule. Obținem

$$T_{NT} \times (T_{NT-1} \times (\ldots (T_i \times (\ldots (T_2 \times (T_1 + \mathcal{D}V_1) + \mathcal{D}V_2) + \ldots) + \\ + \mathcal{D}V_i) + \ldots) + \mathcal{D}V_{NSI}) \times V_A = V_B.$$

Prin comparație cu (1) rezultă imediat

$$D = T_{NT} \times (T_{NT-1} \times (\ldots (T_i \times (\ldots (T_2 \times (T_1 + \mathcal{D}V_1) + \mathcal{D}V_2) + \ldots) + \\ + \mathcal{D}V_i + \ldots) + \mathcal{D}V_{NSI}) \tag{5}$$

3. Determinarea elementelor matricelor tronsoanelor (T_i)

Fie tronsonul i, oarecare. În virtutea modului de alegere a secțiunilor intermediare pe bară, precizat anterior, legile de variație a dimensiunilor transversale precum și legile de variație a intensităților forțelor distribuite sunt exprimate prin funcții infinit derivabile[3)], pe parcursul tronsonului. Drept consecință, legile de variație a deformațiilor și eforturilor sunt de asemenea funcții infinit derivabile, pe parcursul tronsonului.

Determinarea elementelor matricei tronsonului i se bazează pe posibilitatea integrării ecuațiilor diferențiale ale fibrei medii deformate,

$$\frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x} = \frac{N_x}{EA_x}, \tag{6}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M_x}{EI_x}, \tag{7}$$

ținînd seama de relațiile diferențiale de echilibru,

$$\frac{\mathrm{d}N_x}{\mathrm{d}x} = -PT_x, \tag{8}$$

$$\frac{\mathrm{d}T_x}{\mathrm{d}x} = -PN_x + KW \cdot BR_x \cdot v_x, \tag{9}$$

$$\frac{\mathrm{d}M_x}{\mathrm{d}x} = T_x - N_x \cdot \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}, \tag{10}$$

[3)] Funcția identic nulă este infinit derivabilă.

unde

E reprezintă modulul de elasticitate al materialului din care este alcătuită bara, constant;

A_x — expresia ariei secţiunii transversale;

I_x — expresia momentului de inerţie al secţiunii transversale în raport cu axa Z proprie,

PT_x — expresia intensităţii încărcărilor axiale, distribuite;

PN_x — expresia intensităţii încărcărilor normale, distribuite;

BR_x — expresia dimensiunii secţiunii transversale care reazemă pe un eventual mediu elastic;

KW — coeficientul de pat[4], constant.

Derivînd (6) şi ţinînd seama de (8), obţinem ecuaţia diferenţială a deplasării axiale:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(EA_x \cdot \frac{\mathrm{d}u_x}{\mathrm{d}x}\right) = -PT_x \tag{11}$$

De asemenea, derivînd (10) şi ţinînd seama de (8) şi (9), obţinem o expresie, care, înlocuită în derivata secundă a expresiei (7), ne conduce la ecuaţia diferenţială a deplasării normale:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(EI_x \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}x^2}\right) - N_x \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}x^2} + PT_x \cdot \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} + KW \cdot BR_x \cdot v_x = PN_x$$

Integrînd aceste ecuaţii diferenţiale şi determinînd constantele de integrare ca funcţii de componentele stărilor de deformaţii-eforturi din extremitatea iniţială a tronsonului, obţinem, pentru $x = LT_i$ (LT_i fiind lungimea tronsonului), relaţiile de legătură între componentele stărilor de deformaţii-eforturi din extremitatea finală a tronsonului şi cele din extremitatea sa iniţială, echivalente relaţiei matriceale (2). Grupînd separat relaţiile referitoare la componentele axiale, respectiv normale, determinăm prin identificare elementele matricei T_i corespunzătoare (TA_i dacă este vorba de componentele axiale, TN_i dacă este vorba de componentele normale).

Rezolvarea problemei în modul preconizat mai sus depinde de posibilitatea practică de integrare a ecuaţiilor diferenţiale (11), respectiv (12), ceea ce revine la posibilitatea sau imposibilitatea de a găsi numărul necesar de soluţii particulare. Din acest motiv, propunem în continuare o soluţie de integrare numerică, prin aceasta rezolvarea în ansamblu devenind mult mai puţin dependentă de legile de variaţie date pentru A_x, I_x, BR_x, PN_x PT_x, deci cîştigînd în generalitate, în acelaşi timp prezentînd o mare adaptabilitate în utilizarea ei într-un program pentru un calculator automat: Împărţim tronsonului i, considerat, într-un număr NS_i de subtronsoane. Raţionamentul făcut pentru deschiderea întreagă, considerată împărţită în tronsoane, rămîne valabil şi pentru tronsonul i, considerat împărţit în subtronsoane, astfel încît relaţiile (2), (3) şi (5) rămîn valabile şi la acest nivel. Aceasta înseamnă că matricea T_i se poate exprima în funcţie de

[4] Se acceptă ipoteza lui Winkler.

matricele subtronsoanelor prin relația (5), schimbînd în mod corespunzător mărimile care intervin și ținînd seama că pe parcursul tronsonului nu există încărcări concentrate. Obținem

$$T_i = S_{NS_i} \times S_{NS_i-1} \times \ldots \times S_j \times \ldots \times S_2 \times S_1. \tag{13}$$

Matricea S_j (matricea subtronsonului j, definit pe tronsonul i, $j = 1, 2 \ldots NS_i$) are aceleași dimensiuni ca matricea tronsonului i și elementele încă nedefinite.

4. Determinarea elementelor matricelor subtronsoanelor (S_j)

Fie subtronsonul j, oarecare, definit pe tronsonul i. Dacă numărul NS_i este suficient de mare, atunci putem considera că pe subtronsonul respectiv mărimile A_x, I_x, BR_x, PN_x, PT_x, rămîn constante la valorile A_j, I_j, BR_j, PN_j, PT_j. Ecuațiile diferențiale (11) și (12) devin :

$$EA_j \cdot \frac{\mathrm{d}^2 u_x}{\mathrm{d}x^2} = -PT_j, \tag{11'}$$

$$EI_j \cdot \frac{\mathrm{d}^4 v_x}{\mathrm{d}x^4} - N_x \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}x^2} + PT_j \cdot \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x} + KW \cdot BR_j \cdot v_x = PN_j \tag{12'}$$

Ele sînt independente de legile de variație date pentru A_x, I_x, BR_x, PN_x, PT_x, dar calculul valorilor costante A_j, I_j, BR_j, PN_j, PT_j, va trebui să depindă de aceste legi.

Ajunși la acest nivel, va trebui să examinăm separat problema precizării elementelor matricei subtronsonului j, după cum urmărim determinarea componentelor axiale ale stărilor de deformații-eforturi ($S_j = SA_j$), respectiv determinarea componentelor normale ale stărilor de deformații-eforturi ($S_j = SN_j$).

4.1. Cazul componentelor axiale ale stărilor de deformații-eforturi

În condițiile precizate putem integra direct ecuația diferențială (11') Determinînd constantele de integrare prin condiții impuse asupra funcției u_x și primei sale derivate $N_x = EA_j \cdot \mathrm{d}u_x/\mathrm{d}x$, în extremitatea inițială a subtronsonului, obținem, pentru $x = l_j$ (l_j fiind lungimea subtronsonului), expresiile deplasării axiale $u_{j,l}$ și forței axiale $N_{j,l}$ din extremitatea finală a subtronsonului ca funcții liniare de deplasarea axială $u_{j,0}$ și forța axială $N_{j,0}$ din extremitatea inițială a subtronsonului :

$$u_{j,0} + N_{j,0} \cdot \frac{l_j}{EA_j} - \frac{PT_j \cdot l_j^2}{2 \cdot EA_j} = u_{j,l},$$

$$N_{j,0} - PT_j \cdot l_j = N_{j,l}.$$

În scriere matriceală, aceste relații sunt echivalente cu

$$SA_j \times VA_{j,0} = VA_{j,l}, \tag{2'}$$

ceea ce reprezintă aplicarea relației (2) la nivelul subtonsonului j, pentru situația componentelor axiale ale stărilor de deformații-eforturi. În acest mod, matricea subtronsonului devine :

$$SA_j = \begin{pmatrix} 1 & \frac{l_j}{EA_j} & -\frac{PT_j \cdot l_j^2}{2 \cdot EA_j} \\ 0 & 1 & -PT_j \cdot l_j \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

4.2. Cazul componentelor normale ale stărilor de deformații-eforturi

Vom explicita matricea SN_j, la început pentru unele cazuri în care soluția generală a ecuației diferențiale (12′) se poate exprima prin funcții elementare în formă finită ;

Cazul 1. Subtronsonul în statica liniară.

$\begin{cases} N_x = 0, \text{ ceea ce implică și } PT_j = 0, \\ KW = 0. \end{cases}$

Ecuația diferențială (12′) devine

$$\frac{d^4 v_x}{dx^4} = \frac{PN_j}{EI_j}$$

și, în aceste condiții, poate fi integrată direct. Determinăm constantele de integrare prin condiții impuse în extremitatea inițială a subtronsonului pentru v_x și primele sale trei derivate $\varphi_x = dv_x/dx$, $M_x = -EI_j \cdot d^2v_x/dx^2$, $T_x = -EI_j \cdot d^3v_x/dx^3$. Pentru $x = l_j$ obținem expresiile deplasării normale $v_{j,l}$, rotirii $\varphi_{j,l}$, momentului încovoietor $M_{j,l}$ și forței tăietoare $T_{j,l}$, din extremitatea finală a subtronsonului, ca funcții liniare de deplasarea $v_{j,0}$, rotirea $\varphi_{j,0}$, momentul încovoietor $M_{j,0}$, și forța tăietoare $T_{j,0}$ din extremitatea sa inițială :

$$v_{j,0} + \varphi_{j,0} \cdot l_j - M_{j,0} \cdot \frac{l_j^2}{2 \cdot EI_j} - T_{j,0} \cdot \frac{l_j^3}{6 \cdot EI_j} + \frac{PN_j \cdot l_j^4}{2 l_j \cdot EI_j} = v_{j,l},$$

$$\varphi_{j,0} - M_{j,0} \frac{l_j}{EI_j} - T_{j,0} \frac{l_j^2}{2 \cdot EI_j} + \frac{PN_j \cdot l_j^3}{6 \cdot EI_j} = \varphi_{j,l},$$

$$M_{j,0} + T_{j,0} \cdot l_j - \frac{PN_j \cdot l_j}{2} = M_{j,l},$$

$$T_{j,0} - PN_j \cdot l_j = T_{j,l}.$$

În scrierea matriceală, aceste relații sunt echivalente cu

$$SN_j \times VN_{j,0} = VN_{j,l}, \tag{2''}$$

ceea ce reprezintă aplicarea relației (2) la nivelul subtronsonului j, pentru situația componentelor normale ale stărilor de deformații-eforturi, în cazul considerat. În acest mod, matricea subtronsonului devine :

$$SN_j = \begin{pmatrix} 1 & l_j & -\frac{l_j^2}{2\cdot EI_j} & -\frac{l_j^3}{6\cdot EI_j} & \frac{PN_j\cdot l_j^4}{2\cdot EI_j} \\ 0 & 1 & -\frac{l_j}{EI_j} & -\frac{l_j^2}{2\cdot EI_j} & \frac{PN_j\cdot l_j^3}{6\cdot EI_j} \\ 0 & 0 & 1 & l_j & -\frac{PN_j\cdot l_j^2}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -PN_j\cdot l_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad 15$$

Cazul 2. Subtronsonul rezemat pe mediu elastic, în statica liniară.
$N_x = 0$, ceea ce implică și $PT_j = 0$.
Ecuația diferențială (12′) devine

$$\frac{\mathrm{d}^4 v_x}{\mathrm{d}x^4} + \frac{KW\cdot BR_j}{EI_j}\cdot v_x = \frac{PN_j}{EI_j}.$$

Soluția ei poate fi exprimată prin funcții hiperbolice și trigonometrice. Procedînd la fel ca în cazul precedent, obținem

$$v_{j,0}\cdot F_1(\lambda_j l_j) + \varphi_{j,0}\cdot\frac{F_2(\lambda_j l_j)}{\lambda_j} - M_{j,0}\cdot\frac{F_3(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^2\cdot EI_j} - T_{j,0}\cdot\frac{F_4(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^3\cdot EI_j} + \\ + \frac{PN_j\cdot[1 - F_1(\lambda_j l_j)]}{4\cdot\lambda_j^4\cdot EI_j} = v_{j,l},$$

$$v_{j,0}\cdot 4\lambda_j\cdot F_4(\lambda_j l_j) + \varphi_{j,0}\cdot F_1(\lambda_j l_j) - M_{j,0}\cdot\frac{F_2(\lambda_j l_j)}{\lambda_j\cdot EI_j} - T_{j,0}\cdot\frac{F_3(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^2\cdot EI_j} + \\ + \frac{PN_j\cdot F_4(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^3\cdot EI_j} = \varphi_{j,l},$$

$$v_{j,0}\cdot\frac{KW\cdot BR_j\cdot F_3\cdot(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^2} + \varphi_{j,0}\cdot\frac{KW\cdot BR_j F_4(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^3} + \\ + M_{j,0}\cdot F_1(\lambda_j l_j) + T_{j,0}\cdot\frac{F_2(\lambda_j l_j)}{\lambda_j} - \frac{PN_j\cdot F_3(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^2} = M_{j,l},$$

$$v_{j,0}\cdot\frac{KW.BR_j\cdot F_2(\lambda_j l_j)}{\lambda_j} + \varphi_{j,0}\frac{KW\cdot BR_j\cdot F_3(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^2} - \\ - M_{j,0}\cdot 4\lambda_j\cdot F_4(\lambda_j l_j) + T_{j,0}\cdot F_1(\lambda_j l_j) - \frac{PN_j\cdot F_2(\lambda_j l_j)}{\lambda_j} = T_{j,l},$$

$$SN_j = \begin{pmatrix} F_1(\lambda_j l_j) & \frac{F_2(\lambda_j l_j)}{\lambda_j} & -\frac{F_3(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^2 \cdot EI_j} & -\frac{F_4(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^3 \cdot EI_j} & \frac{PN_j \cdot [1 - F_1(\lambda_j l_j)]}{4 \cdot \lambda_j^4 \cdot EI_j} \\ -4\lambda_j \cdot F_4(\lambda_j l_j) & F_1(\lambda_j l_j) & -\frac{F_2(\lambda_j l_j)}{\lambda_j \cdot EI_j} & -\frac{F_3(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^2 \cdot EI_j} & \frac{PN_j \cdot F_4(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^3 \cdot EI_j} \\ \frac{KW \cdot BR_j \cdot F_3(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^2} & \frac{KW \cdot BR_j \cdot F_4(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^3} & F_1(\lambda_j l_j) & \frac{F_2(\lambda_j l_j)}{\lambda_j} & -\frac{PN_j \cdot F_3(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^2} \\ \frac{KW \cdot BR_j \cdot F_2(\lambda_j l_j)}{\lambda_j} & \frac{KW \cdot BR_j \cdot F_3(\lambda_j l_j)}{\lambda_j^2} & -4 \cdot \lambda_j \cdot F_4(\lambda_j l_j) & -F_1(\lambda_j l_j) & -\frac{PN_j \cdot F_2(\lambda_j l_j)}{\lambda_j} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$
\begin{pmatrix}
\frac{K_0(y_1)}{y_1} & -\frac{I_0(y_1)}{y_1} & 0 & 0 \\
K_1(y_1) & I_1(y_1) & -\frac{2K_1(y_1)}{y_1} - K_0(y_1) & -\frac{2I_1(y_1)}{y_1} + I_0(y_1) \\
\frac{2K_1(y_1)}{y_1} + K_0(y_1) & -\frac{2I_1(y_1)}{y_1} + I_0(y_1) & K_1(y_1) & I_1(y_1) \\
\frac{4K_1(y_1)}{y_1^2} + \frac{2K_0(y_1)}{y_1} + K_1(y_1) & \frac{4I_1(y_1)}{y_1^2} - \frac{2I_0(y_1)}{y_1} + I_1(y_1) & \frac{2K_1(y_1)}{y_1} + K_0(y_1) & -\frac{2I_1(y_1)}{y_1} + I_0(y_1)
\end{pmatrix}
\tag{12}
$$

unde am notat

$$\lambda_j^4 = \frac{KW \cdot BR_j}{4 \cdot EI_j},$$

$$F_1(\lambda_j l_j) = \operatorname{ch} \lambda_j l_j \cdot \cos \lambda_j l_j,$$

$$F_2(\lambda_j l_j) = 0{,}5 \cdot (\operatorname{ch} \lambda_j l_j \cdot \sin \lambda_j l_j + \operatorname{sh} \lambda_j l_j \cdot \cos \lambda_j l_j),$$

$$F_3(\lambda_j l_j) = 0{,}5 \cdot \operatorname{sh} \lambda_j l_j \cdot \sin \lambda_j l_j,$$

$$F_4(\lambda_j l_j) = 0{,}25 \cdot (\operatorname{ch} \lambda_j l_j \cdot \sin \lambda_j l_j - \operatorname{sh} \lambda_j l_j \cdot \cos \lambda_j l_j).$$

Prin comparaţie cu relaţia (2''), explicităm elementele matricei SN_j pentru cazul considerat :

Cazul 3. Subtronsonul întins cu o forţă constantă, în statica de ordinul doi.

$$\begin{cases} N_x = N_j > 0, \text{ ceea ce implică } PT_j = 0 \quad (N_j = \text{constant}), \\ KW = 0. \end{cases}$$

Ecuaţia diferenţială (12') devine :

$$\frac{\mathrm{d}^4 v_x}{\mathrm{d}x^4} - \frac{N_j}{EI_j} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}x^2} = \frac{PN_j}{EI_j}.$$

Soluţia ei se poate exprima prin funcţii hiperbolice şi algebrice. Determinăm constantele de integrare punînd condiţii în extremitatea iniţială a subtronsonului pentru deplasarea v_x, rotirea $\varphi_x = \mathrm{d}v_x/\mathrm{d}x$, momentul

încovoietor $M_x = -EI_j \cdot d^2v_x/dx^2$ și forța tăietoare $T_x = -EI_j \cdot d^3v_x/dx^3 + N_j \cdot dv_x/dx$. În rest, procedînd analog cazurilor precedente, avem :

$$v_{j,0} + \varphi_{j,0} \cdot \frac{\operatorname{sh} k_j l_j}{k_j} + M_{j,0} \cdot \frac{1 - \operatorname{ch} k_j l_j}{N_j} + T_{j,0} \cdot \frac{1}{N_j} \left(l_j - \frac{\operatorname{sh} k_j l_j}{k_j} \right) -$$

$$- \frac{PN_j}{N_j} \left(\frac{1 - \operatorname{ch} k_j l_j}{k_j^2} + \frac{l_j^2}{2} \right) = v_{j,l},$$

$$\varphi_{j,0} \cdot \operatorname{ch} k_j l_j - M_{j,0} \cdot \frac{\operatorname{sh} k_j l_j}{k_j \cdot EI_j} + T_{j,0} \cdot \frac{1 - \operatorname{ch} k_j l_j}{N_j} -$$

$$- \frac{PN_j}{N_j} \left(l_j - \frac{\operatorname{sh} k_j l_j}{k_j} \right) = \varphi_{j,l},$$

$$- \varphi_{j,0} \cdot \frac{N_j \cdot \operatorname{sh} k_j l_j}{k_j} + M_{j,0} \cdot \operatorname{ch} k_j l_j + T_{j,0} \cdot \frac{\operatorname{sh} k_j l_j}{k_j} +$$

$$+ \frac{PN_j}{N_j} \cdot EI_j \cdot (1 - \operatorname{ch} k_j l_j) = M_{j,l},$$

$$T_{j,0} - PN_j \cdot l_j = T_{j,l},$$

unde am notat

$$k_j^2 = \frac{N_j}{EI_j}.$$

Matricea SN_j pentru cazul considerat, devine explicită :

$$
SN_j = \begin{pmatrix}
1 & \frac{\sin k_j l_j}{k_j} & -\frac{1-\cos k_j l_j}{N_j} & -\frac{1}{N_j}\left(l_j - \frac{\sin k_j l_j}{k_j}\right) & \frac{PN_j}{N_j}\cdot\left(-\frac{1-\cos k_j l_j}{k_j^2} + \frac{l_j^2}{2}\right) \\
0 & \cos k_j l_j & -\frac{\sin k_j l_j}{k_j \cdot EI_j} & -\frac{1-\cos k_j l_j}{N_j} & \frac{PN_j}{N_j}\cdot\left(l_j - \frac{\sin k_j l_j}{k_j}\right) \\
0 & \frac{N_j \cdot \sin k_j l_j}{k_j} & \cos k_j l_j & \frac{\sin k_j l_j}{k_j} & -\frac{PN_j}{N_j}\cdot EI_j(1-\cos k_j l_j) \\
0 & 0 & 0 & 1 & -PN_j \cdot l_j \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{pmatrix} . \qquad (18)
$$

$$SN_j = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\operatorname{sh} k_j l_j}{k_j} & \frac{1-\operatorname{ch} k_j l_j}{N_j} & \frac{1}{N_j}\left(l_j - \frac{\operatorname{sh} k_j l_j}{k_j}\right) & -\frac{PN_j}{N_j}\left(\frac{1-\operatorname{ch} k_j l_j}{k_j^2} + \frac{l_j^2}{2}\right) \\ 0 & \operatorname{ch} k_j l_j & -\frac{\operatorname{sh} k_j l_j}{k_j \cdot EI_j} & \frac{1-\operatorname{ch} k_j l_j}{N_j} & -\frac{PN_j}{N_j}\left(l_j - \frac{\operatorname{sh} k_j l_j}{k_j}\right) \\ 0 & -\frac{N_j \cdot \operatorname{sh} k_j l_j}{k_j} & \operatorname{ch} k_j l_j & \frac{\operatorname{sh} k_j l_j}{k_j} & \frac{PN_j}{N_j} EI_j (1 - \operatorname{ch} k_j l_j) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -PN_j l_j \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Cazul 4. Subtronsonul comprimat cu o forță constantă, în statica de ordinul doi.

$$\begin{cases} N_x = -N_j < 0, \text{ ceea ce implică } PT_j = 0 \quad (N_j = \text{constant}), \\ KW = 0. \end{cases}$$

Ecuația diferențială (12′) devine:

$$\frac{\mathrm{d}^4 v_x}{\mathrm{d}x^4} + \frac{N_j}{EI_j} \cdot \frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}x^2} = \frac{PN_j}{EI_j}.$$

Soluția ei se poate exprima prin funcții trigonometrice și algebrice. Matricea subtronsonului se poate obține procedînd identic ca pentru cazul 3.

Aici, vom observa că rezultatul notat (17) trebuie să rămînă corect, dacă înlocuim N_j prin $-N_j$, ceea ce implică și înlocuirea lui k_j^2 prin $-k_j^2$, respectiv a lui k_j prin $i.k_j$, cu $i = \sqrt{-1}$. Știind că $\mathrm{shi} \cdot k_j x = i \cdot \sin k_j x$ și $\mathrm{chi} \cdot k_j x = \cos k_j x$, obținem direct:

În continuare, vom prezenta o modalitate de determinare a elementelor matricei SN_j în *cazul general*, bazat pe integrarea ecuației diferențiale (12′): Vom căuta soluția generală a acestei ecuații sub forma unei serii de puteri cu coficienți nedeterminați:

$$v_x = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot x^m.$$

Primilor patru coeficienți, a_0, a_1, a_2, a_3, le rezervăm rolul constantelor de integrare, astfel încît îi vom determina de la început prin condiții impuse în extremitatea inițială a subtronsonului. Pentru $x = 0$, avem:

$$(v_x)_0 = a_0 = v_{j,0} \longrightarrow a_0 = v_{j,0},$$

$$(\varphi_x)_0 = \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\right)_0 = a_1 = \varphi_{j,0} \longrightarrow a_1 = \varphi_{j,0},$$

$$(M_x)_0 = -EI_j \left(\frac{\mathrm{d}^2 v_x}{\mathrm{d}x^2}\right)_0 = -2 \cdot EI_j \cdot a_2 = M_{j,0} \longrightarrow a_2 = -\frac{1}{2EI_j} \cdot M_{j,0},$$

$$(T_x)_0 = -EI_j\left(\frac{\mathrm{d}^3 v_x}{\mathrm{d}x^3}\right)_0 + (N_x)_0 \cdot \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}x}\right) = -6EI_j \cdot a_3 + N_{j,0} \cdot \varphi_{j,0} = T_{j,0}$$

$$\longrightarrow a_3 = \frac{1}{6 \cdot EI_j}(N_{j,0} \cdot \varphi_{j,0} - T_{j,0}).$$

Notînd

$$\frac{N_{j,0}}{EI_j} = k_1^2,$$

$$\frac{PT_j}{EI_j} = k_2^3,$$

$$\frac{KW \cdot BR_j}{EI_j} = k_3^4,$$

ţinînd seama că $N_x = N_{j,0} - PT_j \cdot x$ şi înlocuind în (12'), obţinem:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1) \cdot a_{m+4} - (m+2)(m+1) \cdot k_1^2 \cdot a_{m+2} +$$

$$+ (m+1)^2 \cdot k_2^3 \cdot a_{m+1} + k_3^4 \cdot a_m\} \cdot x^m = \frac{PN_j}{EI_j}.$$

Identificînd coeficienţii lui x^m din cei doi membrii ai ecuaţiei, obţinem pentru $m = 0$

$$a_4 = \frac{k_1^2}{12} \cdot a_2 - \frac{k_2^3}{24} \cdot a_1 - \frac{k_3^4}{24} \cdot a_0 + \frac{PN_j}{24 \cdot EI_j},$$

respectiv, pentru $m = 1, 2, \ldots \infty$,

$$a_{m+4} = \frac{k_1^2}{(m+4)(m+3)} \cdot a_{m+2} - \frac{(m+1) \cdot k_2^3}{(m+4)(m+3)(m+2)} \cdot a_{m+1} -$$

$$- \frac{k_3^4}{(m+4)(m+3)(m+2)(m+1)} \cdot a_m. \qquad (19)$$

În acest mod putem determina un număr oricît de mare de coeficienţi. În condiţiile în care seria obţinută este convergentă, în continuare vom evidenţia dependenţa coeficienţilor ei de componentele normale ale stărilor

de deformaţii-eforturi din extremitatea iniţială a subtronsonului, prin relaţia matriceală

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = A \times VN_{j,0}, \tag{20}$$

începutul matricei A fiind prezentat mai departe:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2!\cdot EI_j} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{k_1^2}{3!} & 0 & -\frac{1}{3!\cdot EI_j} & 0 \\ -\frac{k_3^4}{4!} & -\frac{k_2^3}{4!} & -\frac{k_1^2}{4!\cdot EI_j} & 0 & \frac{PN_j}{4!\cdot EI_j} \\ 0 & \frac{k_1^4 - k_3^4}{5!} & \frac{2\cdot K_2^3}{5!\cdot EI_j} & -\frac{k_1^2}{5!\cdot EI_j} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}.$$

Pe de altă parte, dependenţa componentelor normale ale stărilor de deformaţii-eforturi, din extremitatea finală a subtronsonului, de coeficienţii seriei, se poate exprima prin relaţia

$$P \times \begin{pmatrix} 1 \\ a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} = VN_{j,l}, \tag{21}$$

începutul matricei P fiind

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & l_j & l_j^2 & l_j^3 & l_j^4 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 2.l_j & 3.l_j^2 & 4.l_j^3 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -2.EI_j & -6.EI_j.l_j & -12.EI_j.l_j^2 & \dots \\ 0 & 0 & N_{j,l} & 2.N_{j,l}.l_j & 3.N_{j,l}.l_j^2-6.EI_j & 4.N_{j,l}.l_j^3-24.EI_j.l_j & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \end{pmatrix}.$$

Din relaţiile (20) şi 21) avem

$$P \times A \times VN_{j,0} = VN_{j,l}$$

şi prin comparaţie cu relaţia (2'') obţinem matricea subtronsonului :

$$SN_j = P \times A \tag{22}$$

C. VERIFICAREA STABILITĂŢII BAREI

Verificarea stabilităţii barei este necesară dacă există tronsoane comprimate. În acest caz, trebuie să ne asigurăm că intensităţile încărcărilor axiale, date, nu sînt superioare intensităţilor critice, corespunzătoare primei situaţii de pierdere a stabilităţii barei.

În acest scop, va fi suficient să examinăm evoluţia valorii determinantului coeficienţilor necunoscutelor sistemului de ecuaţii al problemei, stabilit în legătură cu relaţia (1), la variaţia forţelor axiale de la zero la valorile finale, calculate în prealabil. În mod practic, vom considera forţele axiale din toate secţiunile barei afectate de coeficientul $c_H = k/NH$ şi vom calcula valoarea determinantului pentru $k = 1, 2 \dots NH$, ceea ce ne permite să apreciem dacă acesta se anulează pe intervalul respectiv. În caz afirmativ, prin interpolare obţinem coeficientul c_H efectiv care, în baza legăturii liniare dintre forţele axiale şi încărcările axiale, determină intensităţile critice de pierdere a stabilităţii.

III. BARA CU MAI MULTE DESCHIDERI

Din faptul că procedeul de calcul explicitat permite calculul unor bare avînd simultan tronsoane rezemate sau nu pe medii elastice, decurge posibilitatea abordării şi tratării grinzilor continue pe reazeme rigide sau elastice, în aceleaşi condiţii ca bară cu o singură deschidere.

Pentru cazul grinzilor continue pe reazeme rigide, va fi suficient să înlocuim reazemele rigide cu tronsoane de lungimi foarte mici, rezemate pe un mediu elastic avînd coeficientul de pat foarte mare. De altfel, reazemele rigide sînt ficţiuni de calcul, astfel încît condiţiile pe care va trebui, să le simulăm nu sînt, după părerea noastră, condiţiile reazemelor rigide ci condiţiile reale de rezemare. Din acest motiv, lungimile tronsoanelor de rezemare introduse vor trebui să corespundă lungimilor reale, iar coeficienţii de pat, mediilor reale de rezemare.

Pentru cazul grinzilor continue pe reazeme elastice, vom înlocui reazemele elastice cu tronsoane de lungimi corespunzătoare situaţiilor reale, rezemate pe medii elastice ai căror coeficienţi de pat vor fi determi-

naţi din relaţii de echivalenţă cu coeficienţii de proporţionalitate ce caracterizează comportarea elastică a reazemelor respective.

IV. CARACTERISTICILE PROGRAMULUI DE REZOLVARE A PROBLEMEI

În raport cu cele prezentate anterior, la Centrul de Calcul IPIU am elabort un program, scris în limbajul FORTRAN-IV şi testat pe calculatorul electronic IBM-360/40, care efectuează calculul static al barei drepte, plane, cu legături oarecare la extremităţi, prin teoria de ordinul I sau II după cum forţa axială are valori egale sau diferite de zero, cu verificarea stabilităţii barei în cazul că există tronsoane comprimate şi, cu luarea în consideraţie a rezemărilor parţiale sau totală pe medii elastice, în următoarele condiţii :

— Calculul stărilor de deformaţii-eforturi se efectuează în extremităţile barei şi în maximum 49 de secţiuni intermediare, precizare în prealabil [5].

— Forma unei secţiuni transversale a barei poate fi oarecare, cu condiţia ca ea să permită descompunerea sa în figuri elmentare[6]. Numărul maxim de figuri elementare în care se poate face descompunerea este 10.

— Pe un interval cu o aceeaşi formă a secţiunilor transversale, dimensiunile transversale pot varia după funcţii algebrice de grad maxim 1, cu eventuale discontinuităţi în secţiunile intermediare.

— Încărcările acceptate sînt următoarele :

forţe distribuite (normale şi axiale) variind după funcţii algebrice de grad maxim 1, cu eventuale discontinuităţi în secţiunile intermediare considerate ;

forţe şi deplasări liniare concentrate (normale şi axiale), cupluri şi rotiri concentrate, acţionînd în secţiunile intermediare ;

valori impuse asupra deformaţiilor şi eforturilor din extremităţile barei.

— Încărcările pot fi grupate în ipoteze de încărcare, numărul acestora putînd fi oricît de mare.

BIBLIOGRAFIE

1. A. Cornelis, G. Deprez, G. Fonder, ş.a., *Application des ordinateurs au calcul des structures*, Eyrolles + Masson, Paris, 1968.
2. Z. Gheorghiu, *Contribuţiuni la calculul static al sistemelor suspendate cu grindă de rigidizare*, Teză de doctorat, Institutul de construcţii, Bucureşti, 1972.
3. Ch. Massonet, G. Deprez, R. Maquoi, ş.a., *Calculul structurilor la calculatoarele electronice*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1974.
4. S. Răutu, M. Bergman, *Stabilitatea statică a sistemelor elastice*, Ministerul Învăţămîntului şi Culturii, Bucureşti, 1960.
5. A. Scarlat. *Stabilitatea şi calculul de ordinul II al structurilor*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1969. *Stabilitatea structurilor. Probleme speciale*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1969.
6. S. Timoshenco, J. Gere, *Teoria stabilităţii elastice*, Edit. tehnică, Bucureşti, 1967.

Primită la redacţie la 17 decembrie 1974

[5] A se vedea cap. II (paragraf A, pct. 1) şi cap. III.

[6] Prin figuri elementare înţelegem : ori ce figură căreia i se cunoaşte ordonata centrului de greutate, aria şi momentul de inerţie ecuatorial, proprii, dreptunghiul şi triunghiul avînd bazele paralele cu axa ecuatorială a secţiunii, cercul.

PARAMETRII FUNCȚIONĂRII ÎN REGIM OSCILANT A UNUI RECIPIENT CILINDRIC VERTICAL, DE MARE PRESIUNE, CU FUNCȚIE DE ACUMULATOR ENERGETIC ÎNTR-O CENTRALĂ HIDROPNEUMATICĂ. I

de A. PAVEL

Institutul de petrol și gaze Ploiești

Se prezintă principalele rezultate obținute în urma efectuării unor studii, cercetări, determinări (măsurări) și analize teoretice-experimentale privind parametrii ce caracterizează ciclurile de presiune corespunzătoare funcționării în regim oscilant a unui recipient cilindric vertical, de mare presiune, cu funcție de acumulator energetic într-o centrală hidropneumatică. Lucrarea se finalizează printr-un grafic de lucru, cu ajutorul căruia poate fi precizat, oricînd și în mod acoperitor, numărul ciclurilor de presiune preluate de către recipientul respectiv pentru o anumită durată totală de serviciu.

1. INTRODUCERE

Recent, la solicitarea unei mari uzine constructoare de mașini, în cadrul catedrei de Utilaj tehnologic de la Institutul de petrol și gaze din Ploiești, au fost efectuate — prin persoana autorului — o serie de studii, cercetări, determinări (măsurări) și analize tehnice privind funcționarea în regim de *presiune variabilă* a unui recipient cilindric vertical (de mare presiune) cu funcție de acumulator energetic într-o centrală hidropneumatică.

În cele ce urmează vor fi prezentate principalele rezultate care au fost evidențiate cu această ocazie pentru recipientul respectiv, rezultate aplicate imediat și confirmate concludent în activitatea practică și de cercetare. Nu se va insista asupra unei prezentări generale prealabile, deoarece principalele caracteristici constructive și datele utile de proiectare, de execuție sau de exploatare pentru agregatul acumulatorului hidropneumatic, în ansamblul său și contextul funcționalității specifice, au făcut obiectul unor lucrări publicate sau realizate anterior*).

*) A. Pavel — În ST. CERC. MEC. APL., TOM. 31, 1972, NR. 5, p. 1178—1189 și nr. 6, p. 1367—1399, respectiv TOM 32, 1973, nr. 3, p. 653—668 și nr. 4 p. 851—875. De asemenea : A. Pavel — Studii, cercetări, determinări (măsurări) și analize tehnice privind comportarea recipientului nr. 531/1963 al presei de 6 000 tf în condițiile funcționării în regim oscilant și precizarea rezervei de capacitate portantă în conformitate cu prevederile normelor de securitate tehnică, Contract de cercetare științifică nr. 265/1972, București, I.P.G.G., 1972.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1848

2. MĂSURAREA ŞI ÎNREGISTRAREA MĂRIMILOR CARACTERISTICE ALE CICLURILOR DE PRESIUNE

2.1. GENERALITĂŢI

Avînd în vedere modul de lucru al centralei hidropneumatice în discuţie, respectiv modul de funcţionare al agregatului acumulatorului hidropneumatic (fig. 1), în circuitul conductelor de înaltă presiune pentru emulsie, care include şi recipientul *3*, presiunea (suprapresiunea) interioară

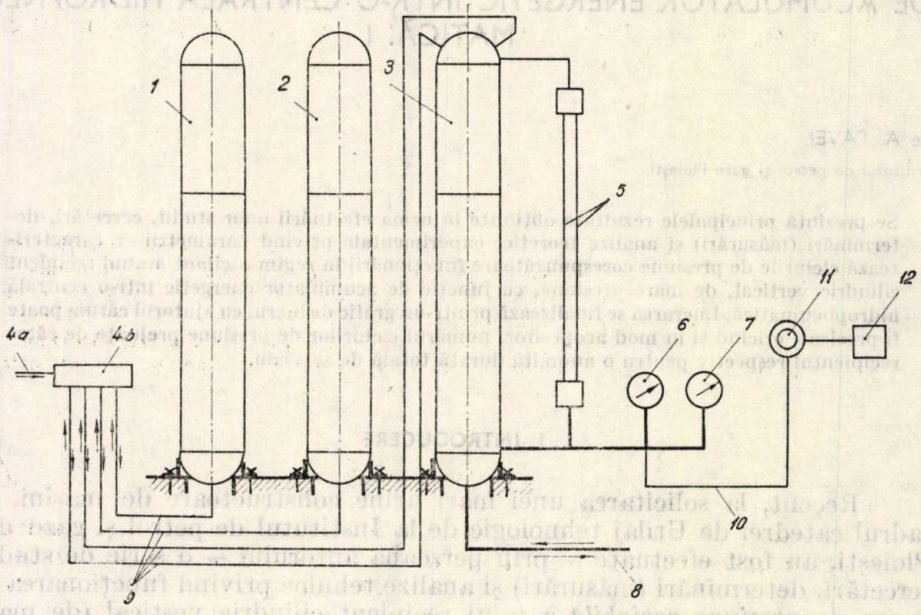


Fig. 1. — Schema principială a agregatului acumulatorului hidropneumatic şi a conexiunii aparaturii de măsurare şi înregistrare a mărimilor caracteristice ale ciclurilor de presiune. *1, 2* — recipientele pentru aer comprimat; *3* — recipientul pentru lichid de lucru [emulsie, $p_{max} = 320$ daN/cm² (kgf/cm²)]; *4a* — legătura la compresorul de aer (conductă de înaltă presiune pentru aer comprimat); *4b* — cutia cu cinci ventile; *5* — coloanele tubulare cu contacte electrice; *6, 7* — manometrele cu contacte electrice; *8* — circuitul conductelor de înaltă presiune pentru lichidul de lucru (emulsie); *9* — circuitele conductelor de înaltă presiune pentru aer comprimat; *10* — linia de conectare (conductă de înaltă presiune) a traductorului de presiune la recipientul *3*; *11* — traductorul de presiune; *12* — aparatul de înregistrare a oscilaţiilor de presiune din recipientul *3*.

variază *ciclic*, sursele principale generatoare de variaţii ciclice fiind următoarele:

— modul de folosire al centralei hidropneumatice şi deci regimul de lucru al acesteia, în principal;

— modul de lucru al compresorului de aer din circuitul conductelor de înaltă presiune pentru aer comprimat, circuit care include şi recipientele *1,...,3*;

— modul de lucru al pompelor (triplex) de alimentare cu emulsie a circuitului conductelor corespunzătoare de înaltă presiune.

În lucrarea de față se va considera că presiunea (instantanee) p din recipientul *3* variază *periodic* în timp, *cu o pulsație oarecare*, conform schematizării generale redate în figura 2. Se precizează următoarele :

1. Totalitatea valorilor succesive pe care le ia presiunea p, pornindu-se de la o anumită valoare, oarecare, pînă cînd se ajunge din nou la aceeași valoare (p variind în același sens), formează un *ciclu de presiune* (de exemplu *abc* sau *bcd* în figura 2). Ciclul de presiune se poate defini, de asemenea, ca reprezentînd totalitatea valorilor pe care presiunea p le ia în cursul unei perioade T.

2. Pe parcursul unui ciclu, presiunea p — în daN/cm² sau în kgf/cm² — trece o dată și numai o singură dată printr-o valoare maximă p_{max} — *presiunea maximă* și printr-o valoare minimă p_{min} — *presiunea minimă*. În conformitate cu terminologia de limbă germană, cele două valori extreme p_{max} și p_{min} pot fi numite, de asemenea, *presiune superioară* $p_{sup} = p_{max}$ și, respectiv, *presiune inferioară* $p_{inf} = p_{min}$.

3. Valoarea medie a presiunii ciclului se numește *presiune medie* p_m și se calculează cu următoarea formulă evidentă :

$$p_m = 0{,}5\,(p_{max} + p_{min}) =$$

$$= 0{,}5\,(p_{sup} + p_{inf}), \qquad (1)$$

în care $p_{max} = p_{sup}$ și $p_{min} = p_{inf}$ sînt *valori algebrice*.

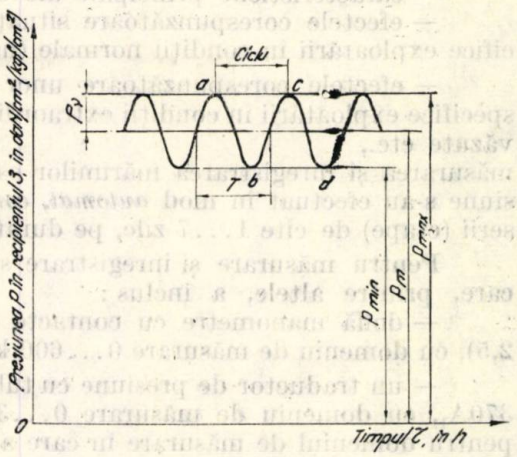


Fig. 2. — Schematizarea convențională a variației periodice în timp, cu o pulsație oarecare, a presiunii p din recipientul *3* (fig. 1).

4. Valoarea rezultînd ca diferență între valorile algebrice $p_{max} = p_{sup}$ și p_m, respectiv p_m și $p_{min} = p_{inf}$, se numește *amplitudinea* p (a presiunii sau) a ciclului de presiune și se calculează cu următoarea formulă evidentă :

$$p_v = p_{max} - p_m = p_m - p_{min} = 0{,}5\,(p_{max} - p_{min}). \qquad (2)$$

5. Rezultă în mod evident :

$$p_{max} = p_{sup} = p_m + p_v, \qquad (3a)$$

$$p_{min} = p_{inf} = p_m - p_v, \qquad (3b)$$

deci un ciclu de presiune poate fi *definit* fie prin perechea de valori $p_{max} = p_{sup}$ și $p_{min} = p_{inf}$, fie prin perechea de valori p_m și p_v.

6. Raportul dintre *valorile algebrice* p_{min} și p_{max} se numește *coeficient (factor) de asimetrie* R al ciclului de presiune, adică

$$R = \frac{p_{min}}{p_{max}}. \qquad (4)$$

7. Raportul dintre *valorile absolute* p_v și p_m se numește *caracteristică* K a ciclului de presiune, adică

$$K = \frac{|p_v|}{|p_m|}. \qquad (5)$$

Mărimile p_m, p_v, R și K constituie *caracteristici generale* ale ciclurilor de presiune.

2.2. PROGRAMUL DE MĂSURARE ŞI ÎNREGISTRARE. APARATURA FOLOSITĂ

Pentru a preciza cu certitudine şi evidenţia concludent :

— modalitatea de variaţie ciclică oscilantă a presiunii din recipientul *3* şi deci din întregul sistem al centralei hidropneumatice*),

— caracteristicile principale ale ciclurilor de presiune,

— efectele corespunzătoare situaţiilor caracteristice frecvente, specifice exploatării în condiţii normale (uşoare şi moderate),

— efectele corespunzătoare unor situaţii episodice sau incidentale, specifice exploatării în condiţii extraordinare (grele), accidentale sau neprevăzute etc.,

măsurarea şi înregistrarea mărimilor caracteristice ale ciclurilor de presiune s-au efectuat în mod *automat, continuu şi îndelungat*, în mai multe serii (etape) de cîte 1...7 zile, pe durata a patru luni.

Pentru măsurare şi înregistrare s-a folosit un complet de aparate, care, printre altele, a inclus :

— două manometre cu contacte electrice (unul cl. 1,6, celălalt cl. 2,5), cu domeniu de măsurare 0...600 kgf/cm² (adică 0...588,4 daN/cm²);

— un traductor de presiune cu tub Bourdon, etanş, model AT10ELT $370A_1$, cu domeniu de măsurare 0...350 kgf/cm² (0...343,2 daN/cm²); pentru domeniul de măsurare în care a fost folosit, precizia traductorului a fost de $\pm$ 0,5%, respectiv $\pm$ 0,040 mA ;

— un înregistrator automat model ELR 45 (cl. 0,5), cu domeniu de înregistrare 0...350 kgf/cm² (0...343,2 daN/cm²), înregistrarea efectuîndu-se pe bandă de hîrtie**).

Schema principială a conexiunii la recipientul *3* a aparaturii de măsurare şi înregistrare continuă automată a mărimilor caracteristice ale ciclurilor de presiune este redată în figura 1.

2.3. EFECTUAREA MĂSURĂRILOR ŞI ÎNREGISTRĂRILOR AUTOMATE

Măsurarea şi înregistrarea automată a presiunii din recipientul *3* s-a desfăşurat neîntrerupt pe durata a peste 1 000 h, în care scop s-au folosit mai multe zeci de metri de bandă de înregistrare.

Din totalitatea înregistrărilor efectuate, pentru prelucrare şi interpretare au fost reţinute numai rezultatele caracteristice *cele mai concludente*, evidenţiate în *cinci serii de înregistrări* numerotate convenţional I, II, III, IV şi V.

Structura duratei (totale de 477,50 h***) a celor cinci serii de înregistrări (I...,V) a fost cea indicată în tabelul 1. Se precizează că, pentru sim-

*) După unele aprecieri anterioare, evazive şi subiective, în condiţii de exploatare, presiunea din recipientul 3 ar varia — în limitele 320...272 daN/cm² (kgf/cm²) — cu o pulsaţie maximă de 60 h^{-1}. Valorii de 272 daN/cm² (kgf/cm²) îi corespunde o reducere cu 15% a presiunii maxime de 320 daN/cm² (kgf/cm²).

**) Chart nr. E35050A (1 diviziune = 7,0 kgf/cm² = 6,865 daN/cm²) şi chart nr. 128/07E35030D (1 diviziune = 11,54 kgf/cm² = 11,32 daN/cm²).

***) Ceea ce reprezintă circa 48% din durata totală (de peste 1 000 h) a tuturor înregistrărilor automate efectuate în mod neîntrerupt pentru presiunea din recipientul 3.

plificarea operațiilor de citire a benzilor de înregistrare, precum și pentru facilitarea prelucrării și interpretării rezultatelor obținute, ora sexagesimală (1h = 60 min) a fost înlocuită cu ora centezimală (1h = 100 min).

Tabelul 1

Structura duratei seriilor de înregistrări automate efectuate pentru presiunea din recipientul 3

Seria de înregistrări	Durata totală a înregistrărilor, în h	Durata înregistrării efective a ciclurilor de presiune, în h	Durata înregistrării efective a ciclurilor de presiune, în procente (%) din durata totală a înregistrărilor	Durata întreruperii accidentale a înregistrărilor, în h	Durata întreruperii accidentale a înregistrărilor în procente (%) din durata totală a înregistrărilor	Durata înregistrării variațiilor monotone de presiune *), în h	Durata înregistrării variațiilor monotone de presiune *), în procente(%) din durata totală a înregistrărilor
I	91,20	circa 60,5	66,4	circa 5,5	6,0	circa 25,2	27,6
II	156,41	circa 60,9	39,0	circa 20,5**)	13,0	circa 75,0	48,0
III	94,64	circa 74,4	78,6	circa 9,0	9,6	circa 11,2	11,8
IV	16,25	circa 12,6	77,5	—	—	circa 3,6	22,5
V	119,00	circa 112,0	94,2	—	—	circa 7,0	5,8
Total	477,50	circa 320,4	67,1	circa 35,0**)	7,3	circa 122,0	25,6

*) Presiune statică.

**) Este inclusă și durata înregistrărilor de proastă calitate, cu multe anomalii.

3. LECTURAREA ȘI STUDIEREA BENZILOR DE ÎNREGISTRARE AUTOMATĂ A CICLURILOR DE PRESIUNE

3.1. TIPURILE CICLURILOR DE PRESIUNE

3.1.1. Ciclurile de presiune staționare

Dacă, pe toată durata aplicării sale, presiunea p din recipientul *3* variază mereu între aceleași și numai între aceleași valori p_{max} și p_{min}, atunci ciclurile de presiune se numesc *staționare.*

După valorile și semnele algebrice pe care le pot avea limitele p_{max} și p_{min}, respectiv după valorile și semnele factorului de asimetrie R, în general ciclurile de presiune staționare pot fi, la rîndul lor, de mai multe tipuri, așa cum rezultă din tabelul 2 și figura 3. Ciclul de presiune staționar pentru care $R = -1$, $p_{max} = |p_{min}|$, $p_m = 0$ și $p_v = p_{max}$, se numește ciclu *simetric* (poz. 5 în tab. 2). Toate celelalte cicluri de presiune staționare din tabelul 2, pentru care $R \neq -1$, se numesc cicluri *asimetrice.* Cazurile limită de cicluri de presiune oscilante pentru care amplitudinea p_v devine, practic, *nulă* corespund presiunii *statice*, asemenea „cicluri" de presiune avînd, evident, $R = +1$ (poz. 1 și 9 în tab. 2).

Tabelul 2

Sistematizarea centralizată, pentru cazul general, a tipurilor de cicluri de presiune staționare

Poziția	Schematizarea ciclului de presiune staționar	Limitele maximă și minimă ale presiunii p, variabile după un ciclu staționar		Caracteristicile generale ale ciclului de presiune staționar			Tipul ciclului de presiune staționar
		p_{max}	p_{min}	p_m	p_v	R	
1	Fig. 3 *a*	$p_{max} = p_{min} > 0$		$p_m = p_{max} = p_{min}$	$p_v = 0$	$R = +1$	Presiune statică sau cvasistatică
2	Fig. 3 *c*	$p_{max} > 0$	$p_{min} > 0$	$p_m > 0$	$p_v \neq 0$	$0 < R < +1$	Ciclu oscilant pozitiv (*COP*)
3	Fig. 3 *e*	$p_{max} > 0$	$p_{min} = 0$	$p_m = \frac{p_{max}}{2} = p_v$ $p_m > 0$		$R = 0$	Ciclu pulsant pozitiv (*CPP*) (Ciclu oscilant pozitiv)
4	Fig. 3 *h*	$p_{max} > 0$ $p_{max} > \lvert p_{min} \rvert$	$p_{min} < 0$	$p_m > 0$	$p_v \neq 0$	$-1 < R < 0$	Ciclu alternant asimetric pozitiv (*CAASP*)
5	Fig. 3 *g*	$p_{max} > 0$ $p_{max} = \lvert p_{min} \rvert$	$p_{min} < 0$	$p_m = 0$	$p_v = p_{max}$	$R = -1$	Ciclu alternant simetric (*CAS*)
6	Fig. 3 *i*	$p_{max} > 0$ $p_{max} < \lvert p_{min} \rvert$	$p_{min} < 0$	$p_m < 0$	$p_v \neq 0$	$-\infty < R < -1$	Ciclu alternant asimetric negativ (*CAASN*)
7	Fig. 3 *f*	$p_{max} = 0$	$p_{min} < 0$	$p_m = \frac{p_{min}}{2}$ $p_m < 0$	$p_v = \left\lvert \frac{p_{min}}{2} \right\rvert$	$R = \pm\infty$	Ciclu pulsant negativ (*CPN*) (Ciclu oscilant negativ)
8	Fig. 3 *d*	$p_{max} < 0$	$p_{min} < 0$	$p_m < 0$	$p_v \neq 0$	$+1 < R < +\infty$	Ciclu oscilant negativ (*CON*)
9	Fig. 3 *b*	$p_{max} = p_{min} < 0$		$p_m = p_{max} = p_{min}$	$p_v = 0$	$R = +1$	Presiune statică sau cvasistatică

În general, sînt foarte rare situațiile practice cînd presiunea din recipientele acumulatoare hidropneumatice sau tehnologice variază după cicluri staționare.

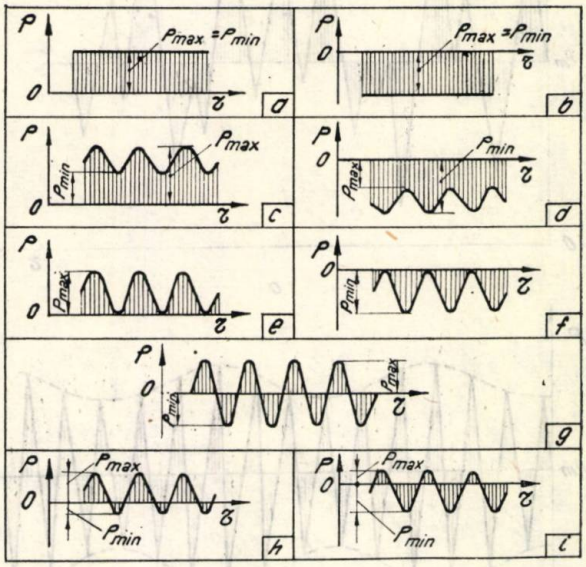


Fig. 3. — Schematizarea, pentru cazul general, a tipurilor de cicluri de presiune staționare (tab. 1).
a și *b* — presiune statică sau cvasistatică ; *c* — ciclu oscilant pozitiv (*COP*) ; *d* — ciclu oscilant negativ (*CON*) ; *e* — ciclu pulsant pozitiv (*CPP*) ; *f* — ciclu pulsant negativ (*CPN*) ; *g* — ciclu alternant simetric (*CAS*) ; *h* — ciclu alternant asimetric pozitiv (*CAASP*) ; *i* — ciclu alternant asimetric negativ (*CAASN*).

3.1.2. Ciclurile de presiune nestaționare

Dacă, pe toată durata aplicării presiunii p, valorile limită p_{max} și p_{min} ale ciclului de presiune nu se mențin invariabile, atunci ciclurile de presiune se numesc *nestaționare*. La rîndul lor, ciclurile de presiune nestaționare pot fi de diferite tipuri, așa cum se exemplifică reprezentativ în figura 4.

Evident, în aceste condiții, punctul de plecare al studiilor privind regimurile (nestaționare) de variație a presiunii din recipientele acumulatoare hidropneumatice sau tehnologice îl va constitui cercetarea modului cum se *modifică în timp* ciclurile de presiune. În schematizarea din figura 5, liniile orizontale corespund valorii p_{max} avînd treptele p_I, p_{II}, ... etc., iar n_I, n_{II},... etc. reprezintă numărul de cicluri de presiune în cadrul treptelor respective I, II,...etc.

În cazul schematizat în figura 5 *a*, întîi se aplică n_I cicluri de presiune de amplitudine p_I, urmate apoi — pe toată durata funcționării sau pînă la distrugere (dacă este necesar) — de aplicarea a n_{II} cicluri de presiune de amplitudine $p_{II} < p_I$.

În cazul schematizat în figura 5 *b*, se începe cu aplicarea a n_I cicluri de presiune de amplitudine $p_I > p_{II}$, după care se aplică — pe toată durata funcționării sau pînă la distrugere (dacă este necesar) — n_{II} cicluri de presiune de amplitudine $p_{II} < p_I$.

Atunci cînd *două* trepte de valori p maxime (de exemplu p_I și p_{II}) *se repetă periodic* (fig. 4 *c*) pe toată durata funcționării recipientului hidropneumatic sau tehnologic, evident, se va avea de-a face cu un ciclu de presiune nestaționar cu variație periodică și discontinuă. Dacă numărul de perioade T este mare sau relativ mare (min. 30...40), atunci ordinea succesiuni

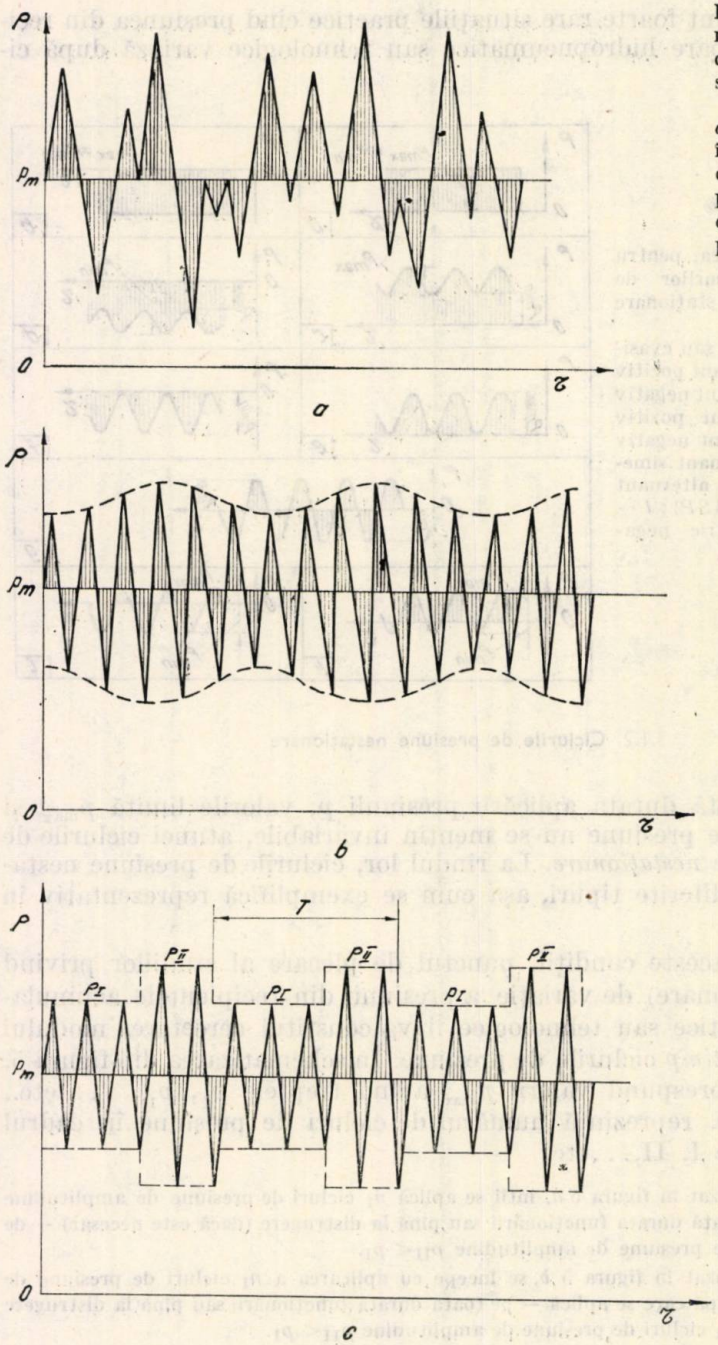


Fig. 4. — Schematizarea exemplificativă a cîtorva cicluri de presiune nestaționare, reprezentative.
a — ciclurile cu variație în mod nedefinit; *b* — ciclurile cu variație periodică și continuă; *c* — ciclurile cu variație periodică și discontinuă.

lor este *indiferentă*. Pentru valori p_{max} avînd trepte *multiple* cu amplitudini p_i și durate corespunzătoare n_i, repetate periodic de un număr mare de ori (fig. 5 *c* și *d*) — pe durata funcționării sau pînă la distrugere (dacă este cazul) —, ordinea succesiunii perioadelor respective este, de asemenea, *indiferentă*.

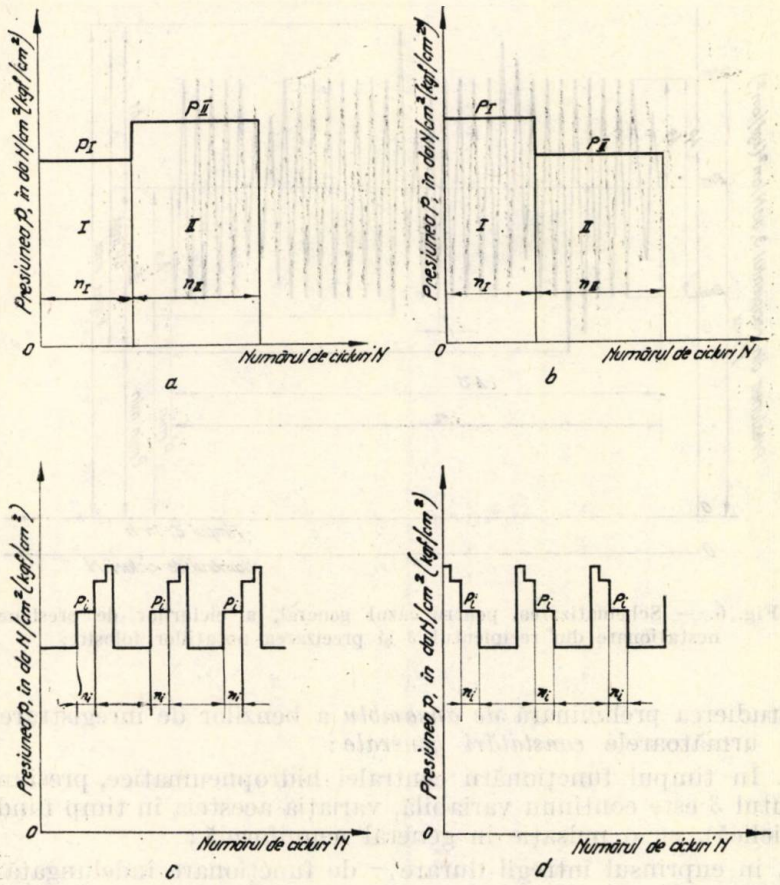


Fig. 5. — Cicluri de presiune nestaționare.
a și *b* — schematizarea principială a cazului cu *o singură treaptă* de schimbare a amplitudinilor ciclurilor de presiune ($a - p_I < p_{II}$; $b - p_I > p_{II}$); *c* și *d* — schematizarea principială a cazului cu *trepte multiple* de schimbare a amplitudinilor ciclurilor de presiune.

3.2. CITIREA BENZILOR DE ÎNREGISTRARE

Întrucît viteza de deplasare a benzilor de înregistrare a fost mică (circa 2 cm/h), iar peniţa de înregistrare a avut un vîrf relativ gros (0,5 mm), pentru citirea tuturor diagramelor obţinute $p = p(\tau)$ au fost folosite fie dispozitive speciale cu lupe sau cu sisteme de lentile cu grosisment 2...4 (pentru citirea directă), fie procedeul proiecţiei episcopice şi diascopice pe ecran mare (pentru citirea indirectă). La prelucrarea primară a rezultatelor obţinute s-au utilizat notaţiile indicate în figura 6 şi explicitate la finele lucrării. Pentru cazurile particulare, corespunzătoare diferitelor tipuri (simbolizate convenţional) de cicluri de presiune nestaţionare şi asimetrice din cuprinsul aceluiaşi interval caracteristic $\Delta\tau$ (fig. 7), formulele de calcul pentru factorii de asimetrie R sînt indicate în tabelul 3.

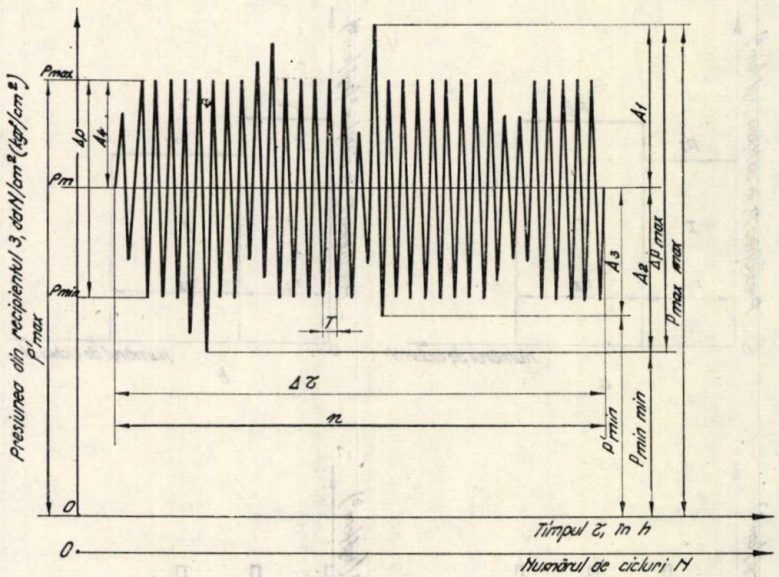


Fig. 6. — Schematizarea, pentru cazul general, a ciclurilor de presiune nestaționare din recipientul *3* și precizarea notațiilor folosite.

Studierea preliminară *de ansamblu* a benzilor de înregistrare a evidențiat următoarele *constatări generale* :

1. În timpul funcționării centralei hidropneumatice, presiunea din recipientul *3* este continuu variabilă, variația acesteia în timp fiind periodică (ciclică), cu o pulsație în general neuniformă ;

2. în cuprinsul întregii durate τ de funcționare îndelungată a centralei hidropneumatice, ciclurile de presiune sînt cicluri oscilante pozitive (*COP* — fig. 3*c*) nestaționare, în general cu variație în mod nedefinit (fig. 4*a*) ; însă, în cuprinsul unor intervale caracteristice $\Delta\tau$ suficient de restrînse și corespunzător definite, ciclurile de presiune sînt cicluri oscilante pozitive (*COP* — fig. 3*c*) staționare, cvasistaționare (cu neuniformități și asimetrii neînsemnate sau destul de reduse) sau nestaționare — simetrice sau asimetrice — cu variație discontinuă periodică (fig. 4*c*) ori aperiodică ;

3. ciclurile de presiune sensibil asimetrice apar, de regulă, cu o periodicitate nedefinită și numai în cuprinsul unor intervale caracteristice $\Delta\tau$ corespunzătoare funcționării centralei hidropneumatice în anumite regimuri, acestea din urmă fiind impuse prin modul de exploatare al consumatorului energetic (instalație tehnologică, presă mecanică, transportor etc.) ;

4. în majoritatea lor, ciclurile de presiune sensibil asimetrice prezintă (destul de des în cuprinsul multor intervale caracteristice $\Delta\tau$ înguste sau relativ înguste) neuniformități mari față de valoarea limită $p_{min} = p_{inf}$, cărora le corespund căderi de presiune mari (vîrfuri jos) față de valoarea mărimii p_m a ciclurilor de presiune preponderente ; uneori aceste căderi de presiune se produc monoton (fig. 8*c*) sau oscilant (fig. 8*a* și *b*) în mai multe

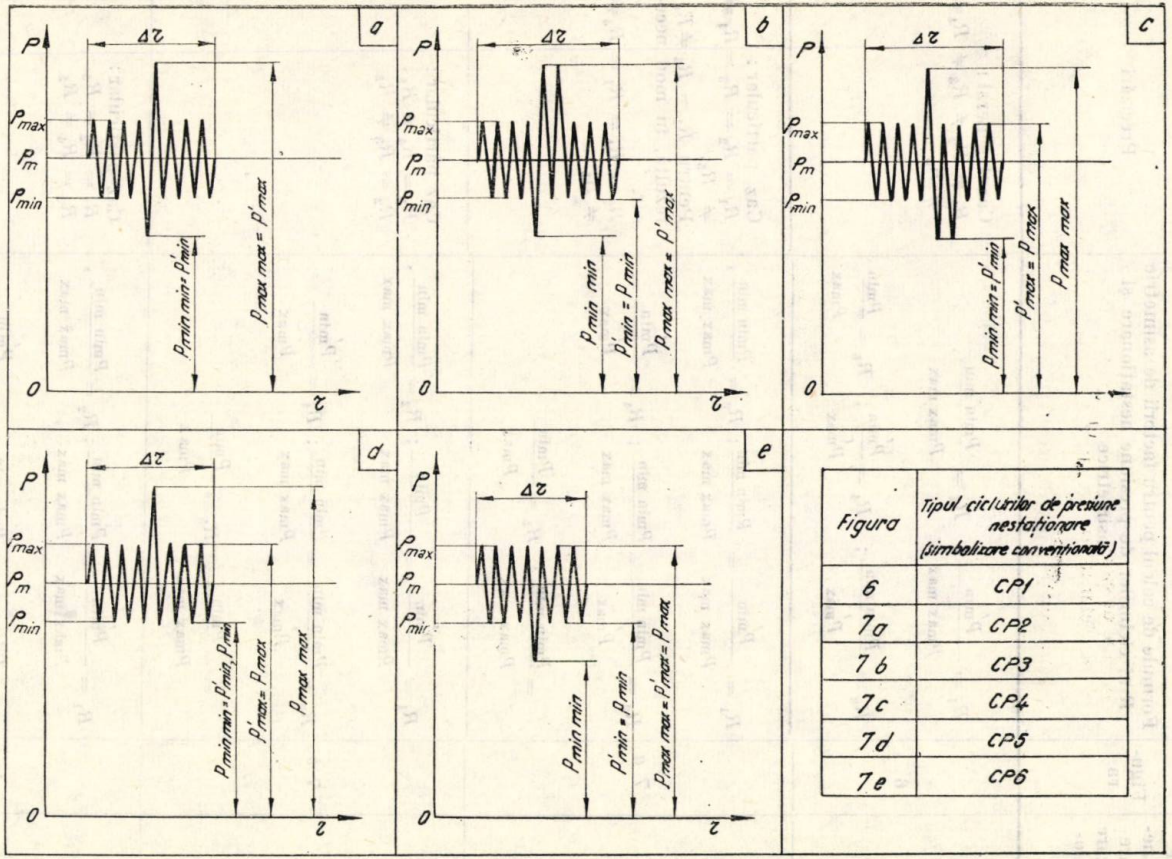


Figura	Tipul ciclurilor de presiune nestaţionare (simbolizare convenţională)
6	CP1
7a	CP2
7b	CP3
7c	CP4
7d	CP5
7e	CP6

Fig. 7. — Schematizarea, pentru diferite cazuri particulare, a principalelor tipuri de cicluri de presiune nestaţionare din recipientul *3* şi precizarea notaţiilor folosite.

Observaţie. Simbolizarea tipurilor de cicluri de presiune nestaţionare, redate schematic în figurile 6 şi 7, a fost adoptată în mod convenţional şi nu este restrictivă.

Tabelul 3

Sistematizarea centralizată a principalelor tipuri de cicluri de presiune nestaționare

Tipul ciclurilor de presiune nestaționare (simbolizare convențională)	Figura	Formule de calcul pentru factorii de asimetrie R ai ciclurilor de presiune nestaționare și asimetrice	Precizări
CP 1	6	$R_1 = \frac{p'_{\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_2 = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$, $R_3 = \frac{p_{\min\,\min}}{p'_{\max}}$; $R_4 = \frac{p'_{\min}}{p'_{\max}}$; $R_5 = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$	Cazul general: $R_1 \neq R_2 \neq R_3 \neq R_4 \neq R_5$
CP 2	7 *a*	$R_1 = \frac{p'_{\min}}{p_{\max\,\max}} = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_2 = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$, $R_3 = \frac{p_{\min\,\min}}{p'_{\max}} = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_4 = \frac{p'_{\min}}{p'_{\max}} = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_5 = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$	Caz particular: $R_1 = R_2 = R_3 = R_4 \neq R_5$. Pentru $R_1 = R_3 \neq R_5$, rezultă, în mod necesar, $R_2 = R_4 = R_1 = R_3 \neq R_5$
CP 3	7 *b*	$R_1 = \frac{p'_{\min}}{p_{\max\,\max}} = \frac{p_{\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_2 = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$, $R_3 = \frac{p_{\min\,\min}}{p'_{\max}} = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_4 = \frac{p'_{\min}}{p'_{\max}} = \frac{p_{\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_5 = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$	Caz particular: $R_1 = R_4 \neq R_5$, $R_2 = R_3 \neq R_5$
CP 4	7 *c*	$R_1 = \frac{p'_{\min}}{p_{\max\,\max}} = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_2 = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$, $R_3 = \frac{p_{\min\,\min}}{p'_{\max}} = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max}}$; $R_4 = \frac{p'_{\min}}{p'_{\max}} = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max}}$; $R_5 = \frac{p_{\min}}{p_{\max}}$	Caz particular: $R_1 = R_2 \neq R_5$, $R_3 = R_4 \neq R_5$

Tabelul 3 (continuare)

Tipul ciclurilor de presiune nestaţionare (simbolizare convenţională)	Figura	Formule de calcul pentru factorii de asimetrie R ai ciclurilor de presiune nestaţionare şi asimetrice	Precizări
CP 5	7 *d*	$R_1 = \frac{p'_{\min}}{p_{\max\,\max}} = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_2 = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$, $R_3 = \frac{p_{\min\,\min}}{p'_{\max}} \quad \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max}}$; $R_4 = \frac{p'_{\min}}{p'_{\max}} =$ $= \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max}}$; $R_5 = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max}}$	Caz particular: $R_1 = R_2 \neq R_5$, $R_3 = R_4 = R_5$
CP 6	7 *e*	$R_1 = \frac{p'_{\min}}{p_{\max\,\max}} = \frac{p_{\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_2 = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$, $R_3 = \frac{p_{\min\,\min}}{p'_{\max}} = \frac{p_{\min\,\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_4 = \frac{p'_{\min}}{p'_{\max}} =$ $\frac{p_{\min}}{p_{\max\,\max}}$; $R_5 = \frac{p_{\min}}{p_{\max}} = \frac{p_{\min}}{p_{\max\,\max}}$	Caz particular: $R_1 = R_4 = R_5$, $R_2 = R_3 \neq R_5$.

trepte succesive şi într-un interval de timp relativ restrîns (fig. 8), revenirea la valoarea limită $p_{\max} = p_{\sup}$ a ciclurilor de presiune preponderente realizîndu-se, de asemenea, monoton (fig. 8*b*) sau oscilant (fig. 8 *a* şi *c*), în mai multe trepte succesive şi, deci, după un anumit număr de cicluri (nestaţionare şi asimetrice), cărora le corespunde un interval de timp determinat; de observat că astfel de cicluri de presiuni apar numai în unele perioade ale funcţionării consumatorului energetic şi sînt, aşadar, efecte directe ale unui anumit mod de acţionare (mai ales manuală) a comenzilor şi deci de exploatare (raţională sau neraţională) a consumatorului respectiv;

5. în condiţiile corespunzătoare nefuncţionării centralei hidropneumatice pe o durată mai mult sau mai puţin îndelungată, presiunea (statică) din recipientul *3* scade monoton cu timpul, pierderea de presiune respectivă efectuîndu-se în ritmuri şi deci cu viteze variabile de la o situaţie specifică la alta; acest fenomen poate fi explicat, în primul rînd şi în mare măsură, prin prezenţa pierderilor de aer comprimat datorite existenţei unor neetanşeităţi (dar nu mereu aceleaşi) pe circuitele de mare presiune ale centralei hidropneumatice şi, în al doilea rînd şi în mică măsură, prin modificarea în mod nedefinit — de la o situaţie specifică dată la altă situaţie

specifică dată — a parametrilor de stare (temperatură, concentrații etc.) ai mediilor de lucru folosite (aer comprimat, emulsie etc.);

6. în condițiile corespunzătoare funcționării centralei hidropneumatice pe o durată mai mult sau mai puțin îndelungată, presiunea medie p_m de asemenea scade (monoton) cu timpul, pierderea de presiune — în aceste

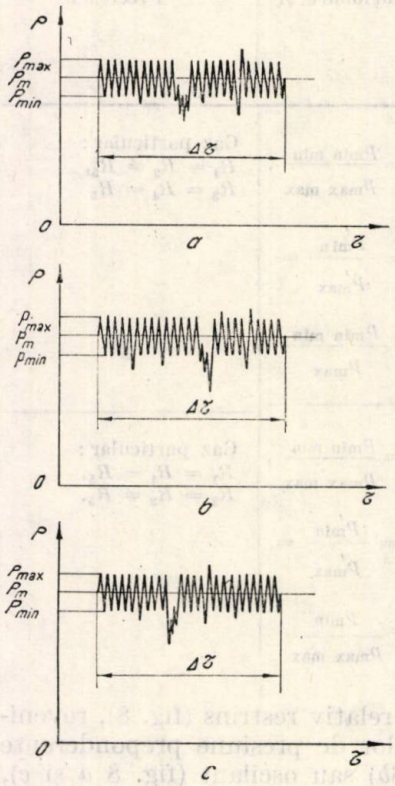


Fig. 8. — Schematizarea ciclurilor de presiune sensibil asimetrice cu neuniformități mari față de valoarea limită $p_{min} = p_{inf}$.

Figura	Căderea de presiune față de valoarea medie p_m se produce	Revenirea la valoarea limită $p_{max} = p_{sup}$ se realizează
a	oscilant	oscilant
b	oscilant	monoton
c	monoton	oscilant
neindicată	monoton	monoton

cazuri — efectuîndu-se în ritmuri și deci cu viteze care par a fi relativ constante de la o situație specifică la alta; acest fenomen poate fi explicat, în primul rînd și în mare măsură, prin prezența pierderilor de aer comprimat datorite existenței unor neetanșeități (aproape mereu aceleași pentru un regim de exploatare cvasistaționar) și a pierderilor hidraulice de natură diferită pe circuitele de mare presiune ale centralei hidropneumatice și, în al doilea rînd și în mică măsură, prin modificarea (și de această dată) în mod nedefinit — în timp — a parametrilor de stare ai mediilor de lucru folosite;

7. atunci cînd presiunea pernei de aer din recipientul *3* se dovedește a fi insuficientă și deci necorespunzătoare pentru un regim de lucru dat al centralei hidropneumatice, concordant cu un anumit regim de exploatare al receptorului energetic, potențialul energetic al agregatului acumulatorului hidropneumatic (fig. 1) se sporește sau reface prin cuplarea — pe o durată determinată — a compresorului de aer comprimat; în aceste condiții, se realizează o creștere monotonă (liniară, cvasiliniară, neliniară?)

sau oscilantă — pînă la valoarea dorită — a presiunii statice (în situația de nefuncționare a centralei), respectiv a presiunii medii p_m (în situația de funcționare a centralei) din recipientul *3*.

Se precizează că citirea pe benzile de înregistrare a valorilor mărimilor care privesc direct lucrarea de față s-a efectuat cu precizia corespunzătoare mijloacelor și modalităților de citire folosite, iar evaluarea explicită a valorilor presiunilor p din recipientul *3* s-a făcut cu o eroare în minus (subevaluare*), de pînă la 1,21% pentru $p = 225{,}6 \ldots 294{,}2$ daN/cm² = $= 230 \ldots 300$ kgf/cm² și cu o eroare în plus (supraevaluare**) de pînă la 0,52% pentru $p = 294{,}2 \ldots 343{,}2$ daN/cm² = $300 \ldots 350$ kgf/cm².

Primită la redacție la 14 iulie 1975

NOTAȚII

p este presiunea instantanee din recipientul *3*, în daN/cm² (kgf/cm²);

I, II, ... — treptele în limitele cărora ciclurile de presiune sînt identice (au aceeași amplitudine);

n_I, n_{II}, ... — numărul ciclurilor de presiune identice din cadrul treptelor respective I, II, ...;

p_I, p_{II}, ... — amplitudinea ciclurilor de presiune identice din cadrul treptelor respective I, II, ...;

$p_{max\,max}$, $p_{min\,min}$ — valoarea singulară *cea mai mare* și, respectiv, *cea mai mică* a presiunii p, evidențiată în cuprinsul unui anumit interval convențional de timp (interval caracteristic $\Delta\tau$), respectiv în cadrul unei anumite trepte cu un număr n' determinat de cicluri de presiune preponderente identice sau cvasiidentice, în daN/cm² (kgf/cm²); în unele cazuri, particulare, valorile $p_{max\,max}$ și $p_{min\,min}$ sînt valori limită (p_{max} și p_{min} în figurile 2 și 3 *c*) ale unui aceluiași ciclu de presiune;

p_{med} — valoarea singulară *medie* (medie aritmetică) a presiunii din recipientul *3*, în daN/cm² (kgf/cm²), calculată cu următoarea formulă evidentă: $p_{med} = 0{,}5\,(p_{max\,max} + p_{min\,min})$;

$p_{max} = p_{sup}$, $p_{min} = p_{inf}$ — valoarea *maximă* (superioară) și, respectiv, *minimă* (inferioară) a presiunii din recipientul *3* (valoare evidențiată), corespunzătoare ciclurilor (n') de presiune cu ponderea cea mai mare — cicluri de presiune preponderente — în intervalul caracteristic $\Delta\tau$, respectiv frecvent atinsă în intervalul dat, în daN/cm² (kgf/cm²);

$p_m = 0{,}5\,(p_{max} + p_{min})$ — valoarea *medie* (medie aritmetică) a presiunii din recipientul 3, corespunzătoare ciclurilor (n') de presiune preponderente în intervalul caracteristic $\Delta\tau$, în daN/cm² (kgf/cm²), calculată cu formula (1);

---

*) Subevaluarea maximă de 1,21% corespunde presiunii $p = 225{,}6$ daN/cm² = 230 kgf/cm². Pentru valorile p crescătoare față de ultima valoare, subevaluarea se reduce treptat și devine egală cu zero pentru $p = 294{,}2$ daN/cm² = 300 kgf/cm².

**) Supraevaluarea maximă de 0,52% corespunde presiunii $p = 343{,}2$ daN/cm² = 350 kgf/cm². Pentru valori p scăzătoare față de ultima valoare, supraevaluarea se reduce treptat și devine egală cu zero pentru $p = 294{,}2$ daN/cm² = 300 kgf/cm².

n — numărul *total* al ciclurilor de presiune, evidenţiat în intervalul caracteristic $\Delta\tau$;

$\nu = \frac{n}{\Delta\tau}$ — pulsaţia ciclurilor de presiune, în s^{-1} sau h^{-1}, calculată (rotunjit la număr întreg) prin raportarea numărului total n al ciclurilor de presiune din intervalul caracteristic dat la durata $\Delta\tau$ (în s sau în h) corespunzătoare intervalului (caracteristic) respectiv;

ν_{min}, ν_{max}, ν_{calc} — pulsaţiile minimă, maximă şi calculată (de calcul) ale ciclurilor de presiune, în s^{-1} sau h^{-1};

T — perioada (respectiv periodicitatea) ciclurilor de presiune, în s;

T_{max}, T_{min} — valoarea singulară *maximă* şi, respectiv, *minimă* a perioadei T, evidenţiată în cuprinsul unui anumit interval caracteristic $\Delta\tau$, respectiv în cadrul unei anumite trepte cu un anumit număr total n al ciclurilor de presiune, în s;

$T_m = 0{,}5\,(T_{max} + T_{min})$ — valoarea *medie* (medie aritmetică) a perioadei T, în s;

$T_{mc} = \frac{\Delta\tau}{n} = \nu^{-1}$ — valoarea *medie de calcul* a perioadei T, în s;

T_{calc} — perioada calculată (de calcul) a ciclurilor de presiune, în s sau h;

$I_T = \frac{T_{max}}{T_{min}}$ — indicatorul (simplexul) perioadei ciclurilor de presiune;

p_ν, A, A_1, A_2, A_3, A_4 — amplitudini ale ciclurilor de presiune (nestaţionare şi „asimetrice") din intervalul caracteristic $\Delta\tau$, în daN/cm² (kgf/cm²), calculate cu formula (2) şi, respectiv, cu următoarele formule evidente (fig. 6):

$$A_1 = p_{max\,max} - p_m\,;\quad A_3 = p_m - p'_{min}\,,$$

$$A_2 = p_m - p_{min\,min}\,;\quad A_4 = p'_{max} - p_m\,,$$

unde

$$p'_{max} = p_m + A_4\,;\quad p'_{min} = p_m - A_3\,;$$

pentru comoditatea calculelor, amplitudinile $A_1, \ldots, A_4$ se consideră ca fiind mărimi algebrice *convenţionale* cu următoarele semne: $A_1 > 0$ (pozitiv); $A_2 < 0$ (negativ); $A_3 < 0$ (negativ) şi $A_4 > 0$ (pozitiv); pentru ciclurile de presiune *staţionare „simetrice"* (*COP* în tab. 2 şi fig. 3 *c*), evident,

$$p_{max\,max} = p'_{max} = p_{max} \quad \text{şi} \quad p_{min\,min} = p'_{min} = p_{min}\,,$$

rezultînd:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A = p_\nu\,;$$

r, r_1, r_2, r_3, r_4 — mărimi adimensionale (simplexuri), caracteristice ciclurilor de presiune nestaţionare şi asimetrice, numite coeficienţi (factori) de *neuniformitate* ai ciclurilor de presiune şi calculate cu următoarele formule:

$$r_1 = \frac{A_1}{A_3}\,;\quad r_2 = \frac{A_1}{A_2}\,;\quad r_3 = \frac{A_4}{A_2}\,;\quad r_4 = \frac{A_4}{A_3}\,,$$

în care amplitudinile A se introduc cu semnele lor algebrice convenționale, rezultînd (în general) ; $r_1<0$ (negativ) ; $r_2<0$ (negativ) ; $r_3<0$ (negativ) și $r_4<0$ (negativ) ; pentru ciclurile de presiune *staționare simetrice* (*COP* în tab. 2 și fig. 3 *c*), rezultă în mod evident :

$$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r = 1{,}00 ;$$

$\Delta p = p_{max} - p_{min}$ — valoarea sistematică a diferenței (căderii) de presiune în recipientul *3* (valoare evidențiată), corespunzătoare ciclurilor (n') de presiune preponderente în intervalul caracteristic $\Delta\tau$, respectiv frecvent atinsă în intervalul dat, în daN/cm² (kgf/cm²) ;

$\Delta p_{max} = p_{max\,max} - p_{min\,min} = A_1 - (-A_2) = A_1 + A_2$ — valoarea singulară *cea mai mare* a diferenței (căderii) de presiune în recipientul *3*, evidențiată în cuprinsul unui anumit interval caracteristic $\Delta\tau$, respectiv în cadrul unei anumite trepte cu un anumit număr total n al ciclurilor de presiune, în daN/cm² (kgf/cm²) ;

$R = R_5, R_1, R_2, R_3, R_4$ — coeficienți (factori) de simetrie (mărimi adimensionale, simplexuri) ai ciclurilor de presiune (nestaționare și asimetrice) din cuprinsul unui interval caracteristic $\Delta\tau$, calculați (pentru cazul general) cu formula (4) și, respectiv, cu următoarele formule de definire :

$$R_1 = \frac{p'_{min}}{p_{max\,max}} ; \quad R_3 = \frac{p_{min\,min}}{p'_{max}} ,$$

$$R_2 = \frac{p_{min\,min}}{p_{max\,max}} ; \quad R_4 = \frac{p'_{min}}{p'_{max}} ;$$

pentru cazul ciclurilor de presiune *staționare simetrice* (*COP* în tab. 2 și fig. 3 *c*), rezultă în mod evident :

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = R_5 = R ;$$

P, P_1, P_2, P_3, P_4 — coeficienți (factori) de apreciere (mărimi adimensionale, simplexuri) ai ciclurilor de presiune, calculați cu următoarele formule generale :

$$P_1 = \frac{p_{max\,max}}{p_m} > 1 ; \quad P_3 = \frac{p_{max}}{p_m} > 1,$$

$$P_2 = \frac{p_{min\,min}}{p_m} < 1 ; \quad P_4 = \frac{p_{min}}{p_m} < 1,$$

respectiv

$$\frac{P_2}{P_1} = R_2 ; \quad P_1 = \frac{P_2}{R_2} ; \quad P_2 = R_2 P_1 ,$$

$$\frac{P_4}{P_3} = R_5 = R ; \quad P_3 = \frac{P_4}{R_5} = \frac{P_4}{R} ; \quad P_4 = R_5 P_3 = R P_3 ;$$

pentru cazul ciclurilor de presiune *staţionare simetrice* (*COP* în tab. 2 şi fig. 3 *c*), rezultă în mod evident :

$$P_1 = P_3; \quad P_2 = P_4,$$

$$\frac{P_2}{P_1} = R_2 = \frac{P_4}{P_3} = R_5 = R;$$

pentru cazul presiunii *statice sau cvasistatice* (poz. 1 în tab. 2 şi fig. 3 *a*), rezultă de asemenea în mod evident :

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = P = 1{,}00;$$

L — lăţimea benzii de dispersie a valorilor mărimilor de tip p corespunzătoare ciclurilor de presiune din recipientul *3*, în daN/cm² (kgf/cm²) ;

$\delta_1 = 100\,(P_1 - 1)$, $\delta_2 = 100\,(1 - P_2)$, $\delta_3 = 100\,(P_3 - 1)$, $\delta_4 = 100\,(1 - P_4)$ — abaterea în plus, respectiv în minus, a valorilor singulare $p_{\max\max}$ şi $p_{\min\min}$ şi a valorilor sistematice $p_{\max}$ şi $p_{\min}$ faţă de valorile corespunzătoare p_m, în %;

τ — timpul (durata, durata înregistrărilor efective ale ciclurilor de presiune), în s sau h ;

$\Delta\tau$ — durata unui interval caracteristic, în h ;

τ_s — durata totală de serviciu, în h ;

τ_{I}, τ_{II}, τ_{III}, τ_{IV} — durata totală de înregistrare efectivă a ciclurilor de presiune în seriile de înregistrări I, II, III şi, respectiv, IV, în h ;

τ_t — durata totală de înregistrare efectivă a ciclurilor de presiune în seriile de înregistrări I, ..., IV (împreună), în h ;

τ_{cf} — durata totală (calculată) corespunzătoare funcţionării recipientului *3* într-un regim de pulsaţii dat, în h ;

N — numărul (total al) ciclurilor de presiune din recipientul *3* ;

N_{I}, N_{II}, N_{III}, N_{IV} — numărul (total al) ciclurilor de presiune din recipientul *3* în seriile de înregistrări I, II, III şi, respectiv, IV ;

N_t — valoarea globală a numărului (total al) ciclurilor de presiune din recipientul *3* în seriile de înregistrări I, ..., IV (împreună) ;

N_{cf}, $N_{cf\ max}$, $N_{cf\ min}$ — numărul total (calculat, maxim sau minim) al ciclurilor de presiune corespunzătoare funcţionării recipientului *3* într-un regim de pulsaţii dat ;

N_{ct}, $N_{ct\ max}$, $N_{ct\ min}$, $N_{ct\ med}$ — valorile globale (calculate, maxime, minime şi medii) ale numărului (total) de cicluri de presiune preluate de recipientul *3* pentru o anumită durată totală de serviciu.

CERCETĂRI PRIVIND DINAMICA CILINDRILOR COMPACTORI VIBRATORI

de POLIDOR BRATU

Institutul de cercetări în construcții și economia construcțiilor (INCERC)

În lucrare se prezintă studiul dinamic al mașinilor de compactat prin vibrare cu două trepte de izolare a vibrațiilor.
Din studiul dinamic rezultă regimul optim de funcționare în scopul obținerii parametrilor vibrațiilor de lucru, precum și ai izolării motorului termic, grupului de pompare, cabinei manipulantului contra vibrațiilor.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

Amploarea lucrărilor de construcții a impus cu necesitate intensificarea procesului de mecanizare a tehnologiilor de lucru utilizate pe șantiere. Astfel, ritmul actual al construirii de drumuri nu poate fi conceput fără utilizarea mașinilor de compactat.

În lumea întreagă se manifestă tendința folosirii pe scară tot mai mare a mașinilor de compactat prin vibrare, reprezentate prin cilindrii compactori vibratori și plăcile vibrante. Cilindrii compactori vibratori față de cei statici oferă posibilitatea compactării unor straturi mai adînci la o greutate mai mică a mașinii. De exemplu, un cilindru compactor static de 12—16 t cu o încărcare lineară de 90 daN//cm, realizează compactarea unui strat de umplutură de circa 30 cm, în timp ce un cilindru compactor vibrator de 4 t compactează optim un strat cu grosimea de peste 50 cm. În străinătate, fabricarea cilindrilor compactori vibratori într-o gamă largă cu tipodimensiuni a condus la înlocuirea aproape totală a cilindrilor statici.

Mașinile de compactat prin vibrare prezintă dificultăți în alegerea și optimizarea regimului dinamic de funcționare. În acest context se înscrie și relația mașină-mediu de compactat privită din punctul de vedere al cunoașterii coeficienților de rigiditate și de amortizare ai mediului. Acești coeficienți se determină numai pe cale experimentală, impunîndu-se urmărirea lor în timp, deoarece din cauza variațiilor condițiilor de mediu (temperatură, umiditate) nu rămîn constanți.

În prezentul articol se va aborda dinamica unui cilindru vibrator compactor cu două trepte de izolare, fără a se lua în considerare elementele disipatoare de energie.

2. DETERMINAREA PARAMETRILOR DINAMICI

Părţile componente, ale cilindrului compactor vibrator (fig. 1) sînt :
— tamburul vibrator amplasat în faţă;

— şasiul anterior, amplasat în faţa maşinii deasupra cilindrului vibrator, constituie suportul celor două trepte de izolare dintre şasiul maşinii şi tamburul vibrator ;

— şasiul maşinii este amplasat în spate şi constituie suportul motorului, grupului de pompare şi cabinei manipulantului ;

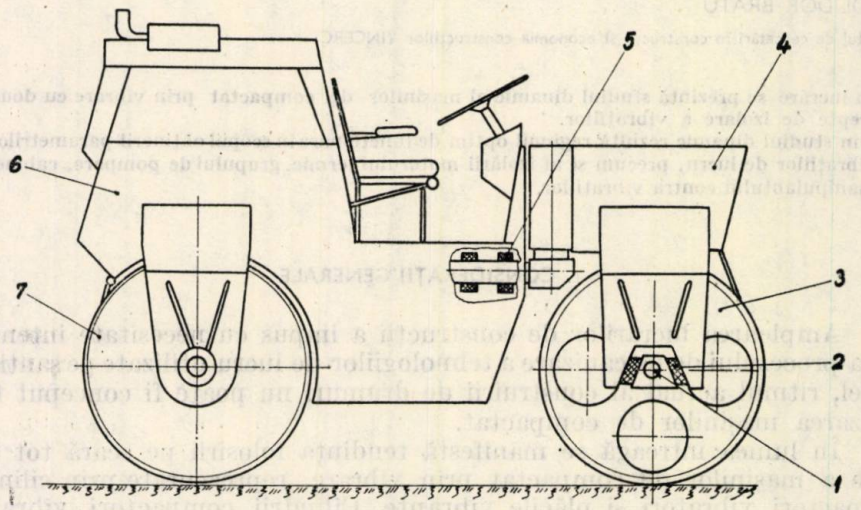


Figura 1. — Schema constructivă a unui cilindru compactor vibrator.

— tamburul static amplasat în spate, formează al doilea reazem al maşinii.

2.1. SCHEMA DINAMICĂ DE CALCUL

În vederea stabilirii ecuaţiilor diferenţiale de mişcare pentru fiecare parte componentă a maşinii, modelul real descris mai înainte a fost asimilat cu modelul elastic cu patru grade de libertate prezentat în figura 2. Disipările de energie din sistem au fost neglijate deoarece ne interesează zonele îndepărtate de rezonanţă.

În figura 2 s-a notat cu m_v — masa cilindrului compactor vibrator ; m_s — masa cilindrului static ; m şi J — masa, respectiv, momentul de inerţie al şasiului maşinii în raport cu axa transversală ce trece prin centrul de greutate C ; m_2 — masa contraşasiului ; c_1 şi c_4 — coeficienţii de rigiditate ai mediului compactat ; c_2 şi c_3 — coeficienţii de rigiditate ai elementelor elastice.

Şasiul maşinii are două grade de libertate definite de coordonatele x (deplasarea pe verticală a centrului de greutate) şi φ (rotirea şasiului

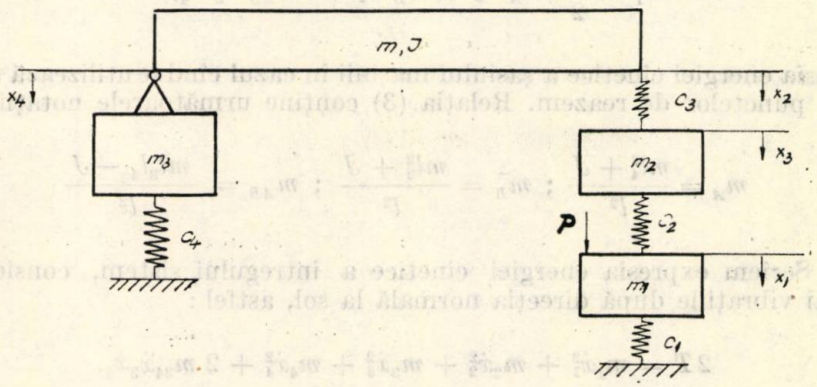


Figura 2. — Schema dinamică de calcul.

în jurul centrului de greutate). Coordonatele x şi φ pot fi înlocuite prin coordonatele x_3 şi x_4 ale punctelor A şi, respectiv, B (figura 3).

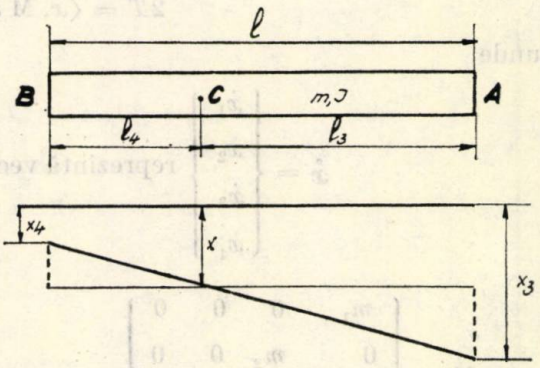


Figura 3. — Schema şasiului spate.

Expresia energiei cinetice T_1 a şasiului se poate scrie sub forma

$$T_1 = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2, \tag{1}$$

unde

$$\varphi = \frac{x_3 - x_4}{l}$$

$$x = \frac{x_4 l_3 + x_3 l_4}{l} \tag{2}$$

obţinute cu ajutorul figurii 3.

Înlocuind $\dot{x}$ şi $\dot{\varphi}$ în relaţia (1) avem

$$T_1 = \frac{1}{2}(m_A \dot{x}_3^2 + m_B \dot{x}_4^2 + 2m_{AB} \dot{x}_3 \dot{x}_4), \tag{3}$$

expresia energiei cinetice a şasiului maşinii în cazul cînd se utilizează deplasările punctelor de reazem. Relaţia (3) conţine următoarele notaţii :

$$m_A = \frac{ml_4^2 + J}{l^2} \; ; \; m_B = \frac{ml_3^2 + J}{l^2} \; ; \; m_{AB} = \frac{ml_3 l_4 - J}{l^2}.$$

Scriem expresia energiei cinetice a întregului sistem, considerînd numai vibraţiile după direcţia normală la sol, astfel :

$$2T = m_1\dot{x}_1^2 + m_2\dot{x}_2^2 + m_3\dot{x}_3^2 + m_4\dot{x}_4^2 + 2\, m_{34}\dot{x}_3\dot{x}_4, \tag{4}$$

unde $m_1 = m_v$, $m_2 = m_2$, $m_3 = m_A$, $m_4 = m_B + m_S$, $m_{34} = m_{AB}$.

Folosind notaţia matriceală, forma pătratică (4) se poate scrie :

$$2T = \langle \dot{\boldsymbol{x}}, \mathrm{M}\, \dot{\boldsymbol{x}} \rangle, \tag{5}$$

unde

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{Bmatrix}$$ reprezintă vectorul vitezelor,

$$\mathrm{M} = \begin{Bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & m_{34} \\ 0 & 0 & m_{34} & m_4 \end{Bmatrix}$$ reprezintă matricea de inerţie.

S-a adoptat pentru produsul scalar a doi vectori $\boldsymbol{a}$ şi $\boldsymbol{b}$ notaţia ab, iar pentru produsul unei matrice A cu un vector $\boldsymbol{v}$ notaţia Av.

Energia potenţială a sistemului considerată, faţă de poziţia de echilibru static, are expresia

$$2\Pi = c_1x_1^2 + c_2(x_1 - x_2)^2 + c_3(x_2 - x_3)^2 + c_4x_4^2. \tag{6}$$

În notaţia matriceală, forma pătratică (6) se poate scrie astfel :

$$2\Pi = \langle \boldsymbol{u}, \mathrm{C}_0\boldsymbol{u} \rangle, \tag{7}$$

unde

$$C_0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_4 \end{bmatrix}$$ este matricea de rigiditate,

$$\boldsymbol{u} = \mathrm{A}\,\boldsymbol{x}, \tag{8}$$

în care

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix},$$

reprezintă vectorul deformațiilor elementelor elastice cu următoarele componente :

$$u_1 = x_1,$$
$$u_2 = x_1 - x_2,$$
$$u_3 = x_2 - x_3,$$
$$u_4 = x_4,$$

iar

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

este matricea de influență a deplasărilor asupra deformațiilor,

$$\boldsymbol{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{Bmatrix}$$

reprezintă vectorul deplasărilor.

Folosind relaţia (8), forma pătratică (7) se poate scrie astfel :

$$2\Pi = \langle \mathrm{A}\boldsymbol{x},\ \mathrm{C}_0\mathrm{A}\boldsymbol{x}\rangle$$

sau

$$2\Pi = \langle \boldsymbol{x},\ \mathrm{A}^T\,\mathrm{C}_0\mathrm{A}\boldsymbol{x}\rangle. \tag{9}$$

Notînd

$$\mathrm{C} = \mathrm{A}^T\,\mathrm{C}_0\mathrm{A},$$

expresia (9) se pune sub forma finală

$$2\Pi = \langle \boldsymbol{x},\ \mathrm{C}\boldsymbol{x}\rangle. \tag{10}$$

Scriind ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua, numai pentru cazul elastic, în absenţa forţelor perturbatoare astfel :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{x}} = 0 \tag{11}$$

şi utilizînd relaţiile (5) şi (10) se obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale de mişcare sub forma

$$\mathrm{M}\ddot{\boldsymbol{x}} + C\boldsymbol{x} = 0. \tag{12}$$

Se caută soluţia de forma

$$\boldsymbol{x} = \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{v}\,\mathrm{e}^{pt}) \tag{13}$$

care trebuie să verifice sistemul (12), adică

$$(\mathrm{M}\,p^2 + \mathrm{C})\,\boldsymbol{v} = 0. \tag{14}$$

Sistemul (14) admite soluţii $\boldsymbol{v}$ nebanale dacă

$$\det\,(\mathrm{M}p^2 + \mathrm{C}) = 0, \tag{15}$$

şi astfel se obţine ecuaţia pulsaţiilor proprii, de gradul patru, în p^2.

2.2. STUDIUL VIBRAŢIILOR FORŢATE ALE MAŞINII

Pentru generarea şi menţinerea vibraţiilor unidirecţionale, maşina este dotată cu un vibrator montat în interiorul tamburului faţă. Vibratorul poate fi de tip inerţial cu mase excentrice şi sincronizator sau de tip pendular cu bilă (sau rolă) excentrică.

2.2.1. Determinarea amplitudinilor

Neglijînd forţele disipative şi studiind mişcarea numai pe verticală în prezenţa forţei perturbatoare, ecuaţiile lui Lagrange de speţa a doua se scriu astfel:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\boldsymbol{x}}}\right)-\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{x}}+\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}$$

sau, ţinînd cont de relaţia (12), avem

$$\mathrm{M}\ddot{\boldsymbol{x}}+\mathrm{C}\,\boldsymbol{x}=\boldsymbol{f}, \tag{16}$$

unde

$$\boldsymbol{f}=\left\{\begin{array}{c} P_0 \sin \omega t \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right\}$$ este vectorul forţelor generalizate corespunzător forţelor perturbatoare,

în care $P_0 = m_0 r\omega^2$ este amplitudinea forţei perturbatoare.

Pentru sistemul (16) căutăm soluţii particulare de forma $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}e^{i\omega t}$. (17)

Amplitudinile maselor în mişcare sînt date de relaţiile:

$$a_1=\left|\frac{m_0 r\omega^2\{(c_2+c_3-m_2\omega^2)[(c_3-m_3\omega^2)(c_4-m_4\omega^2)\cdot m_{34}^2\omega^4-(c_4-m_4\omega^2)c_3^2\}}{m_1m_2\,(m_3m_4-m_{34}^2)(\omega^2-p_1^2)(\omega^2-p_2^2)(\omega^2-p_3^2)(\omega^2-p_4^2)}\right|, \tag{18}$$

$$a_2=\left|\frac{m_0 r\omega^2 c_2[(c_3-m_3\omega^4)(c_4-m_4\omega^2)-m_{34}^2\omega^4]}{m_1m_2(m_3m_4-m_{34}^2)(\omega^2-p_1^2)(\omega^2-p_2^2)(\omega^2-p_3^2)\,(\omega^2-p_4^2)|,}\right|, \tag{19}$$

$$a_3=\left|\frac{m_0 r\omega^2 c_2\, c_3(c_4-m_4\omega^2)}{m_1m_2(m_3m_4-m_{34}^2)(\omega^2-p_1^2)(\omega^2-p_2^2)(\omega^2-p_3^2)(\omega^2-p_4^2)}\right|, \tag{20}$$

$$a_4=\left|\frac{m_0 r\omega^2 m_{34}}{m_1m_2\,(m_3m_4-m_{34}^2)\,(\omega^2-p_1^2)\,(\omega^2-p_2^2)\,(\omega^2-p_3^2)\,(\omega^2-p_4^2)}\right| \tag{21}$$

Reprezentarea grafică a celor patru amplitudini, conform relaţiilor (18), (19), (20) şi (21), funcţie de pulsaţia ω a forţei perturbatoare, este dată în figurile 4, 5, 6 şi 7.

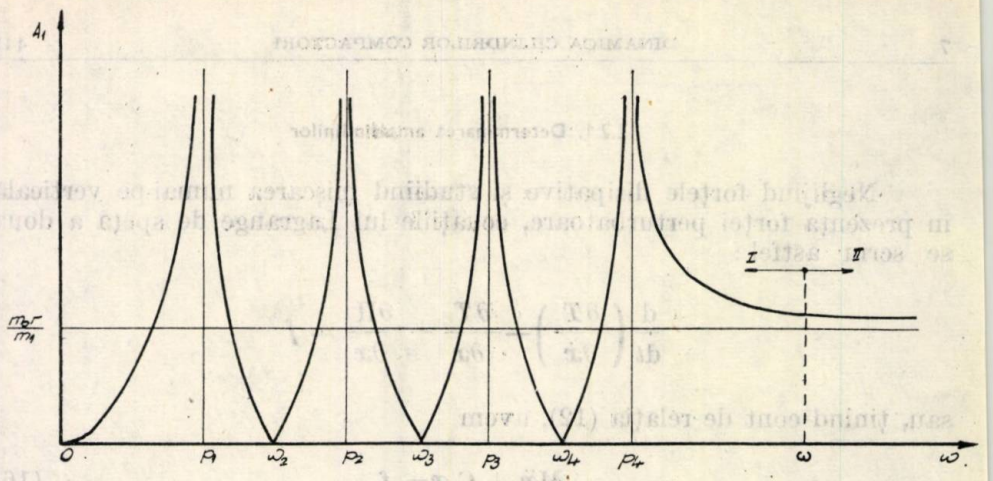


Figura 4. — Curbele de variație ale amplitudinii A_1 funcție de pulsația excitatoare ω.

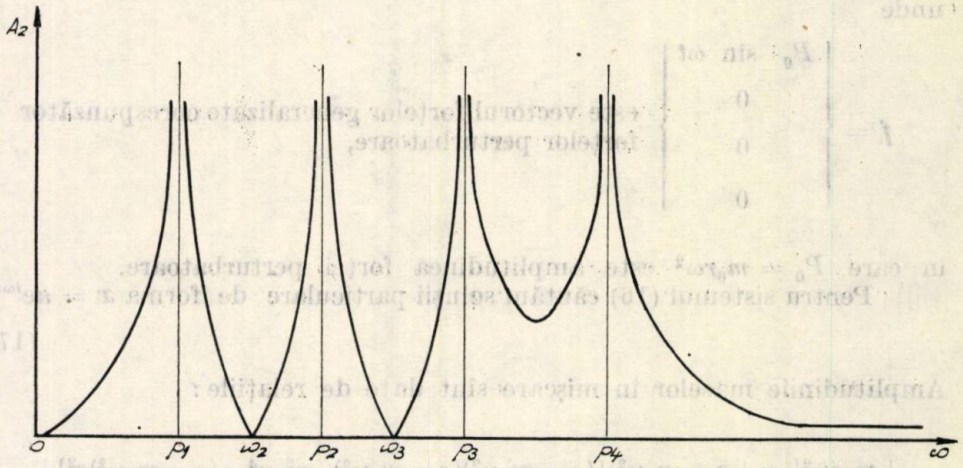


Figura 5. — Curbele de variație ale amplitudinii A_2 funcție de pulsația excitatoare ω.

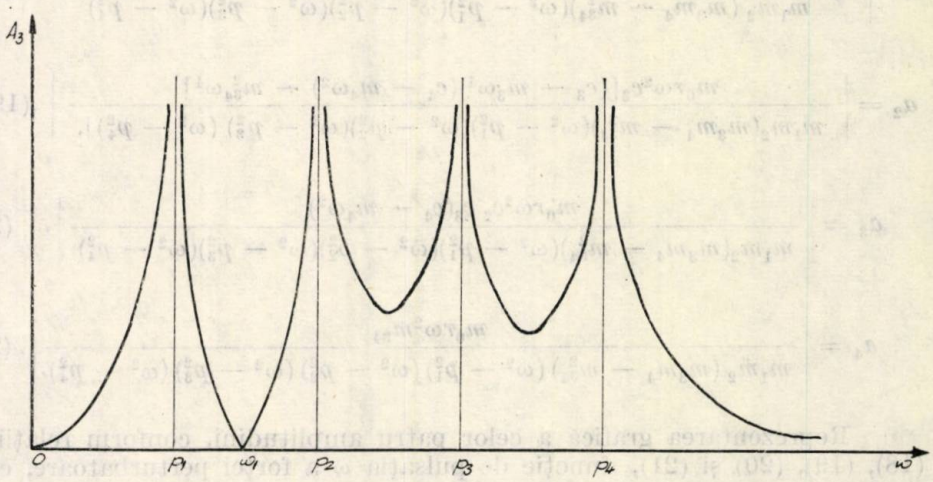


Figura 6. — Curbele de variație ale amplitudinii A_3 funcție de pulsația excitatoare ω.

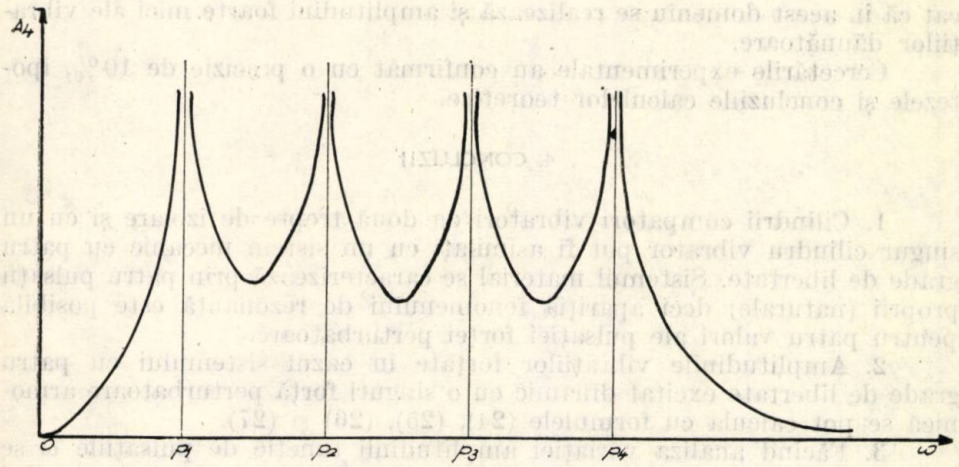


Figura 7. — Curbele de variație ale amplitudinii A_2 funcție de pulsația excitatoare ω.

3. ANALIZA REGIMULUI DINAMIC DE FUNCȚIONARE

Din reprezentarea grafică a celor patru amplitudini funcție de pulsația forței perturbatoare rezultă stabilirea atît a zonelor periculoase de funcționare, cît și a situației favorabile de lucru a mașinii. Sub aspect tehnologic și funcțional este necesară atingerea regimului de lucru astfel ca vibrația tamburului să fie corespunzătoare unei compactări eficiente așa încît simultan vibrațiile dăunătoare x_3 și x_4 să fie cît mai mici.

Pe baza relațiilor (18), (19), (20), (21) s-au calculat amplitudinile pentru pulsația forței perturbatoare discret variabilă cu pasul 2 s^{-1} de la $\omega = 0$ pînă la $\omega = 4000$ s^{-1}, cu datele inițiale determinate experimental pe cazul corect al unui cilindru compactor vibrator de 4—5 tf. S-au făcut determinări experimentale pentru amplitudinile a_1, a_2 și a_3 simultan la mai multe turații ale vibratorului în condițiile folosirii a două calități diferite a tampoanelor elastice din cauciuc caracterizate prin coeficienții de rigiditate echivalenți $c_2 = 10.10^6$ N/m, respectiv $c_2 = 4 \cdot 10^6$ N/m. În figura 8 sînt reprezentate atît curbele teoretice rezultate din calcule, cît și punctele experimentale corespunzătoare situației de lucru cu tampoanele elastice $c_2 = 10 \cdot 10^6$ N/m. Se observă că sistemul mecanic intră în rezonanță dacă pulsația ω are una din valorile : 35 ; 133 ; 148 ; 270 s^{-1}.

În figura 9 se dau curbele teoretice rezultate pe baza calculelor, cît și punctele experimentale pentru $c_2 = 4 \cdot 10^6$ N/m. În acest caz se remarcă o puternică deplasare a pulsației proprii p_4 către stînga ajungînd la 170 s^{-1}.

Diagramele din figurile 4, 5, 6 și 7 ilustrează foarte clar variația amplitudinilor funcție de variabila ω. Analizînd aceste diagrame se pot delimita domeniile funcționale pentru mașină. Astfel, cu I s-a notat domeniul periculos de funcționare în rezonanță, iar cu II domeniul favorabil în care amplitudinea vibrațiilor de lucru a tamburului compactor nu depinde de forța perturbatoare, de coeficienții de rigiditate și de amortizare. De remar-

cat că în acest domeniu se realizează și amplitudini foarte mici ale vibrațiilor dăunătoare.

Cercetările experimentale au confirmat cu o precizie de 10%, ipotezele și concluziile calculelor teoretice.

4. CONCLUZII

1. Cilindrii compatori vibratori cu două trepte de izolare și cu un singur cilindru vibrator pot fi asimilați cu un sistem mecanic cu patru grade de libertate. Sistemul material se caracterizează prin patru pulsații proprii (naturale) deci apariția fenomenului de rezonanță este posibilă pentru patru valori ale pulsației forței perturbatoare.

2. Amplitudinile vibrațiilor forțate în cazul sistemului cu patru grade de libertate excitat dinamic cu o singurl forță perturbatoare armonică se pot calcula cu formulele (24), (25), (26) și (27).

3. Făcînd analiza variației amplitudinii funcție de pulsațiile ω se desprind următoarele concluzii practice în vederea alegerii regimului de lucru :

a) funcționarea mașinii în regim de anterezonanță ($\omega < p_1$) se caracterizează prin pulsații (turații) mici, ceea ce are drept efect micșorarea vibrațiilor asupra mediului de compactat precum și folosirea elementelor elastice cu rigiditate mare, influențînd negativ izolarea vibrațiilor transmise motorului termic, cabinei manipulantului cît și instalațiilor anexe ;

b) funcționarea în regim de rezonanță ($\omega = p$) implică apariția unei amplitudini maxime. Menținerea amplitudinii de lucru la valori ridicate corespunde acelor valori ale lui ω pentru care și amplitudinile șasiului din spate sînt maxime înrăutățind izolarea vibrațiilor dăunătoare.

De asemenea, în acest regim funcționarea se caracterizează printr-o mare instabilitate a vibrațiilor de lucru.

c) dacă ω aparține unuia din intervalele (p_1, p_2), (p_2, p_3) sau (p_3, p_4) se constată că amplitudinea a_1 are valori foarte mici, atingînd chiar valori nule, în timp ce amplitudinile a_2 și a_3 se mențin la valori ridicate.

d) funcționarea în regim de postrezonanță ($\omega > p_4$) conduce la stabilirea amplitudinii a_1 la o valoare constantă mai ales cînd ω este suficient de mare. În acest caz amplitudinea $a_1 = m_0 r/m_1$ nu mai depinde de caracteristicile mediului de compactat. Tot aici amplitudinile șasiului a_2 și a_3 tind către valori foarte mici în comparație cu amplitudinea de lucru. Acest regim este recomandat pentru o funcționare optimă atît pentru o eficientă compactare, cît și pentru o bună izolare a vibrațiilor dăunătoare.

Primită la redacție la 21 februarie 1974
Versiune revizuită primită la 20 februarie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. Șt. Bălan, *Complemente de mecanică teoretică*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1975.
2. R. Bellman, *Introducere în analiza matriceală* (trad. din limba engleză), București, Edit. tehnică, 1969.
3. P. Bratu, *Aspecte privind regimul dinamic de funcționare a cilindrilor compactori vibratori cu două trepte de amortizare*, Construcții, 4 (1975).

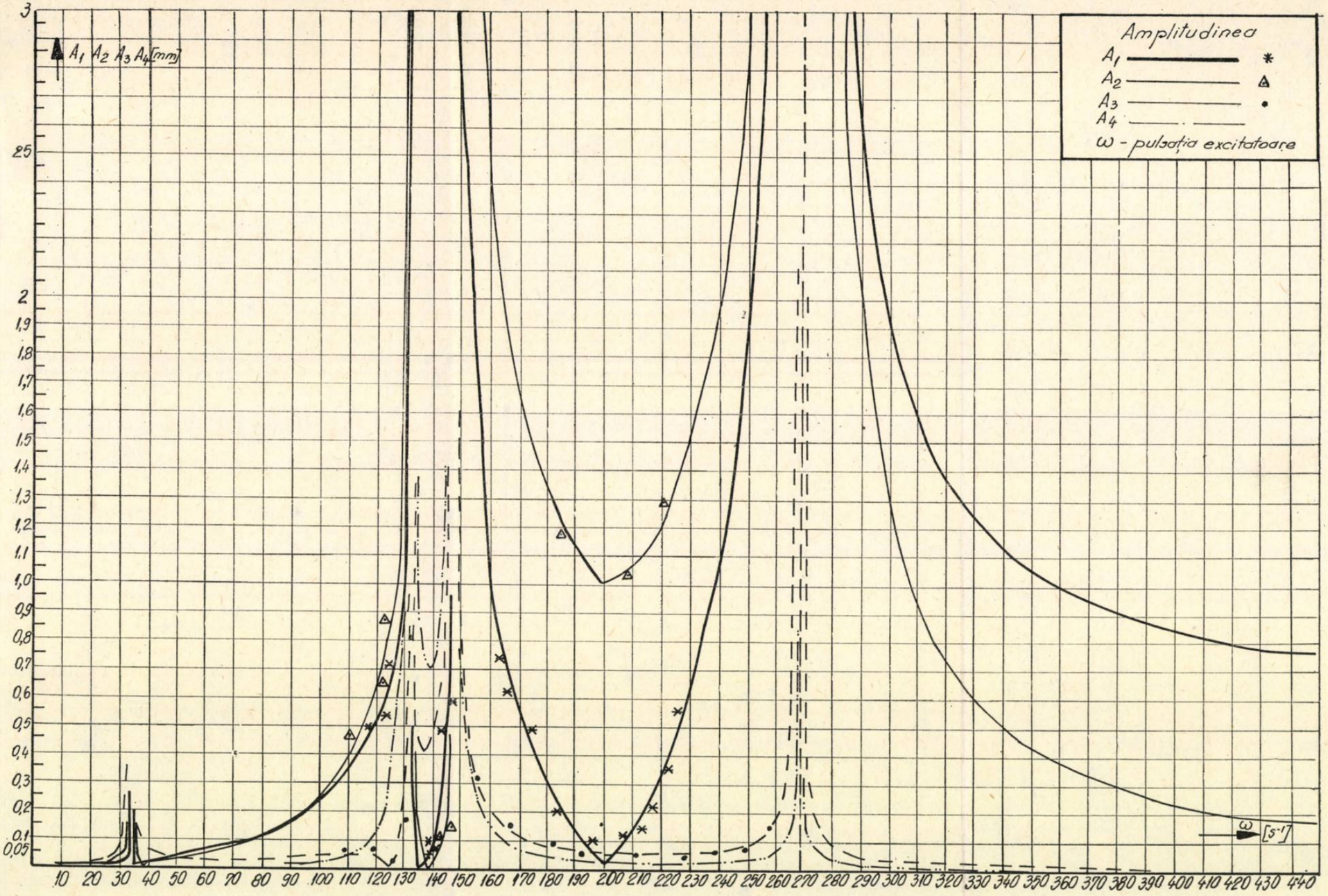
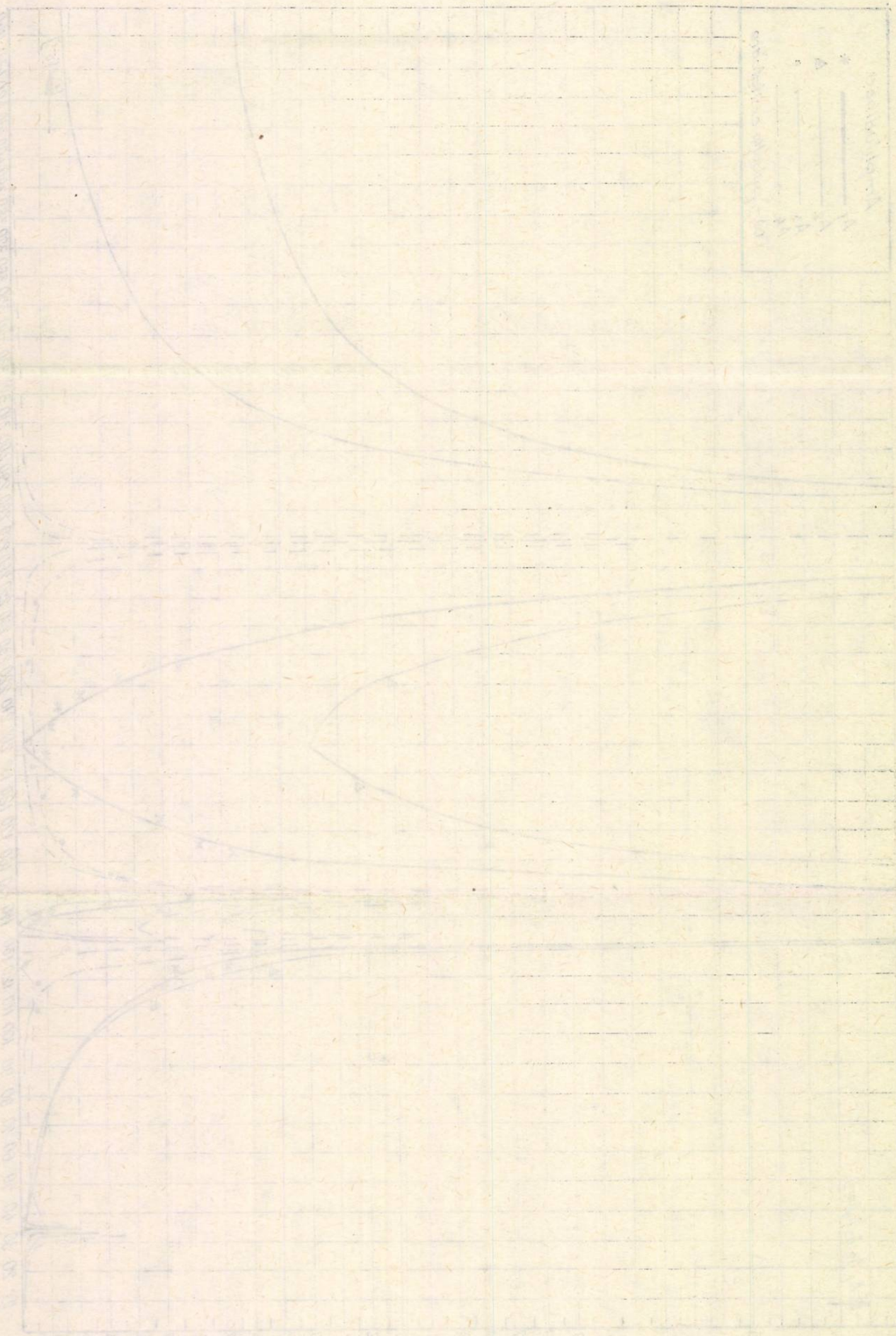

A1 A2 A3 A4 [mm]
Amplitudinea
A1
A2
A3
A4
ω - pulsația excitatoare
ω [s-1]
3
2,5
2
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,05
10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 110 120 130 140 150 160 170 180 190 200 210 220 230 240 250 260 270 280 290 300 310 320 330 340 350 360 370 380 390 400 410 420 430 440

Figura 8.



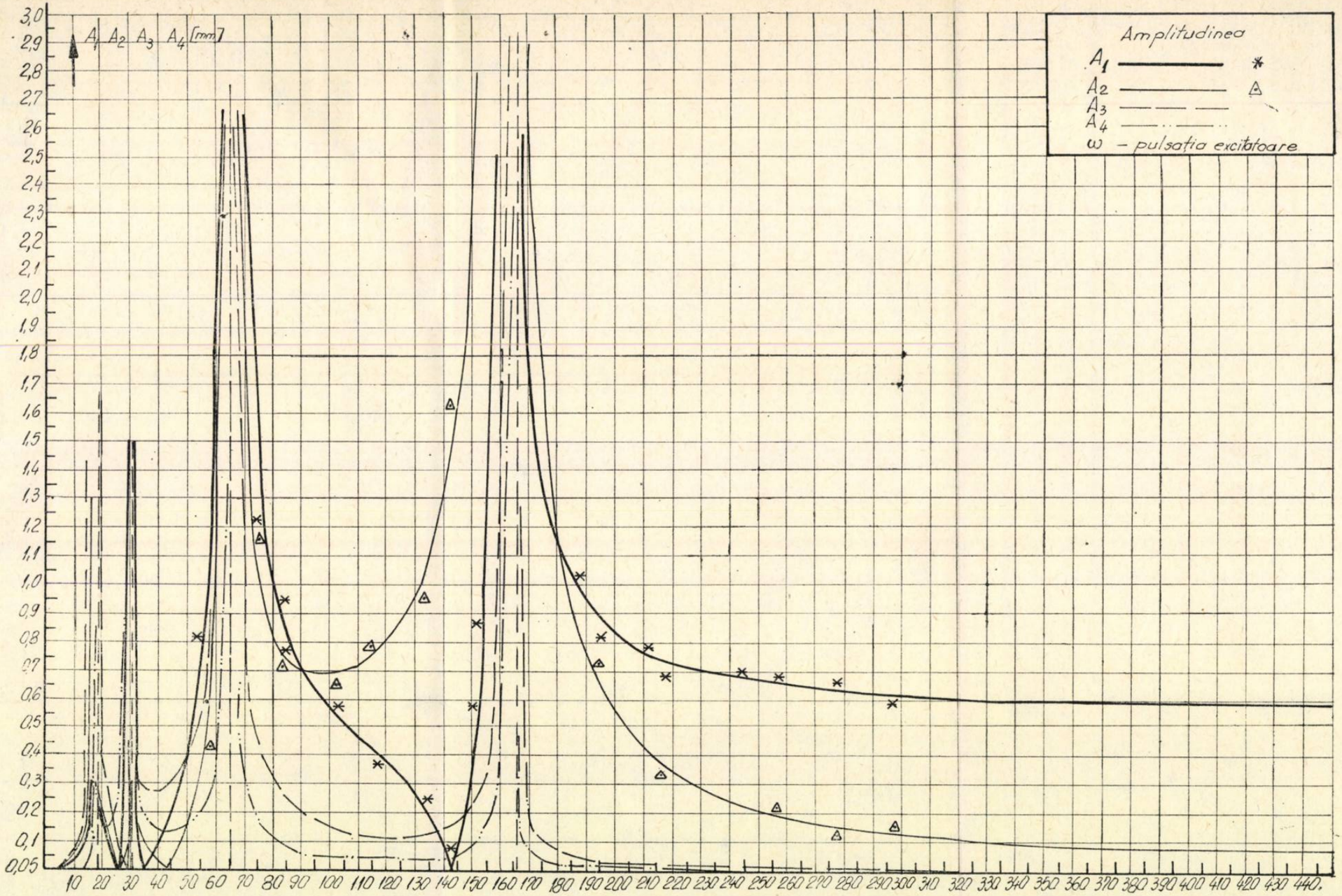
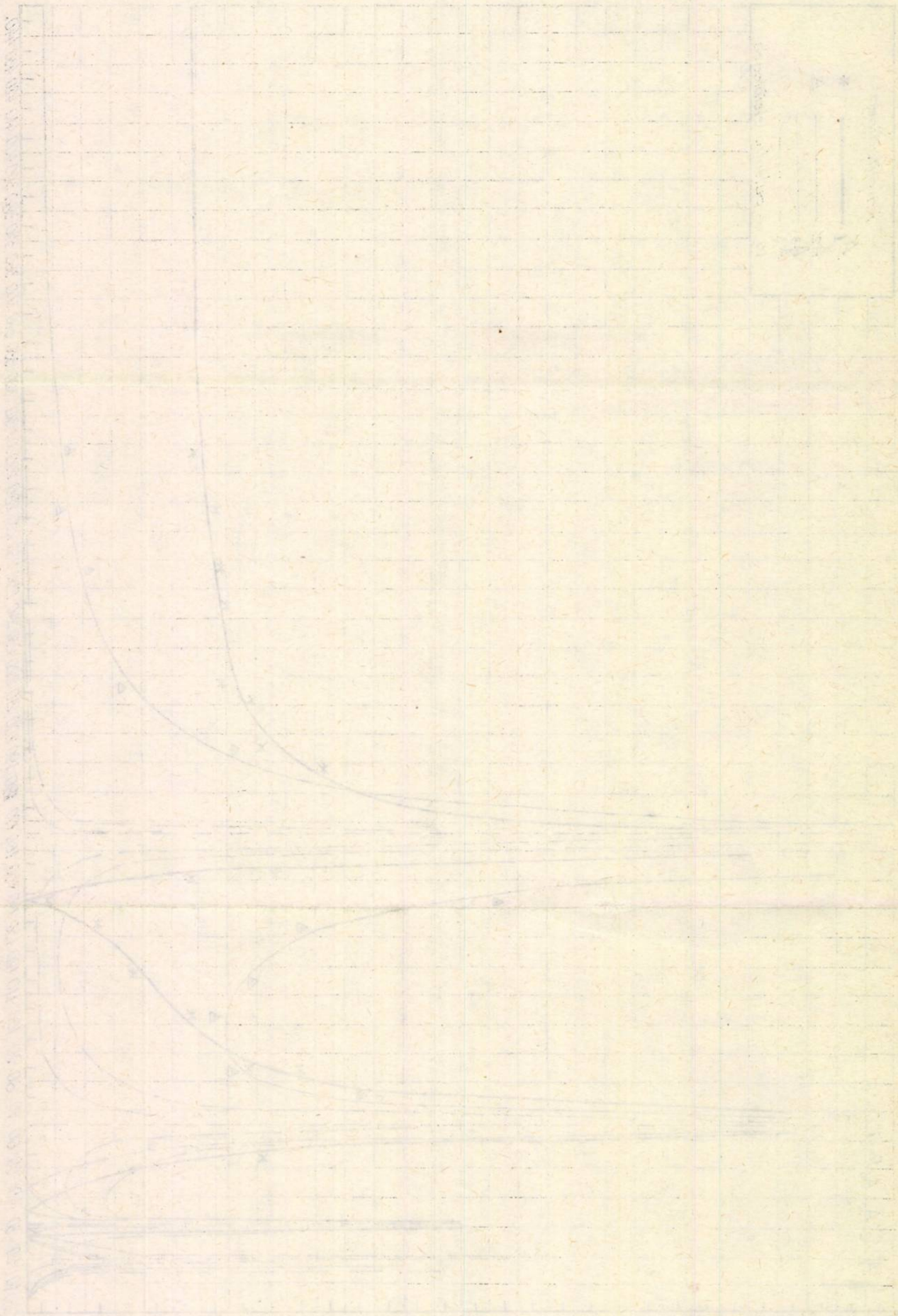

A1 A2 A3 A4 [mm]
Amplitudinea
A1
A2
A3
A4
ω – pulsatia excitatoare

Figura 9.



4. G. Buzdugan, L. Fetcu, M.Radeş, *Vibraţiile sistemelor mecanice*, Bucureşti, Edit. Academiei R.S.R., 1975.
5. P. Heinz, I. Winfried, *Verdichtungstechnik und Verdichtung sgeräte im Erdbau*, Verlag von Wilhelm Ernst & Shon Berlin, München, Düsseldorf, 1975.
6. C. Harris, C. Crede, *Şocuri şi vibraţii*, vol. I—II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1967.
7. R. K. Livesley, *Matrix Methods of Structural Analysis*, Oxford, Pergamon Press, 1964.
8. Ch. Massonnet, ş.a. *Calculul structurilor la calculatoare electronice* (trad. din limba franceză), Bucureşti, Edit. tehnică, 1974.
9. St. Mihăilescu, G. Vlasiu, *Maşini de construcţii şi procedee de lucru*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1973.
10. V. Nicolae, N. Truică, *Studiul vibraţiilor de torsiune ale unui sistem viscoelastic liniar cu mai multe grade de libertate cu aplicaţii la transmisia de forţă a autovehiculelor*, Comunicările conferinţei „Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.
11. C. Stanciu, *Vibraţii şi dinamica maşinilor*, Edit. Institutul de Construcţii, Bucureşti, 1974.
12. C. Stanciu, L. Welther, P. Bratu, *Studiul parametrilor dinamici ai cilindrilor compactori vibratori autopropulsaţi*, Comunicările conferinţei „Vibraţii în construcţia de maşini", Timişoara, 1975.
13. J. Theiner, *Der machinelle Aufbau von Vibrationswalzen und Plattenrüttlern*, Der Bauingenieur, **41**, *4*, (1966).

CONSIDERAȚII ÎN LEGĂTURĂ CU FIZICA PROCESULUI DE AȘCHIERE ȘI FORȚA LA FREZARE*

de EUGEN PAY, EUGEN NOVAC-BOLEA
Institutul de învățămînt superior, Baia Mare
ȘTEFAN ȚÎȚ
C.E.P.R.O.M., Baia Mare

Lucrarea încearcă să elucideze unele probleme legate de fenomenele fizice ce concură la realizarea dezechilibrului în materiale, avînd drept consecință desprinderea (ruperea) sub formă de așchii.
De asemenea, în lucrare se tratează transferul de energie și interacțiunea (forța) între scula așchietoare și material, obținîndu-se în final o ecuație generală a procesului de așchiere (rupere), precum și sistemul funcțiilor de lucru aferent interacțiunii (forței).

1. GENERALITĂȚI

Forța și variația acesteia în procesul de așchiere este o caracteristică fizică ce interesează atît din punct de vedere al mașinii-unelte(pentru a putea încărca mașina la sarcina nominală), cît și din punct de vedere dinamic, al obținerii piesei reale (calitatea suprafeței, vibrații etc.). Ea a fost obiectul de studiu atît pentru fizicieni, cît și pentru tehnicieni, aducîndu-se importante contribuții [1], [2], [3], [7], [8], [9], și [10], ce nu elucidează totuși nici noțiunea de „forță" și nici modul de apariție a ei.

Astfel, încă în secolul trecut, Time [8], [9], trata procesul de așchiere ca un proces de rupere discontinuă dar aceasta era privit macrostructural, și, ca urmare, nu a reușit să elucideze toate problemele specifice procesului.

Cel care a făcut o analiză detaliată a procesului de așchiere a fost Piispanen (1937), iar pe urmă Ernst și Merchant (1940) [7].

Contribuții importante sînt aduse de Albrecht [7], care în 1960 prezintă noua sa teorie asupra mecanismului de refulare a așchiei.

Aceștia din urmă prezintă procesul de așchiere ca un proces elastic-plastic, de rupere, deformare și curgere continuă.

În urma unui număr mare de experiențe legate de uzarea sculelor așchietoare [11], [12], s-a observat că nu există o corelație totală între fenomenele specifice așchierii și uzare, sub prisma interpretărilor actuale, legate de procesul de așchiere ca un proces continuu.

Se poate considera că uzarea este cauzată de transferul de energie, transfer ce are ca efect apariția „forței", ce acționează atît asupra uzării piesei, cît și asupra sculei așchietoare. În lucrarea de față autorii încearcă

* Lucrarea a fost prescurtată în cadrul primei Conferințe Naționale de mașini-unelte, București, mai, 1974

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 35, NR. 3, 1976, P. 447–455

să definească noţiunea de forţă în procesul de aşchiere şi să explice mecanismul provenienţei fenomenului de interacţiune (forţă), considerînd discontinuitatea procesului la nivel microstructural.

2. PROCESUL FIZIC DE AŞCHIERE

Se consideră mulţimea M (particulele ce constituie piesa de prelucrat ca fiind o reuniune a două submulţimi complementare A şi B ($A \cup B = M$). Elementele submulţimii A sînt particulele ce constituie piesa finită, iar elementele submulţimii B — particulele care intră în structura formaţiunilor rezultate în procesul de aşchiere (aşchii, depuneri pe tăiş, vapori de metal etc.).

Se notează elementele submulţimii A cu a_i, iar elementele submulţimii B cu b_j. Astfel, procesului de aşchiere i se poate asocia un algoritm matematic între ale cărui elemente şi fiecare fază a procesului fizic de aşchiere există o relaţie de corespondenţă:
$A_0 \cup B_0 = M$, (după prima interacţiune, luarea primei aşchii),

$$\begin{aligned} A_1 \cup B_1 &= M, \\ A_2 \cup B_2 &= M, \\ &\dots \quad \dots \\ A_k \cup B_k &= M, \end{aligned} \tag{1}$$

de unde

$B_2 = B_0 \cup S_1$ (S_1 fiind totalitatea particulelor ce intră în aşchie, după prima interacţiune),

$B_3 = B_2 \cup S_2 = B_0 \cup S_1 \cup S_2$ (S_2 fiind totalitatea particulelor ce intră în aşchia 2),

$$\begin{aligned} B_4 &= B_3 \cup S_3 = B_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3, \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ B_k &= B_0 \cup S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_{k-1}. \end{aligned} \tag{2}$$

Dar, din relaţia (1) rezultă

$$A_0 \cup B_0 = A_1 \cup B_1 = \dots = A_k \cup B_k = M,$$

deci se poate scrie următorul sistem:

$$\begin{aligned} S_1 &= C_{B_1}^{B_0}, \\ S_2 &= C_{B_2}^{B_1}, \\ &\dots \quad \dots \\ S_i &= C_{B_i}^{B_{i-1}}, \\ &\dots \quad \dots \\ S_k &= C_{B_k}^{B_{k-1}}. \end{aligned} \tag{3}$$

Egalînd reuniunile membrilor din partea stîngă cu reuniunile membrilor din partea dreaptă din sistemul (3), se obţine

$$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k = C_{B_1}^{B_0} \cup C_{B_2}^{B_1} \cup \ldots \cup C_{B_k}^{B_{k-1}}, \tag{4}$$

unde

$$S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k = B_k,$$

deci şi

$$C_{B_1}^{B_0} \cup C_{B_2}^{B_1} \cup \ldots \cup C_{B_k}^{B_{k-1}} = B_k. \tag{5}$$

Dar

$$B_k = C_M^{A_k},$$

relaţia (4) putîndu-se scrie sub forma generală, astfel

$$\cup\, q_{1\ldots k}\, C_{B_i}^{B_{i-1}} = C_M^{A_k}, \tag{6}$$

unde

$C_{B_i}^{B_{i-1}}$ este complementul lui B_{i-1} faţă de mulţimea particulelor B_i,

$C_M^{A_k}$ — complementul lui A_k faţă de mulţimea particulelor M

$$1 < i < k.$$

Relaţia (6) reprezintă ecuaţia generală a procesului fizic de aşchiere a metalelor. Se observă că este o relaţie de interdependenţă între totalitatea particulelor ce intră în aşchie şi totalitatea particulelor din piesa finită (două repere ce se pot măsura cu aproximaţia tehnicii contemporane).

Dacă materialul nu este omogen, atunci reuniunea din partea stîngă a expresiei (6) poate fi extinsă asupra domeniilor de neomogenitate (caz întîlnit în practică).

3. FORŢA ÎN PROCESUL FIZIC DE AŞCHIERE

Se consideră sistemul maşină-unealtă-sculă-dispozitiv-piesă (MUSDP) ca un sistem legat, cu suprafeţe limitative, format dintr-un număr finit de particule $M_1 (M_1 \neq \infty)$, din care M revin piesei de prelucrat. Se consideră, de asemenea, forţa ca un efect al energiei introduse prin proces în piesa de prelucrat (numim proces interacţiunea prin care rezultă aşchiere).

Se admite că frontul particulelor ce primesc energia în proces, transmit această energie particulelor învecinate, după legi ce depind de istoria învecinării particulelor [3].

Lucrarea de faţă se va ocupa numai de transferul de energie în structura de lucru (piesă, dispozitiv, etc.).

Considerînd structura de lucru, comportamentul particulelor faţă de transferul de energie, ca pe niste contacte (normal închise sau normal deschise), se poate studia procesul de aşchiere aplicînd teoriile matematice a schemelor cu contacte [4] şi algebrilor Boole [5].

Se consideră k traiecte de transfer de energie corespunzătoare fiecărei cuante de proces, cele k traiecte de transfer fiind realizate pe mulțimea particulelor ce constituie structura de lucru.

Observînd că repartiția temperaturilor în structura de lucru rămîne constantă (în aşchiere se ajunge la un echilibru termic) deşi se introduce energie suplimentară prin interacțiune (ciocnire), propagarea acestei energii poate fi justificată, fie prin a considera că mai multe traiecte conduc, fie că se transportă energie pe aceleași traiecte,dar aparținînd unor domenii de măsurare diferite (diferite forme de energie : căldură, sonicitate, lumină, etc.).

Fiecărui traiect i se poate asocia o funcție de lucru f_i, care poate lua valorile α_i, unde α este 0 sau 1 (0 — dacă la capătul traiectului energia $E_i = 0$; şi 1 — dacă $E_i \neq 0$, E_i fiind cuanta de energie ce a urmat traiectului i).

Estimînd energia transferată prin canalul termic, avînd gradienți termici invarianți *), se poate considera că mărirea fluxului termic are loc prin mărirea lui $\Sigma\alpha_i$. Deci, se poate stabili o corespondență între $\Sigma\alpha_i$ şi energia termică transferată în regim termic staționar.

În timpul procesului traiectele nu sînt constante. Dacă se ia ca reper ultimele particule ale traiectului, acestea vor avea precedente în traiect mereu alte particule datorită în primul rînd faptului că particulele care constituie frontul traiectelor părăsesc acest front în urma fiecărei dozări de energie (ciocniri).

Fiecărei suprafețe geometrice constante îi corespunde o mulțime de suprafețe de disipare energetică. Fiecărei dozări de energie îi corespunde o singură suprafață disipatoare, căreia la rîndul ei, i se poate asocia una dintre valorile $\Sigma\alpha_i$.

Pentru o maşină-unealtă dată (puterea motorului de antrenare rămîne constantă), în funcție de materialul ce se prelucrează şi de scula aşchietoare, va rezulta energie de disipare diferită, măsurabilă prin interacțiunea din proces (forță).

Pentru prima dozare energetică (prima interacțiune), mulțimea funcțiilor de lucru va fi :

$$F_1\begin{cases} f_{11}\,(a_{1n_1},\ a_{1n_1-1},\ \ldots,\ a_{12},\ a_{11}) = \alpha_{11}, \\ f_{12}\,(a_{2n_2},\ a_{2n_2-1},\ \ldots,\ a_{22},\ a_{21}) = \alpha_{12}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f_{1k}\,(a_{kn_k},\ a_{kn_k-1},\ \ldots,\ a_{k2},\ a_{k1}) = \alpha_{1k}, \end{cases} \tag{7}$$

unde

$$\sum (a_{in_1} + a_{in_2} + a_{in_3} + \ldots + a_{in_k}) = M,$$

ceea ce corespunde unei prime iteracțiuni (pe care o numim forță), măsurabilă cu o anumită aproximație tehnică, F_1.

*) Deocamdată aceasta este doar o ipoteză, urmează ca în viitor să se elucideze acest lucru.

Mulțimea particulelor M se micșorează în urma primei dozări energetice, rămînînd în proces M' particule, modificînd astfel funcția de lucru ale fiecărui traiect.

Pentru a doua dozare energetică, mulțimea funcțiilor de lucru rezultă :

$$F_2 \begin{cases} f_{21}\,(a_{1n_1},\ a_{1n_1-1},\ \ldots,\ a_{1j_1+1},\ a_{1j_1}) = \alpha_{21}, \\ f_{22}\,(a_{2n_2},\ a_{2n_2-1},\ \ldots,\ a_{2j_2+1},\ a_{2j_2}) = \alpha_{22}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f_{2k}\,(a_{kn_k},\ a_{kn_k-1}\ \ldots,\ a_{kj_k+1},\ a_{kj_k}) = \alpha_{2k}. \end{cases} \tag{8}$$

După ce de-a doua dozare energetică, în proces rămîn M'' particule ș.a.m.d., la penultima dozare energetică $\eta - 1$ (η este numărul de ciocniri a dintelui sculei pentru a se lua tot materialul ce urmează a se așchia) rezultă mulțimea funcțiilor de lucru :

$$F_{\eta-1} \begin{cases} f_{\eta-1,1}\,(a_{1n_1},\ a_{1n_1-1}) = \alpha_{\eta-1,1}, \\ f_{\eta-1,2}\,(a_{2n_2},\ a_{2n_2-1}) = \alpha_{\eta-1,2}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f_{\eta-1,k}\,(a_{kn_k},\ a_{kn_k-1}) = \alpha_{\eta-1,k}, \end{cases} \tag{9}$$

unde

$f_{\eta-1,i}$ poate să aibă și valoarea zero.

Pentru ultima dozare energetică, rezultă

$$F_\eta \begin{cases} f_{\eta 1}\,(a_{1n_1}) = \alpha_{\eta 1}, \\ f_{\eta 2}\,(a_{2n_2}) = \alpha_{\eta 2}, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ f_{\eta k}\,(a_{kn_k}) = \alpha_{\eta k}, \end{cases} \tag{10}$$

unde, în caz general, una din funcțiile de lucru $f_{\eta i}$, poate avea și valoarea zero.

Ecuația (6) și sistemul funcțiilor (9) sînt intercondiționate, putîndu-se reprezenta printr-o diagramă teoretică (fig. 1), unde curba b reprzintă variația „forței" în funcție de timp, iar curba a — înfășurătoarea curbei b — ecuația generală a procesului de așchiere (6).

Avînd în vedere faptul că $M_1 \gg M \gg M - M' \ldots M^\eta - M^{\eta-1}$ (mulțimea particulelor din sistem, inclusiv piesa de prelucrat, este mult mai mare decît mulțimea particulelor din piesa de prelucrat, iar mulțimea particulelor din piesa ce se prelucrează este mult mai mare decît mulțimea particulelor din oricare din așchii), diferența dintre F_i și F_{i+1} (fig.1) va fi foarte mică.

Cele arătate mai sus sînt valabile numai în cazul cînd se păstrează constanţi parametrii procesului de aşchiere şi ai sculei aşchietoare. Dacă parametrii procesului de aşchiere variază, atunci interacţiunea dintre scula aşchietoare şi piesă se modifică.

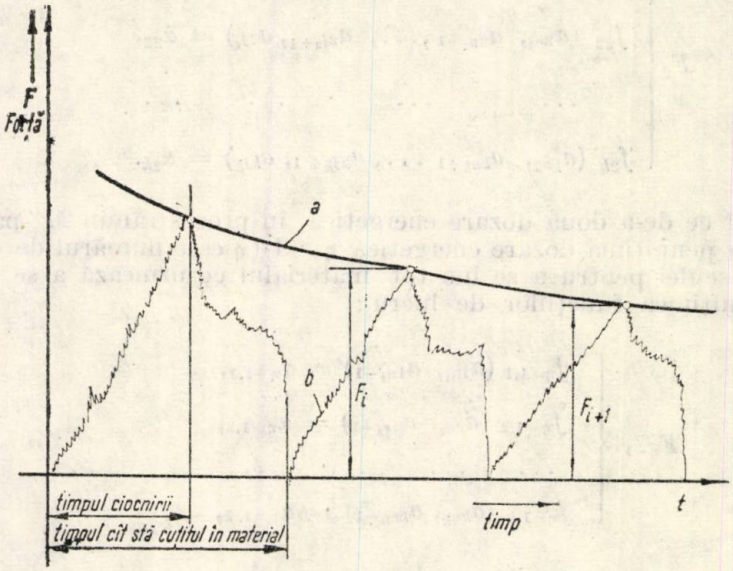
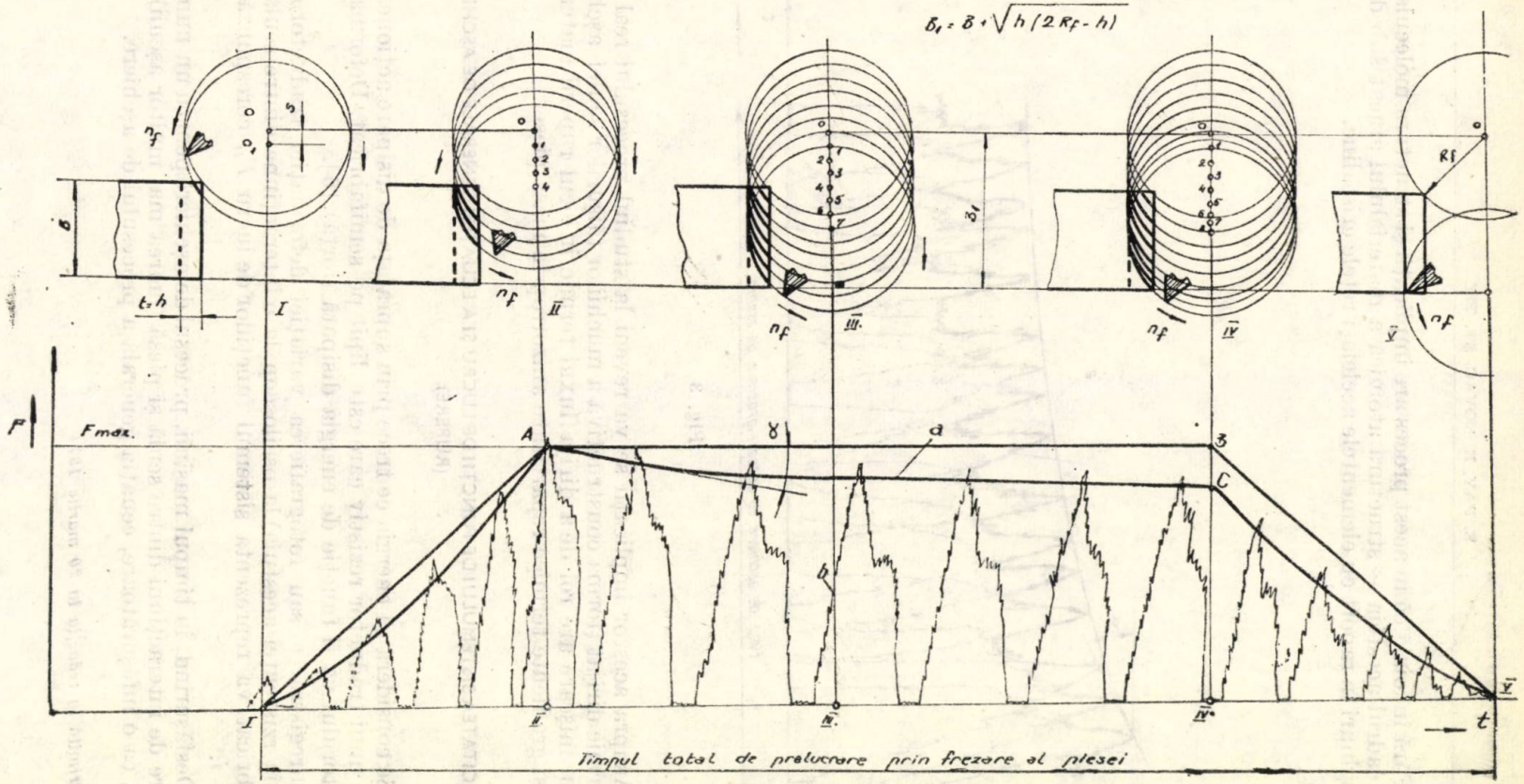


Fig. 1

Procesul de prelucrare prin aşchiere poate fi împărţit în trei faze: faza de pătrundere a sculei în material; faza de aşchiere cu regim de aşchiere normal şi faza de ieşire a sculei din material (fig. 2). În prima fază (intervalul I—II), cu toate că se desprinde material din piesă (numărul particulelor din piesă după fiecare interacţiune se micşorează), forţa va creşte datorită creşterii secţiunii aşchiei, rolul ei fiind preponderent. În faza a doua (intervalul II—IV), procesul este cel descris de ecuaţiile (6) şi (9). Pentru faza a treia (intervalul IV—V), forţa scade, pe de o parte datorită procesului descris de ecuaţiile (6) şi (9), iar pe de altă parte, datorită micşorării secţiunii aşchiei.

Variaţia forţei dată în diagramele din figurile 1 şi 2 este valabilă în cazul frezării cu un singur cuţit (cuţit zburător). În realitate, scula aşchietoare (freza) are mai multe cuţite dispuse pe o circumferinţă, ceea ce poate să ducă la situaţia în care înainte de ieşirea din aşchiere a unui cuţit, să intre următorul, existînd un grad de acoperire, ceea ce face ca forţa să nu revină la zero, ci la o valoare oarecare (fig. 3). Mărirea gradului de acoperire micşorează variaţia forţei, ducînd la micşorarea vibraţiilor din proces şi concomitent la mărirea calităţii suprafeţei prelucrate.

Ţinînd seama de existenţa neomogenităţii materialului într-un proces izoterm, variaţia „forţei" informează asupra variaţiei structurii acestuia, sau invers, variaţia structurii duce la variaţia forţei.



$B_1 = B + \sqrt{h(2R_f - h)}$
n_f
B
$t = h$
B_1
R_f
I
II
III
IV
V
F
Fmax.
A
B
C
a
b
γ
t
Timpul total de prelucrare prin frezare al piesei

Fig. 2

Fără îndoială că în acest proces are implicaţii şi structura moleculară, iar în cadrul acesteia — structura atomică a materialului atacat sub diferite unghiuri în raport cu elementele aceleiaşi reţele cristaline.

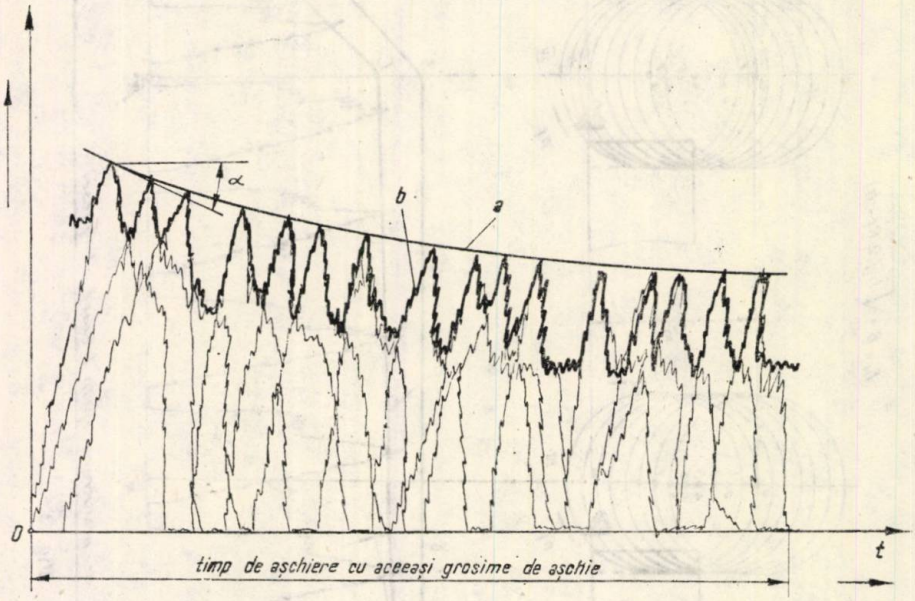


Fig. 3

Asupra acestor implicaţii se va reveni la studiul procesului real cu flux termic dirijat (forma constructivă a muchiilor tăişurilor sculei aşchietoare în mişcare are rol de a dirija fluxul termic în locul ruperii materialului) şi gradiente termice repartizate anizotrop în masa piesei.

4. EXPLICITATEA SISTEMULUI DE FUNCŢII DE LUCRU ŞI A ECUAŢIEI GENERALE DE AŞCHIERE (RUPERE)

Se consideră că energia ce trece prin suprafaţa de disipare acţionează asupra unui traductor rezistiv care este lipit pe semifabricat. Deformaţia traductorului va fi funcţie de energia disipată (forţă) [6].

Înregistrarea sau fotografierea variaţiei deformaţiei traductorului (variaţia rzistenţei acestuia) la osciloscop, la o interacţiune dintre sculă şi semifabricat, va reprezenta sistemul funcţiilor de lucru F_i, corespunzător aşchiei i.

Desfăşurînd, în timpul maşinii, procesul de aşchiere pentru un număr oarecare de interacţiuni dintre sculă şi piesă (luarea mai multor aşchii) se obţine, ca o înfăşurătoare, ecuaţia generală a procesului de aşchiere.

Primită la redacţia la 20 martie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. A. Cişman, B. F. Rothenstein, A. Policec, *Fenomene fizice în metale feromagnetice solicitate*, Bucureşti, Edit. Academiei R.S.R., 1968.
2. *** *Razvitie nauki o rezanii metallov*, Moskva, izdatelistvo, Maşinostroenie, 1967.
3. C. Sălceanu, C. Velceanu, *Sur la viscosité dynamique et intrinseque de macromolecules*, C.R. Acad. Sc. Paris, **261**, *12*, 214—216 (1965).
4. Gr. C. Moisil, *Teoria algebrică a schemelor cu contacte şi relee*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965.
5. E. Novac, *Note prelucrate după cursul de teoria funcţiilor de variabilă reală* (manuscris) de Maria Neumann, Univ. Timişoara (1959).
6. E. Pay, *Măsurarea forţei în procesul de frezare a danturii cu freza melc*. Construcţia de maşini, Bucureşti, *12* (1971).
7. I. D. Lăzărescu, *Abstracţionarea sculei aşchietoare*, Teză de doctorat, Bucureşti, Institutul politehnic Gh. Gh. Dej, 1968.
8. I.A. Time, *Soprotivlenie metallov i dreva rezaniu*, S.P.B., 1870.
9. I.A. Time, *Memoari o stroganie metallov*, S.P.B., 1877.
10. Charles Kittel, *Introducere în fizica corpului solid* (trad. din lb. engleză), Bucureşti, Edit. tehnică, 1972.
11. I.D. Lăzărescu, E. Pay, *Contribuţii asupra corelaţiei dintre uzura dintelui frezei, lăţimea de frezare şi unghiul de contact*, Construcţia de maşini, **20**, *2*, 68—72, (1968).
12. E. Pay, *Contribuţii la determinarea influenţei unor factori tehnologici asupra preciziei de danturare a roţilor dinţate cilindrice cu dantură dreaptă, prin frezare cu freză melc-modul*, Teză de doctorat, Cluj, Institutul politehnic, 1969.

RECENZII

Mechanics of Visco-Elastic Media and Bodies.
IUTAM SYMPOSIUM, GOTHENEURG/Sweden 1974
Editor Ian Hult
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1975

Cartea conține lucrările prezentate la Simpozionul IUTAM, organizat la Gothenburg (Suedia), în anul 1974, în legătură cu unele probleme mecanice și termomecanice ale corpurilor viscoelastice.

Din conținutul lucrărilor expuse rezultă că în cadrul acestei reuniuni științifice au fost abordate următoarele aspecte generale sau speciale ale teoriei viscoelasticității sau termoviscoelasticității :

a) limitele teoriilor liniare sau liniarizate și elaborarea unor modele matematice noi ale corpurilor cu comportare viscoelastică ;

b) teoria studiilor experimentale în viscoelasticitatea liniară și neliniară, legate de determinarea efectivă a acelor relații constitutive, care precizează legătura dintre tensiunea actuală și istoria trecută a deformației ;

c) studiul teoretic și experimental al condițiilor de rezistență și de rupere, al condițiilor de apariție, de dezvoltare și de propagare a fisurilor, în cazul materialelor viscoelastice ;

d) studiul experimental și teoretic al comportării termoviscoelastice a materialelor, prin elaborarea unor modele matematice care țin seama explicit de cuplajul cîmpurilor mecanice cu cele termice ;

e) elaborarea unor metode numerice noi în vederea rezolvării efective și aproximative a problemelor la limită ale viscoelasticității și termoviscoelasticității, prin utilizarea calculatoarelor electronice.

Cartea conține două expuneri cu caracter de sinteză. Una din aceste sinteze a fost prezentată de F. J. Lockett și este dedicată studiului general al comportării liniare, al caracterizării comportării neliniare și al legăturii existente între modelele liniare, neliniare și liniarizate în cazul materialelor cu comportare viscoelastică. A doua expunere sintetică a fost prezentată de E.H. Lee și se referă la analizarea eforturilor teoretice și experimentale depuse în ultimii ani în vederea descrierii satisfăcătoare a cuplajului termomecanic în cadrul teoriei termoviscoelasticității.

Celelalte 32 de comunicări se referă la probleme speciale și conțin rezultate noi, obținute de prezentatori sau de colective mai mari de cercetare.

Menționăm cîteva teme abordate : liniarizarea și aproximarea funcționalelor de răspuns neliniare, principii de corespondență în viscoelasticitate, propagarea undelor în medii viscoelastice neliniare, determinarea experimentală a răspunsului elastic instantaneu, operatori matriceali în rezolvarea problemelor la limită, variabile interne în modelele viscoelastice, analiza efectelor produse în materiale pretensionate, generalizarea metodei elementului finit pentru rezolvarea problemelor bidimensionale ale viscoelasticității, studiul convergenței metodei elementului finit, propagarea fisurilor, ruperea la fluaj și condiții de distrugere în domeniul viscoelastic, potențiali neelastici în termoviscoelasticitate etc.

Simpla enumerare a unora dintre temele abordate indică deja limpede utilitatea consultării culegerii prezentate.

Menționăm că cele mai multe comunicări au fost urmate de discuții, foarte utile pentru clarificarea semnificației matematice, mecanice și fizice a rezultatelor noi prezentate.

Accentuăm, de asemenea, faptul că expunerile făcute, împreună cu vasta bibliografie prezentată de majoritatea autorilor, permite cunoașterea satisfăcătoare a stadiului actual de dezvoltare a viscoelasticității teoretice și experimentale, a succeselor și dificultăților acestei discipline și a acelor probleme a căror abordare este o sarcină a viitorului apropiat.

E. Soós

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 3, 1976, P. 457–465

PAUL LOHSE — „Getriebesynthese — Bewegungsabläufe ebener Koppelmechanismen", Springer-Verlag, Berlin, 1975 (X + 195 pagini, 341 figuri).

Această monografie are drept obiect problema sintezei mecanismelor plane cu elemente articulate, care își găsesc utilizarea în diferite domenii ale tehnicii, în care este cerută realizarea de mișcări neuniforme.

Autorul tratează problema sintezei acestor mecanisme în două etape: sinteza calitativă, care realizează alegerea tipului și formei constructive de mecanism — inclusiv sinteza structurală — și sinteza cantitativă, care conduce la determinarea principalelor dimensiuni geometrice ale mecanismului. Se acordă o deosebită importanță alegerii metodei de sinteză dimensională, ținîndu-se seama de posibilitățile de automatizare a calculului și de necesitatea realizării unor mecanisme cu calități optime constructive și funcționale. În general, în funcție de formularea tematicii de proiectare, problemele conduc la sinteze geometrice, mai rar la o sinteză cinematică.

Unul dintre scopurile urmărite de autor este de a face cunoscute inginerului proiectant metode de sinteză a mecanismelor plane cu elemente articulate. Și aceasta cu un dublu scop: de a lărgi domeniul de utilizare al acestei categorii de mecanisme și în același timp de a se proiecta mecanisme cu o bună comportare în funcționare.

În capitolul 1, avîndu-se în vedere importanța alegerii unei forme constructive corespunzătoare pentru sinteza unui mecanism cu bune proprietăți constructive și funcționale, se realizează o privire de ansamblu asupra structurii, formelor constructive și domeniului de utilizare a mecanismelor plane cu 4, 5 și 6 elemente, cu unul sau două grade de mobilitate. Sînt prezentate cîteva criterii referitoare la aprecierea performanțelor mecanismelor considerate, importante în cazul optimizării.

În capitolele 2 și 3 se tratează geometria cinematică a mișcării plan-paralele, insistîndu-se în mod deosebit asupra curbelor — loc geometric, care sînt utilizate în sinteza mecanismelor din categoria menționată.

În capitolul 4 se prezintă metoda „p" de sinteză poziționlă (polortkurve Methode), propusă anterior de autor, expunîndu-se posibilitățile de rezolvare analitică a problemei sintezei poziționale prin această metodă cu ajutorul mijloacelor automate de calcul. Se fac considerații privind criteriile de alegere a unei metode de sinteză poziționlă, în funcție de numărul gradelor de libertate necesare pentru proiectarea unui mecanism.

Capitolul 5 se referă la sinteza mecanismelor care trebuie să reproducă o curbă dată, iar în capitolul 6 se prezintă sinteza mecanismelor care realizează o mișcare plan-paralelă dorită, indicîndu-se metodele posibile de rezolvare, precum și cîteva criterii utilizate în alegerea uneia din aceste metode. Se fac exemplificări pentru numeroase mecanisme cu o largă utilizare în practică.

În capitolul 7 se prezintă metode de sinteză a mecanismelor generatoare de funcții, de diferite tipuri și forme constructive.

În capitolul 8 autorul dă indicații asupra modului de rezolvare a unei probleme date de sinteză a unui mecanism.

Bibliografia conține 185 de titluri, grupate pe capitole.

Daniela Terme

HAYRETTIN KARDESTUNCER — „ELEMENTARY MATRIX ANALYSIS OF STRUCTURES", Mc.Graw-Hill Book Co., 1974.

Profesorul H. Kardestuncer, de la Universitatea din Connecticut — SUA — prezintă cititorului un manual de statistică lineară a structurilor din bare, într-o formulare exclusiv matriceală.

Autorul face parte din aceia care „cred că a sosit timpul ca Analiza Structurilor să se predea în limbaj matriceal încă din primele lecții" (am citat, în traducere aproximativă, din Cuvîntul Înainte al lucrării, semnat de prof. Ch. H. Norris de la M.I.T.). În această idee este redactată întreaga carte, care se situează astfel în generația a III-a de manuale, după cele „clasice", prematriceale, și cele „hibride", ale anilor '60.

Atît autorul, cît și profesorul Norris, țin să sublinieze că această unificare a Analizei Structurilor prin prisma metodei matriceale — implicit a algoritmelor și programelor — are avantaje certe în ordinea eficienței, însă poate ascunde latura calitativă și intuitivă a staticii lineare clasice, îngreunînd formarea acelei „înțelegeri" a comportării unei structuri, strict necesară analistului și proiectantului. Totuși, în opinia ambilor, avantajele precumpănesc, iar viitorul predării și învățării Analizei Structurilor aparține acestei orientări.

Conținutul și nivelul lucrării o fac accesibilă studenților care și-au însușit în prealabil noțiuni elementare de statica sistemelor de solide rigide și de rezistența materialelor (echilibrul, eforturi unitare și secționale, deformații specifice, energie de deformație, solicitările simple ale barei drepte). Volumul corespunde unui curs de un semestru. Numeroase exemple de calcul și enunțuri de probleme cu răspunsuri ușurează munca studentului și permit însușirea întregului volum de cunoștințe prin studiu individual. Cartea poate fi utilă și inginerilor care doresc să-și însușească metodele moderne matriceale și numerice.

Cartea este scrisă viu, limpede și concis, cu o deosebită grijă pentru formularea ipotezelor, definirea conceptelor, justificarea aproximărilor și idealizărilor, interpretarea fizică a unor operații și rezultate, precizarea restricțiilor și domeniilor de aplicabilitate.

Ținuta grafică a lucrării este remarcabilă; erorile de tipar sînt puțin numeroase. Totuși o eroată ar fi fost utilă (în relații fundamentale, ca (5.1) și următoarele, a fost omis simbolul transpunerii). Unele inadvertențe în ordonarea materialului pot provoca dificultăți cititorului (convenția indicelui mut de sumare este folosită la p. 30 și definită la p. 122 etc.). Recenzentul nu este de acord cu formularea dată de autor teoremei lui Castigliano — partea a II-a (p. 35), întrucît, în cazul general, nelinear, energia de deformație U trebuie înlocuită prin energia complementară U_c. Relația (5.6) e incorectă, fiind echivalentă cu $K_{ij} = K_{ji}$, în timp ce, de fapt, $K_{ij} = K_{ji}^*$ (nota la p. 150). În fine, energia de deformație specifică U_0 este doar integrandul din relația (1.16).

Pentru edificarea cititorului, prezentăm mai jos cuprinsul lucrării.

În Introducere (p. 1—50) se prezintă obiectivele Analizei Structurilor, clasificarea structurilor, ipotezele fundamentale, lucrul mecanic, energia de deformație, lucrul mecanic virtual, teoremele Castigliano, Betti și Maxwell, relația forță-deplasare pentru bara dreaptă.

Următoarele trei capitole (p. 51—142) sînt destinate elementelor de matematici necesare: (vectori și matrice, sisteme de ecuații lineare, transformări de coordonate).

Capitolul al 5-lea — Metoda matricei de rigiditate (p. 143—240) — este consacrat metodei generale a deplasărilor, în formulare matriceală. Se prezintă ecuațiile generale (derivate din teorema lui Castigliano), asamblarea matricei de rigiditate a structurii, aplicarea condițiilor la limită, particularizările posibile (grinzi cu zăbrele, cadre plane, rețele de grinzi).

Capitolele următoare (p. 241—378) tratează cazuri speciale de încărcare și geometrie: capitolul al 6-lea, sarcini aplicate în cîmp, cedări de reazem, variații de temperatură, imperfecții inițiale; capitolul al 7-lea, bare cu diverse rezemări, reazeme înclinate și elastice; capitolul al 8-lea, modificări ale matricei de rigiditate la modificarea unor caracteristici ale structurii; capitolul al 9-lea, bare cu secțiune variabilă și bare curbe; capitolul al 10-lea, folosirea substructurilor, a simetriei, gruparea de elemente în serie și paralel.

În fine, capitolul al 11-lea este consacrat metodei matricei de flexibilitate (p. 379—414).

Lucrarea se încheie cu răspunsurile problemelor și cu un index tematic.

Dan Mucichescu

CONCEPȚII MODERNE ÎN CALCULUL STRUCTURILOR de prof. universitar emerit, ing. ALEXANDRU GHEORGHIU, Edit. tehnică, București, 1975.

Prezenta lucrare, cu un titlu care reflectă pe deplin conținutul de mare actualitate teoretică și practică, se cerea să fie scrisă și difuzată, știind extinderea din ultimii ani a problemelor analizei structurilor. Concepțiile moderne privind calculul structurilor și-au dovedit prezența permanent, odată cu marile programe de investiții, cu studiile și cercetările privind exploatarea rezervelor construcțiilor, pe seama cunoașterii mai bune a caracteristicilor materialului, a considerării unor scheme de calcul spațiale, luînd în calcul acțiunile și grupările în mod mai corect. Fără îndoială că extinderea utilizării aparatelor electronice de calcul așa cum se întîmplă în ultimul timp a impus o reconsiderare a metodelor de analiză și a concepției de calcul al structurilor din construcții, favorizînd o apreciere sintetică, modernă, a acestora.

În acest context, prezenta lucrare este cu totul bine venită și pune la dispoziția specialiștilor din învățămînt, cercetare, proiectare și din producție o vedere unitară și bogată asupra acestor probleme, într-o lumină modernă.

Lucrarea este dezvoltată pe 7 capitole care cuprind puncte de vedere actuale, sistematizări și sinteze pentru problemele din statica construcțiilor, dinamica construcțiilor, comportarea în domeniul elastic-plastic.

Aspectele de sinteză privind calculul structurilor în domeniul elastic sînt cuprinse în capitolul I. și aici se arată caracterul unitar și specificul celor două metode de rezolvare a problemelor static nedeterminate; formularea matriceală a acestor probleme favorizează — așa cum se știe — această privire comparativă și sinteza metodelor.

Capitolul al II-lea prezintă metoda deplasărilor ca instrument pentru calculul automatizat al structurilor, evidențiindu-se noțiunile de bară și de nod ca elemente componente ale structurii, matricea rigidității, substructurile, aspecte specifice.

„Divizarea în elemente discrete, metodă unitară de rezolvare a structurilor" este titlul capitolului al III-lea; în acesta se prezintă în paralel cele două modele posibile de discretizare, condițiile impuse în ecuații, aplicarea celor două metode de calcul, compararea rezultatelor etc.

Problema solicitărilor dinamice este parcursă în capitolul următor în care se arată condițiile și rezultatele specifice acestor probleme: moduri de vibrații, răspunsuri, valori și vectori proprii etc.

Capitolul al V-lea se ocupă de aplicarea metodelor generale în calculul geometric nelinear al structurilor elastice. După aceeași concepție ca mai sus, aici se discută în paralel problemele de ordinul II și de stabilitate, prin cele două metode posibile, respectiv pe bază de echilibru sau pe bază de compatibilitate.

Calculul structurilor în domeniul elastic-plastic face obiectul celui de-al VI-lea capitol. Sînt parcurse criteriile și metodele determinării cedării plastice, analiza comportării prin calcul de ordinul I și II, calculul deformațiilor în stadiul de cedare, sarcini repetate etc.

Ultimul capitol se ocupă de optimizare, ca obiectiv sintetic al proiectării structurilor, arătîndu-se formularea matematică, semnificația optimizării, metodele de optimizare etc.

Organizarea cărții cuprinde aspectele static, dinamic și de stabilitate ale calculului structurilor, întrunind astfel cele trei părți ale disciplinei, iar finalizarea cu probleme de optimizare apare ca o încununare logică a preocupărilor celor din specialitate. Considerarea materialului elastic și a celui elastic-plastic corespunde preocupărilor și necesităților actuale din calculul structurilor.

Modul de redactare al cărții dovedește experiența de o viață a autorului în problemele disciplinei, pe aceeași linie de publicare a lucrărilor privind statica, stabilitatea și dinamica construcțiilor. Prezentarea riguroasă, stilul fluent, oferă, pe lîngă toate celelalte, plăcere în a fi studiată. Cartea întrunește, prelucrează și oferă în mod unitar un important material de probleme moderne din domeniul calculului structurilor, altfel dispers și întîmplător. Formularea matriceală a problemelor ce se pretează în mod eficient acesteia, prezentă în lucrare, facilitează studiul la un nivel superior, riguros și clar.

În final, prezenta lucrare își găsește pe deplin locul în literatura de specialitate și va fi consultată cu folos de cei cărora li se adresează.

Editura Tehnică, bine cunoscută prin succesele obținute în publicarea de lucrări de construcții, realizează o dată în plus o lucrare de ținută superioară.

Ioan Munteanu

H. RÜSCH, D. JUNGWIRTH STAHLBETON-SPANNBETON, BAND 2 Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden auf das Verhalten der Tragwerke-Werner Verlag, Düsseldorf, 1976. (BETON ARMAT—BETON PRECOMPRIMAT, Vol. 2—Luarea în considerare a influenței curgerii lente și a contracției asupra comportării structurilor — 247 p., 157 fig. și 87 ref. bibl.).

Volumul 1 al manualului cunoscutului profesor Hubert Rüsch, apărut în 1972 și intitulat „Werkstoffeigenschaften und Bemessungsverfahren" (Proprietățile materialelor și metode de dimensionare — vezi „St. și Cerc. de Mec. Apl." 2 (1973), trebuia să fie urmat de volumul 2 „Anwendung mit Bewehrungsbeispielen" (Aplicații cu exemple de armare).

Cum tematica volumului 2 a fost tratată între timp de mai mulți autori, prof. Rüsch a găsit că este mai important să pună la dispoziția inginerului proiectant un instrument practic de lucru pentru rezolvarea problemelor complexe care apar în domeniul curgerii lente și contracției. Prof. Rüsch, savant de renume mondial, se ocupă de peste patru decenii de asemenea

probleme și la ora actuală este unul din cei mai buni cunoscători ai reologiei betonului. Pentru elaborarea acestei monografii, el a obținut colaborarea dr. ing. Dieter Jungwirth, care este familiarizat cu problemele ce apar în practică, și care, din proprie experiență, cunoaște procedeele de calcul aplicabile fiecărui caz în parte.

Cartea este împărțită în patru părți:

Partea A: În ce mod influențează contracția și curgerea lentă comportarea structurilor?

Partea B: Propuneri pentru aprecierea mărimii probabile a contracției și curgerii lente.

Partea C: Calculul realist al efectelor contracției și curgerii lente.

Partea D: Exemple.

Se descriu cazurile în care influența curgerii lente și a contracției este atît de mare, încît este necesară verificarea efectelor ei. Se prezintă stadiul actual al cunoștințelor în domeniul reologiei betonului și se fac propuneri realiste pentru estimarea cantitativă a curgerii lente și contracției. Subliniem faptul că aceste propuneri au fost incluse în noile prescripții germane din 1972 pentru betonul armat și precomprimat și că vor fi de asemenea adoptate în ediția a treia a recomandărilor internaționale CEB-FIP, care urmează să apară în 1976/1977. Se tratează apoi cele mai importante procedee de calcul propuse pînă în prezent (între care cunoscutul procedeu al lui Dischinger), pentru luarea în considerare a curgerii lente și contracției asupra comportării structurilor.

Dacă primele trei părți au apărut, sub o primă formă, în revista „Beton — und Stahlbetonbau" (Heft *3*, *4* und *6*, 1973), fiind apoi completate prin adăugirea unor capitole fundamentale (cum ar fi, spre exemplu, relaxarea armăturilor pretensionate), ultima parte a cărții, care reprezintă mai mult de jumătate din lucrare, este complet nouă și arată, pe baza a circa 40 de exemple, modul cum se efectuează calculul. Exemplele alese reprezintă o listă aproape completă a problemelor întîlnite de inginerul proiectant în practică.

Monografia analizată mai sus constituie, în domeniul complex — teoretic și practic — al reologiei betonului, o lucrare unică în felul ei, de o mare acuratețe a stilului și claritate a expunerii, asociate unei concizii și precizii specific inginerești, elaborată la un înalt nivel științific și dusă totodată pînă la finalizarea practică, care o face utilă inginerului proiectant. Ar fi de dorit ca această carte, deosebit de valoroasă și extrem de utilă proiectanților de structuri din beton armat și beton precomprimat, cum și celor care lucrează în învățămînt și cercetare, să fie tradusă în limba română.

Constantin Avram
Membru corespondent al Academiei R.S.R.

G. NIEMANN: Maschinenelemente (Organe de mașini), vol. I, Ediția a II-a realizată în colaborare cu M. Hirt; Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1975, XI + 398 pag, 290 fig., 136 tabele.

Retipărirea lucrării lui G. Niemann — *Organe de mașini* — după 25 ani de la apariția sa este rezultatul necesității. Prima ediție a avut o largă răspîndire fiind tradusă în 5 limbi. Ea este de mult timp epuizată intrînd în categoria monografiilor clasice.

În raport cu prima ediție, noul volum este considerabil îmbunătățit fiind reactualizat prin introducerea noilor soluții constructive pentru unele organe de mașini, precum și a normelor pentru utilizarea materialelor moderne. În plus, toate formulele, diagramele și tabelele au fost transpuse în sistemul de măsură — SI.

Capitolul 1, denumit: Puncte de vedere și metode de lucru, are caracter introductiv, familiarizînd cititorul cu concepțiile și metodele disciplinei tehnice — organe de mașini.

Capitolul al 2-lea se preocupă de forma și funcționalitatea pieselor și ansamblelor. Abordează probleme ca: alegerea materialului, prelucrarea sa, asamblarea, întreținerea, economicitatea soluțiilor, fiabilitatea etc. O atenție deosebită se acordă aspectului și stării suprafețelor pieselor și, respectiv, uzării și corodării acestora.

Capitolul al 3-lea descrie liniile directoare folosite în calculele de rezistență ale organelor de mașini. În timp ce calculele tensiunilor nominale și cele de rezistență statică nu se deosebesc prea mult de prima ediție, calculele rezistenței dinamice sînt mai dezvoltate.

Capitolul al 4-lea se ocupă de construcțiile ușoare și anume de metodele de dimensionare și verificare a rezistenței acestora. Se acordă atenție construcțiilor din metale ușoare și materiale plastice.

Capitolul al 5-lea abordează problema materialelor. După caracterizarea materialelor metalice tradiționale, se descriu o serie de materiale noi: metalele sinterizate, aliaje speciale și materialele polimerice.

Capitolul al 6-lea conține o serie de date privind normele, toleranțele și suprafețele, aspecte care sînt strîns legate de controlul de calitate.

Capitolul al 7-lea și al 8-lea descriu metodele și tipurile principale de îmbinare ale metalelor prin sudare și lipire. Se dau informații privind materialele folosite recent la lipirea metalelor prin încleiere.

Capitolul al 9-lea, al 10-lea și al 11-lea se ocupă de metodele de îmbinare prin nituri, șuruburi, bolțuri, știfturi și pene, iar capitolul al 12-lea conține o serie de date privind dimensionarea și construcția arcurilor elastice, între care și a unor piese elastice confecționate din cauciuc.

Capitolul al 13-lea și al 14-lea studiază problema cuplelor cu rostogolire, între care cele mai importante sînt lagărele cu rulmenți. După examinarea cîtorva aspecte teoretice ale contactului hertzian se prezintă particularitățile frecării de rostogolire, calculele de portanță și problemele legate de lubrifiere.

Capitolul al 15-lea examinează problemele legate de dimensionarea, lubrificația și materialele folosite la confecționarea lagărelor de alunecare. O atenție deosebită se acordă aspectelor tribologice.

Capitolul al 16-lea este consacrat problemelor lubrifianților, fiind mult îmbunătățit în raport cu ediția veche. Se prezintă proprietățile lubrifianților lichizi și ale aditivilor acestora, ale unsorilor minerale și sintetice, ale lubrifianților solizi, precum și norme pentru folosirea lubrifianților în practica industrială. De asemenea, se abordează aspecte practice legate de problema etanșării și a garniturilor.

Capitolul al 17-lea, al 18-lea și al 19-lea au ca obiect axele și arborii, precum și piesele de lectură ale acestora. Pentru acestea se dau formule de calcul și tabele pentru dimensionarea și verificarea lor, soluții constructive, norme de execuție etc.

La sfîrșit se dau informații privind conținutul vol. II al prezentei lucrări, din care spicuim următoarele probleme: roțile dințate, angrenajele melcate, transmisiile cu lanț și curea, cuplajele cu fricțiune și frînele etc.

Monografia *Organe de mașini* are caracter de manual, conținînd un număr impresionant de tabele și diagrame, precum și numeroase exemple de calcul. Pentru a compensa caracterul rezumativ al expunerii, fiecare capitol se încheie cu o listă bibliografică selectivă (în total cca. 850 lucrări). Lucrarea este utilă atît proiectanților, cercetătorilor și cadrelor didactice care lucrează în domeniile organelor de mașini și ale tribologiei, cît și cadrelor inginerești în general.

Boris Dimitrov

JOHN C. SNOWDON (ed.), Proceedings of the 1974 International Conference on Noise Control Engineering, „Inter-Noise 74" (Lucrările Conferinței Internaționale 1974 — de Combatere a Zgomotului), Noise-News, Poughkeepsie, New York, 1974, XXVI + 660 pag., 25$.

Volumul conține lucrările prezentate în cadrul ediției din 1974 a Conferinței Internaționale de Combatere a Zgomotului, desfășurată la Washington între 30 septembrie și 3 octombrie sub auspiciile Institutului de Combatere a Zgomotului INCE și ale Societății de Acustică, ambele din SUA. Consacrată în mod expres problemelor privind măsurarea, reducerea și efectele poluării fonice a mediului înconjurător, Conferința a subliniat de această dată existența unei intense solicitări publice și legislative generate de problematica reducerii efectelor zgomotului în viața de toate zilele. Faptul este pregnant ilustrat nu numai de creșterea cu 50% a numărului de lucrări prezentate față de ediția precedentă din 1973, dar și de nuanțarea problematicii abordate pe parcursul a 14 secții specializate, față de numai 7 în 1973.

Cele 141 de lucrări au fost prezentate în cadrul următoarelor secții: A — Aplicarea legislației privind poluarea fonică, B — Reglementarea zgomotului în colectivitățile urbane, C — Măsurători de zgomot și aparatura folosită, D — Combaterea zgomotului generat de aparatele de zbor, E — Reducerea la sursă a zgomotului instalațiilor, F — Zgomotul produs de mijloacele de transport rulant, G — Dispoziții locale privind zgomotul, H — Zgomotul intern la nave, I — Zgomotul în mediul înconjurător, J — Combaterea zgomotului de trafic, K — Zgomotul în construcții, L — Efectele zgomotului asupra omului, M — Reducerea expunerii la zgomot în timpul procesului de producție, N — Zgomotul în clădiri.

Ținînd seama de importanța deosebită a modului în care se elaborează și se aplică legislația în domeniul protecției împotriva poluării fonice ca și de gradul diferit de înțelegere al norme, de la bun început sînt prezentate șase comunicări care tratează atît problema

generală, metodologia și stabilirea strategiei în acest domeniu, respectiv modul de rezolvare în principiu al problemei, cît și aplicarea concretă a diferitelor tipuri de standarde de zgomot profesional și staționar în S.U.A. și R.F.G.

„Reglementarea zgomotului în colectivitățile urbane" deși cuprinde doar cinci lucrări oferă multe date deosebit de interesante atît datorită prezentării unei sinteze a acestei chestiuni, cît și expunerii soluțiilor aplicate în cazul unor aglomerări urbane cum sînt Londra, New York și, respectiv, din California.

Avînd în vedere că pentru rezolvarea optimă a largului spectru de probleme vizînd reducerea nivelului de zgomot este necesară o bună cunoaștere a metodelor sistematice și precise de studiu, precum și o aparatură adecvată, în cadrul secțiunii respective le sînt consacrate 20 de lucrări. Astfel pot fi găsite lucrări referitoare la prelucrarea numerică a vitezelor de atenuare în cîmp acustic reverberant, tehnicile numerice de mediere pentru analiza zgomotului de survol, respectiv sistemele digitale automate pentru înregistrarea zgomotului aeroporturilor, îmbunătățirile realizate în ceea ce privește precizia măsurătorilor de mediere spațială continue în cîmp acustic difuz, sistemele numerice de înregistrare automată a zgomotului în colectivitățile urbane; de asemenea, un număr de lucrări abordează aspecte legate de conceptul de audiodozimetrie și utilizarea sa, răspunsurile sonometrelor și al audiodozimetrelor la nivele nestaționare, răspunsul tranzitoriu al înregistratoarelor de zgomot. În sfîrșit, o atenție aparte este acordată utilizării microfoanelor speciale de măsură, microfoanelor direcționale, aplicării metodelor holografiei la identificarea surselor de zgomot precum și modului de folosire a conceptului de măsurători la mare altitudine pentru aprecierea zgomotului din colectivitățile urbane, sistemelor de studiu a forțelor de impact, determinării corecte a zgomotului generatoarelor cu turbine cu aburi, a zgomotului de trafic în interiorul locuințelor, a izolării fonice a ferestrelor.

Un număr de cinci comunicări se ocupă de „Combaterea zgomotului produs de aparatele de zbor", expunîndu-se soluțiile adoptate pentru reducerea zgomotului produs de avioanele de tipul Boeing, DC, Lockheed și Hawker, respectiv pentru realizarea prototipului avionului silențios. În plus, pot fi găsite și informații utile privind un nou sistem de calcul pe computer privind prezicerea zgomotului aparatelor de zbor.

În cadrul secțiunii „Reducerea la sursă a zgomotului instalațiilor", 19 lucrări prezintă modul în care se pune în acest caz rezolvarea problemei, respectiv modalităților concrete de studiu în cazul reducerii încă din faza de proiectare a zgomotului instalațiilor. Lucrări deosebit de interesante vizează astfel reducerea zgomotului acestor mecanisme, măsurătorile și soluțiile în cazul diferitelor tipuri de motoare folosite îndeosebi în aviație și la autovehicule, analiza zgomotului produs de interacțiunea curenților de aer cu conturul structurilor, prezentarea unor tipuri perfecționate de exhaustoare silențioase. De asemenea, un loc important îl ocupă și expunerea unor soluții de reducere a nivelului de zgomot în industria de prelucrare a lemnului, în instalațiile de pompare, la compresoarele mici precum și în ceea ce privește zgomotul în cabinele camioanelor de mare tonaj, identificarea și reducerea zgomotului la presele de perforat, modalitățile de combatere a zgomotului sistemelor de prelucrare a datelor.

„Zgomotul produs de mijloacele de transport rulant" cuprinde 10 lucrări ce abordează un număr de probleme de cea mai acută actualitate îndeosebi în cazul introducerii în colectivitățile urbane a noi tipuri de mijloace de transport, respectiv în cazul modernizării mijloacelor existente. Astfel, de la bun început sînt consacrate informări asupra modului în care a evoluat analiza problemei interacțiunii roată-șină ca și a impactului asupra mediului înconjurător a introducerii metroului. Alte lucrări se ocupă de prezicerea, în apropierea bordurii, a zgomotului generat de vehiculele pe șine, considerații asupra modului de folosire a ecranelor acustice, caracterizarea zgomotului produs de sistemele rapide de tranzit pentru persoane, în interior și în exterior. În sfîrșit, sînt date exemple tipice de rezolvare a acestei probleme în S.U.A. și Japonia.

O secțiune separată este dedicată modului în care trebuie stabilite și urmărite dispozițiile cu caracter local privind poluarea sonoră. Se întîlnesc lucrări tratînd modul de elaborare al strategiei privind combaterea zgomotului în Europa în general, un exemplu din S.U.A., precum și aspecte esențiale legate de sistematizarea urbană, de posibilitățile combaterii zgomotului în instalațiile de distribuire a gazelor naturale. Printre cele 10 comunicări incluse în această secțiune mai pot fi găsite și materiale referitoare la metodologia de evaluare și utilizare în scopuri publice a unor zone aflate în apropierea marilor aeroporturi, realizarea unor ghiduri de lucru în funcție de diferitele destinații ale surselor de zgomot existente.

„Zgomotul intern la nave" reflectă, pe parcursul a 10 comunicări, probleme interesante din acest domeniu ca, de exemplu, considerații generale privind zgomotul navelor, aprecierea și stabilirea nivelului de zgomot la navele comerciale, metodologia analizei și combaterii zgomo-

tului la bordul navelor, transmiterea zgomotului structural la nave, combaterea zgomotului aerian și consecințele utilizării unui ghid special în scopul reducerii zgomotului aerian la bordul navelor, reducerea zgomotului în cabine la navele mari.

În secțiunea ,,Zgomotul în mediul înconjurător", cuprinzînd 10 comunicări, se tratează o gamă întinsă de probleme de la determinarea nivelului de zgomot în zonele rurale și suburbane, zgomotul întreprinderilor de distribuire a energiei electrice, al transformatoarelor de mare putere și al instalațiilor de aer condiționat, evaluarea impactului asupra mediului înconjurător determinat de introducerea unor noi sisteme de trafic, la aspecte legate de răspunsul colectivităților la zgomotul autostrăzilor, compararea nivelului de zgomot și nemulțumirea cetățenilor, selectarea metodelor de analiză și aprecierea procedeelor de înregistrare a datelor privind zgomotul în colectivități.

Ținînd seama de soluțiile speciale de combatere a zgomotului de trafic, un număr de 10 lucrări se referă la legislația existentă în acest sens, cercetările experimentale urmărind reducerea zgomotului generat de vibrațiile pneurilor camioanelor respectiv datorită motorului pentru realizarea unui model silențios. În continuare sînt tratate pe larg problemele legate de sistematizarea șoselelor și autostrăzilor, de folosire a ecranelor acustice precum și de utilizare a modelării pentru studierea efectului vîntului asupra performanțelor acestora. De asemenea, sînt ilustrate și probleme cum ar fi efectul suprafeței drumului asupra zgomotului perceput subiectiv și folosirea unui program special de calcul în cazul unor șosele cu trafic intens.

,,Zgomotul în construcții" include pe parcursul a 7 comunicări aspecte semnificative ce trebuie urmărite în acest caz, pornind de la aspectele generale ale combaterii acestui tip de zgomot și metodele recente de determinare. Ale lucrării sînt consacrate modului de întregistrare și interpretare a zgomotului la construcția unor reactoare nucleare, la exploziile din exploatările de materiale de construcții precum și combaterea zgomotului compresoarelor portabile folosite în construcții, respectiv folosirea metodei moderne a acoperirilor cu materiale fonoabsorbante.

Atenția sporită de care se bucură problema protecției omului este subliniată și de tematica abordată de cele 9 lucrări prezentate în cadrul secțiunii,,Efectele zgomotului asupra omului". Materialele prezentate se referă la analiza de ansamblu a problemei om-zgomot, la riscul afectării auzului, la interferența vorbirii cu zgomotul; foarte interesante sînt lucrările referitoare la efectele biochimice ale zgomotului intermitent, handicapul în comunicare în cazul alterării auzului la frecvențe înalte, precum și datele conținute în comunicările referitoare la efectele auzului în cazul unor experiențe de supunere continuă la pulsuri tonale respectiv modul de control al expunerii la zgomot în construcții.

Ca o consecință firească a unor aspecte tratate în secțiunea precedentă, în cadrul secțiunii ,,Reducerea expunerii la zgomot în timpul procesului de producție" furnizează prin cele 8 comunicări, rezultatele obținute în ceea ce privește reducerea expunerii la zgomotul motoarelor electrice, în perioada 1954—1974, reducerea zgomotului cuptoarelor din rafinării, în instalațiile de pompare, realizarea unui echipament de combatere a zgomotului la cartarea materialului poștal. Merită menționate, în sfîrșit, realizarea unui nou tip de absorbant fonic și metodele de prezicere a zgomotului din întreprinderi, folosind tehnici de calcul numeric.

Într-o ultimă secțiune, ,,Zgomotul în clădiri"— cele 9 comunicări prezentate oferă aspecte inedite privind unele necunoscute în combaterea zgomotului sistemelor mecanice, izolarea clădirilor față de zgomotul din exterior, evaluarea zgomotului din zonele rezidențiale datorit surselor exterioare; de asemenea, pot fi găsite informații extrem de utile referitoare la prezicerea și evaluarea vibrațiilor structurilor de poduri generate de trafic, transmiterea zgomotului și vibrațiilor în anumite tipuri de structuri de clădiri, compararea metodelor de excitare pentru determinarea răspunsului dinamic perceptibil în clădiri precum și unele soluții pentru proiectarea unor tratamente ieftine și eficace de izolare fonică în școli și, respectiv, birouri.

H. Paven

LUCRĂRILE CELEI DE A V-A CONFERINȚE DE MAȘINI HIDRAULICE (BUDAPESTA, 15—20 septembrie 1975) Editori: L. Kisbocskói și Á Szabó

Cele două volume ale recentei conferințe de la Budapesta cuprind 114 lucrări prezentate de specialiști din 22 de țări, printre care și România, temele abordate de 171 autori acoperind un domeniu vast.

Lucrările conferinței pot fi grupate după temele discutate astfel: probleme generale de hidrodinamică teoretică (15), strat-limită (7), pompe (21), turbine (5), transmisii hidraulice (4), cavitație (28), lovitură de berbec (5), ventilatoare și compresoare (11), metode și aparate de măsură (7) și probleme diverse (11).

Cele mai multe lucrări (28) se ocupă de diferitele aspecte ale fenomenului de cavitație. Probleme fundamentale, cum ar fi incipiența cavitației, surparea bulelor cavitaționale, mecanismul eroziunii cavitaționale, influența cîmpurilor magnetice și electrice asupra procesului de eroziune cavitațională, zgomotul de cavitație ș.a. fac obiectul unui număr de 11 lucrări, iar influența cavitației asupra funcționării pompelor și detectarea apariției cavitației în pompe sînt considerate în 6 lucrări. Foarte interesante sînt cele 11 articole care prezintă rezultatele unor experiențe de eroziune cavitațională a unui număr mare de materiale în diferite lichide de lucru, printre care și în sodiu lichid. Printre autorii acestor lucrări sînt numeroși oameni de știință cu renume: A.J. Acosta (SUA), M.K. Bologa (URSS), F.G. Hammitt (SUA), S.P. Hutton (Anglia), K.K. Shalnev (URSS), K. Steller (Polonia).

Tematica variată oferă o imagine asupra preocupărilor actuale ale cercetărilor. Subliniem, pe lîngă lucrările de cavitație, cercetările privind efectul rugozității pereților asupra pierderilor în pompele centrifuge (E. Bobok), studiul influenței vibrațiilor din lichid asupra valorii critice a numărului Reynolds (Burka E.), compresoarele axiale cu control de strat-limită (K. Döge), tehnicile pentru studiul regimurilor de curgere nestaționară în turbomașini (H.E. Gallus), calculele de strat-limită în turbomașini axiale (W. Kümmel) și rotoare centrifuge (E. Litvai), vibrațiile paletelor turbinelor Kaplan (J. Osterwalder), curgerea în jocurile etanșărilor (H. Petermann), controlul stratului-limită în conduceri axiale simetrice (A. Shibl), curenții nestaționari induși de un disc rotitor (J.A.T. Stafford).

Volumele conferinței cuprind mai multe lucrări valoroase ale unor cercetători români privind calculul rotoarelor turbinelor Deriaz (N. Vasiliu, Șt. Zarea), funcționarea și calculul pompelor centrifuge (F. Gyulai, V. Anton, M. Popoviciu), transferul de energie cinetică în mișcarea fluidelor simple (O. Popa), suprafețele de curgere de tip Bernoulli și determinarea distribuției de viteze în camera spirală a mașinilor radiale (M. Exarhu) și determinarea diametrului de desprindere și a frecvenței bulelor cavitaționale emise din microneregularitățile suprafețelor solide (I. Anton, L. Vékàs, I. Potencz).

Conferințele de mașini hidraulice organizate sistematic de Societatea Științifică a Inginerilor Mecanici și de Secția de științe tehnice a Academiei RPU au devenit foruri de dezbatere de înalt nivel. Volumele editate de Editura Academiei din Budapesta în excepționale condiții grafice merită aprecieri deosebite.

Acad. *I. Anton*
L. Vékás

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică :

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor, solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 7.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 35, nr. 4 octombrie—decembrie 1976

SUMAR

STUDII Pag.

CHR. PELECUDI, D. TERME, N. MANAFI, S. CONONOVICI, Sinteza generală a mecanismelor plane prin metoda aproximaţiilor succesive asistată de calculatorul electronic 469

C. CRĂCIUN, D. HOMENTCOVSCHI, V. MASGRAS, Studiu comparativ al vitezelor şi debitelor din conducta pătrată şi circulară pentru mişcarea stratificată 485

B. DIMITROV, H.-A. LUEB, TH. G. F. SCHOON, Cercetări privind comportarea cuplei cu contact liniar în regim de frecare mixtă 497

DAN COŞA, CONSTANTIN PAVEL, GHEORGHE PAMFIL, Stabilitatea deformatei plane simetrice la încovoiere a grinzii „T" cu talpă lată. I . . . 515

ŞTEFAN STAICU, Metode energetice pentru studiul ciocnirilor 531

LIVIU BRÎNDEU, Determinarea pe cale operaţională a mişcărilor vibropercutante periodice 539

MIRCEA RADEŞ, Compensarea maselor la măsurarea impedanţelor mecanice 547

ADALBERT NAHLIK, Metodă dinamică de determinare a modulelor de elasticitate longitudinale şi transversale 569

A. TUDOR, Consideraţii asupra utilizării calculatorului electronic numeric în vederea determinării condiţiilor de prevenire a gripajului roţilor dinţate 577

IOAN CONSTANTINESCU, DAN GOLUMBOVICI, Asupra unui limbaj de programare pentru prelucrarea rezultatelor măsurărilor tensometrice rezistive 589

PETRE DODOC, Contribuţii la calculul dispozitivelor de iluminat pentru microscoapele de cercetare moderne 603

RECENZII 611

STUDII SI CERCETARI
DE
MECANICA APLICATA

Tomul 35 nr. 4 octombrie-decembrie 1976

SUMAR

STUDII Pag.

GHEORGHIU P. TEODOR, N. SANATESCU, S. CONDOVICI, Sinteza a mecanismelor plane prin metode approximative succesive 469

CRACIUN D. DUMITRU, V. MARCILAS, Studiu comparativ al vitezelor si conducta patrata si dreptunghiulara pentru mijloace turbionare 485

DUMITROV D. ALEXEI, DR. ING. F. SCHOOK, Cercetari privind obtinerea curgerii laminare in regim de tranzitie prin 497

OANCEA I. CONSTANTIN, TAVERNIER THEODOR, Metoda grafica pentru determinarea 519

BERAN STANCI, Metode grafice pentru studiul cinematic 561

VIG W. INDEL, Determinarea pe cale optica a unghiului vibrogenic 579

IONESCU I. VICTOR, Asupra determinarii experimentale a 597

ALEXANDRU RAUTE, Metoda dinamica de determinare a modulelor de 609

Bibliografie 627

A. ATANASIU, Contributii asupra unui nou sistem electronic numeric 637

Cronica 677

OANCEA CONSTANTIN, TIAN GHEORGHE, Asupra unui limbaj de programare destinat calculului de precizie a traiectoriilor 689

Prezentare 689

DUDIC, Contributii la calculul dispozitivelor de inmagazinat pentru mijloacele de transport moderne 693

RECENZII 711

SINTEZA GENERALĂ A MECANISMELOR PLANE PRIN METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE ASISTATĂ DE CALCULATORUL ELECTRONIC

de CHR. PELECUDI
Institutul politehnic București
D. TERME, N. MANAFI, S. CONONOVICI
Centrul de mecanică a solidelor București

Lucrarea tratează problema generală a sintezei mecanismelor plane prin metoda aproximațiilor succesive. Se alcătuiesc ecuațiile de proiectare pentru diferite metode clasice de sinteză. Acestea fiind neliniare, rezolvarea lor sub această formă este dificilă, de aceea se propune un procedeu de liniarizare a ecuațiilor. Rezolvarea acestora se realizează cu ajutorul unei metode iterative, prin aproximații succesive.
Se prezintă algoritmul pentru sinteza unui mecanism patrulater articulat de ghidare și un exemplu numeric realizat pe un calculator electronic.
Lucrarea a fost prezentată la Conferința Națională de Mecanică Aplicată, București, iunie, 1969.

1. SINTEZA GENERALĂ A MECANISMELOR PLANE PRIN METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE

Denumirea de mecanisme cu bare articulate se utilizează de obicei pentru mecanismele care cuprind atît cuple de rotație cît și de translație, astfel că, mai corect, ar trebui să se întrebuințeze denumirea de mecanisme cu cuple fundamentale (inferioare, de clasa a V-a).

Pentru această clasă de mecanisme, rezolvarea exactă a problemei sintezei cinematice metrice (dimensionale) sub formă generală este imposibilă. Numai pentru unele cazuri particulare de condiții cinematice, relative la deplasări (traiectorii), viteze, accelerații, adecvate unor tipuri speciale de mecanisme, se pot realiza sinteze exacte. Altfel, parametrii constructivi geometrici — lungimi și unghiuri fixe — de care dispune orice astfel de mecanism, sînt în număr limitat și pot fi selectați astfel încît mecanismul să îndeplinească un număr maxim de condiții cinematice, dar, desigur, limitat. Aceste condiții se referă la pozițiile, vitezele, accelerațiile simple sau asociate, finit sau infinit vecine, ale punctelor și cuplelor din mecanisme.

Vom fixa pentru mecanismul cu M grade de mobilitate m parametri cinematici independenți notați prin $x_1, x_2, \ldots, x_m$ și r parametri cinematici dependenți notați prin $y_1, y_2, \ldots, y_r$, dacă se pot scrie pentru același mecanism r ecuații independente și compatibile. Aceste ecuații

vor cuprinde desigur şi parametrii constructivi ai mecanismului notaţi prin λ_0, λ_1, λ_2,,. . . , λ_n al căror număr $(n + 1)$ depinde de tipul mecanismului.

Cele r ecuaţii de poziţie, ca şi derivatele lor — ecuaţiile de viteze sau de acceleraţii —, se obţin fie prin metoda contururilor, fie prin metoda elementelor [1]. În prima metodă se pot scrie $2N$ ecuaţii scalare pentru N contururi deformabile independente, deschise sau închise. În cea de-a doua metodă se pot scrie $4c-3n$ ecuaţii, pentru c cuple de rotaţie şi n elemente.

Mărginindu-ne în prezenta lucrare numai la ecuaţiile de poziţie acestea vor avea forma generală :

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_r, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0, \qquad (1)$$

$$i = 1, 2, \ldots, r.$$

Pentru analiza mecanismelor problema constă în impunerea parametrilor independenţi (conducători) şi determinarea celor dependenţi (conduşi). Conform teoriei funcţiilor implicite se pot explicita variabilele dependente în domeniul Δ de variaţie al lor, în care determinantul funcţional (jacobianul) $J \neq 0$.

În sinteza mecanismelor, în cazul cel mai general, se impun o parte din parametrii cinematici dependenţi în corelaţie sau nu cu cei independenţi. De aceea, vom nota prin z_j parametrii cinematici x sau y, indiferent că sînt independenţi sau dependenţi :

$$f_i(z_1, z_2, \ldots, z_m, z_{m+1}, \ldots, z_{m+r}, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0, \qquad (1')$$

$$i = 1, 2, \ldots, r.$$

Caracterul de parametri dependenţi îl iau parametrii constructivi λ_h şi o parte din parametrii z_j, ceilalţi rămînînd independenţi, prescrişi prin condiţiile impuse de problema sintezei.

Rezolvarea acestor ecuaţii de formă neliniară este dificilă atît pentru analiza, cît şi pentru sinteza mecanismelor. Sînt cunoscute astfel dificultăţile de rezolvare în problemele de bază ale sintezei mecanismelor [2] :

I — problema interpolării prin puncte, elaborată de Burmester, constă în aproximarea unei curbe date prin trasarea unei curbe de către un mecanism, între cele două curbe existînd o serie de puncte comune la distanţe egale sau neegale. În intervalele dintre punctele coincidente eroarea de îndepărtare a unei curbe de alta variază de la un interval la altul ;

II — problema celui mai mare contact între curba dată şi curba realizată de către mecanism se bazează pe dezvoltarea în serie de puteri după Taylor. Se utilizează în acest caz condiţiile curbelor de bielă osculatoare curbei date ;

III — problema celei mai mici abateri maxime, cunoscută şi sub numele de aproximare optimă sau apropierea uniformă, elaborată de Cebîşev, constă în determinarea punctelor succesive şi deci a intervalelor

în care abaterea dintre curbe este maximă, succesiv pozitivă sau negativă, deci cu aceeași valoare absolută de la un interval la altul. Metoda se bazează pe funcțiile care se abat cel mai puțin de la zero;

IV — problema celei mai mici abateri medii pătratice, elaborată sub formă generală de Gauss și dezvoltată pentru mecanisme de N. I. Levitski, conduce la abateri pozitive sau negative neegale. Datorită proprietăților seriilor Fourier, utilizarea lor este preferată pentru această problemă (serii de exponențiale).

O cale generală de rezolvare a acestor probleme bazate pe ecuații neliniare utilizează aproximațiile succesive (iterații). Fiecare necunoscută se obține ca valoare finală dintr-o sumă de termeni, în care primul reprezintă valoarea inițială arbitrară, iar ceilalți sînt corecții succesive pe diferite trepte de aproximație. Aplicațiile metodei la diversele probleme ale sintezei mecanismelor se fac în continuare:

I. A. Se presupun dați $(m + 1)$ parametri cinematici z, indiferent că în mecanism apar drept parametri conducători sau conduși, astfel că ecuațiile de tipul (1′) vor da valorile restului de parametri cinematici z în număr de $(r - 1)$ pentru cele $(n + 1)$ poziții precum și valorile celor $(n + 1)$ parametri constructivi λ_h. Fie

— $z_{1,k}, z_{2,k}, \ldots, z_{m+1,k}$ valorile celor $(m + 1)$ parametri cinematici prescriși în poziția k, unde $k = 1, 2, \ldots, n + 1$;

— $z^j_{m+2,k}, z^j_{m+3,k}, \ldots, z^j_{m+r,k}$ valorile celor $(r - 1)$ parametri cinematici în poziția k, pe treapta j de aproximare;

— $\lambda^j_0, \lambda^j_1, \lambda^j_2, \ldots, \lambda^j_n$ valorile celor $(n + 1)$ parametri constructivi pe treapta j de aproximare.

Cu aceste valori funcțiile f_i diferă în general de zero, conducînd la erorile:

$$\varepsilon^j_{ik} = f_i(z_{1,k}, z_{2,k}, \ldots, z_{m+1,k}, z^j_{m+2,k}, \ldots, z^j_{m+r,k}\, \lambda^j_0, \lambda^j_1, \ldots, \lambda^j_n) \neq 0, \qquad (2)$$

$$i = 1, 2, \ldots, r; \qquad k = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Adăugînd creșteri finite pentru variabilele $z^j_{h,k}$ și λ^j_h, pentru care funcțiile f_i se anulează, și dezvoltînd în serie Mac-Laurin, obținem sistemul de ecuații:

$$\varepsilon^j_{ik} + \sum_{h=m+2}^{m+r} \frac{\partial f_{i,k}}{\partial z^j_{h,k}} \cdot \Delta z^j_{h,k} + \sum_{h=0}^{n} \frac{\partial f_{i,k}}{\partial \lambda^j_h} \cdot \Delta \lambda^j_h = 0, \qquad (3)$$

$$i = 1, 2, \ldots, r; \qquad k = 1, 2, \ldots, n + 1.$$

Acest sistem cuprinde $(n + 1) \cdot r$ ecuații cu $(n + 1)$ necunoscute $\Delta \lambda^j_h$ și $(n + 1) \cdot (r - 1)$ necunoscute $\Delta z^j_{h,k}$, ceea ce în cazurile nesingulare permite o rezolvare simplă, ecuațiile (3) fiind liniare. Cu ajutorul corecțiilor determinate se obțin valorile parametrilor pe o treaptă superioară de aproximație:

$$z^{j+1}_{h,k} = z^j_{h,k} + \Delta z^j_{h,k}, \qquad \begin{matrix} h = m + 2, \ldots, m + r, \\ k = 1, 2, \ldots, n + 1, \end{matrix} \qquad (4)$$

$$\lambda^{j+1}_h = \lambda^j_h + \Delta \lambda^j_h, \qquad h = 0, 1, \ldots, n. \qquad (4')$$

I. B. Mărind numărul parametrilor cinematici z, daţi pentru sinteză, la $(m + p)$, ecuaţiile (3) se vor putea scrie numai de q ori, respectiv pentru q poziţii, în modul următor :

$$\varepsilon_{ik}^{j} + \sum_{h=m+p+1}^{m+r} \frac{\partial f_{i,k}}{\partial z_{h,k}^{j}} \cdot \Delta z_{h,k}^{j} + \sum_{h=0}^{n} \frac{\partial f_{i,k}}{\partial \lambda_h^{j}} \cdot \Delta \lambda_h^{j} = 0, \tag{5}$$

$$i = 1, 2, \ldots, r,$$

$$k = 1, 2, \ldots, q.$$

În acest caz vor fi $q \cdot r$ ecuaţii cu $(n + 1)$ necunoscute $\Delta\lambda_h^j$ şi $q \cdot (r - p)$ necunoscute $\Delta z_{h,k}^j$, adică

$$q \cdot r = q \cdot (r - p) + (n + 1) \tag{6}$$

sau

$$p \cdot q = n + 1.$$

Dacă nu se impune determinarea tuturor parametrilor constructivi λ_h, ci unii dintre aceştia sînt fixaţi anterior, atunci

$$p \cdot q \leqslant n + 1. \tag{6'}$$

I. C. De cele mai multe ori se elimină variabilele care nu interesează direct în sinteză, spre exemplu $z_{h,\,m+p}$, astfel că numărul ecuaţiilor se reduce. Pentru un mecanism plan cu un singur grad de mobilitate se poate ajunge la o singură ecuaţie în variabilele (x, y) ale curbei de bielă :

$$f(x, y, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0, \tag{7}$$

ceea ce faţă de cazul general reprezintă o particularizare prin $m = 1$, $r = 1$, $p = 1$ şi deci

$$q = n + 1.$$

Această curbă de bielă poate trece prin $q = n + 1$ puncte oarecare $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n+1}, y_{n+1}$, scriindu-se $(n + 1)$ ecuaţii

$$f(x_k, y_k, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0, \tag{7'}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n + 1,$$

care determină cei $(n + 1)$ parametri constructivi λ_h.

Considerînd valori aproximative pentru parametrii λ_h, atunci există erorile

$$\varepsilon_k^j = f(x_k, y_k, \lambda_0^j, \lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j) \neq 0, \tag{8}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n + 1,$$

iar ecuaţiile pentru determinarea corecţiilor $\Delta\lambda_h^j$ vor fi

$$c_k^j + \sum_{h=0}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_h^j} \cdot \Delta \lambda_h^j = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n + 1, \tag{9}$$

adică $(n + 1)$ ecuaţii cu $(n + 1)$ necunoscute.

I. D. În ecuația curbei de bielă (7) x poate fi considerat variabilă independentă (conducătoare), iar y va fi variabila dependentă (condusă). Dacă se urmărește corelarea punctelor traiectoriei date pentru sinteză cu unghiurile manivelei conducătoare, adică

$$\begin{aligned} x &= x(\varphi), \\ y &= y(\varphi), \end{aligned} \tag{10}$$

se introduc valorile x și y scoase din aceste ecuații parametrice în ecuația curbei de bielă (7):

$$f(\varphi, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0, \tag{11}$$

care va furniza valorile φ_k ale punctelor de intersecție dintre cele două curbe. Impunînd ca și în cazul anterior $(n+1)$ valori pentru φ, se determină $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ din

$$\begin{aligned} f(\varphi_k, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) &= 0, \\ k &= 1, 2, \ldots, n+1. \end{aligned} \tag{12}$$

Dacă, însă, valorile φ_k nu corespund cu punctele de intersecție, sau altfel, valorile parametrilor λ_h sînt aproximative, atunci, cu ajutorul erorilor

$$\begin{aligned} \varepsilon_k^j &= f(\varphi_k, \lambda_0^j, \lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j) \neq 0, \\ k &= 1, 2, \ldots, n+1, \end{aligned} \tag{13}$$

se determină ecuațiile de corecție de forma anterioară (9).

I. E. Utilizînd diferențele finite și puterile generalizate se obține dezvoltarea (seria Newton) în jurul valorii φ_0:

$$\begin{aligned} f(\varphi, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f(\varphi_0) + \frac{\Delta f(\varphi_0)}{h} \cdot (\varphi - \varphi_0) + \\ + \frac{\Delta^2 f(\varphi_0)}{h^2 \cdot 2!} \cdot (\varphi - \varphi_0) \cdot (\varphi - \varphi_0 - h) + \frac{\Delta^3 f(\varphi_0)}{h^3 \cdot 3!} \cdot \\ \cdot (\varphi - \varphi_0) \cdot (\varphi - \varphi_0 - h) \cdot (\varphi - \varphi_0 - 2h) + \ldots \end{aligned} \tag{14}$$

care poate fi utilizată pentru interpolarea prin noduri echidistante. Într-adevăr, pentru $\varphi_k = \varphi_0 + k \cdot h$ se determină (termenii de rang mai mare decît k se anulează):

$$\begin{aligned} f(\varphi_k, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f(\varphi_0) + k \cdot \Delta f(\varphi_0) + \frac{k(k-1)}{2!} \cdot \Delta^2 f(\varphi_0) + \\ + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!} \cdot \Delta^3 f(\varphi_0) + \ldots + \Delta^k f(\varphi_0), \quad k = 0, 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{15}$$

care se tratează prin aproximații succesive, ca și funcțiile anterioare.

II. Dezvoltînd în serie de puteri în jurul valorii φ_0 funcţia (11), se obţine

$$f(\varphi, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = f(\varphi_0) + \frac{\partial f(\varphi_0)}{\partial \varphi} \cdot \left(\varphi - \varphi_0 \right) + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 f(\varphi_0)}{\partial \varphi^2} \cdot (\varphi - \varphi_0)^2 + \ldots, \tag{16}$$

astfel că pentru ca cele două curbe să aibă un contact maxim de ordinul n, adică $(n + 1))$ puncte confundate în φ_0, trebuie ca

$$\begin{aligned} & f(\varphi_0, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = 0, \\ & g_k(\varphi_0, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{\partial^k f(\varphi_0)}{\partial \varphi^k} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{17}$$

Procedînd ca şi în cazurile anterioare cînd parametrii au valori aproximative :

$$\begin{aligned} & \varepsilon_f^j = f(\varphi_0, \lambda_0^j, \lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j) \neq 0, \\ & \varepsilon_{gk}^j = g_k(\varphi_0, \lambda_0^j, \lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j) \neq 0, \qquad k = 1, 2, \ldots n \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} & \varepsilon_f^j + \sum_{h=0}^{n} \frac{\partial f}{\partial \lambda_h^j} \cdot \Delta \lambda_h^j = 0, \\ & \varepsilon_{gk}^j + \sum_{h=0}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial \lambda_h^j} \cdot \Delta \lambda_h^j = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned} \tag{19}$$

III. În problema celei mai mici abateri maxime a lui Cebîşev, condiţiile pe care trebuie să le îndeplinească funcţia (11) sînt :

— să capete valori maxime succesiv pozitive şi negative egale în valoare absolută pentru punctele succesive φ_k, adică

$$f(\varphi_k, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, L) = f(\varphi_k, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) + (-1)^k \cdot L = 0, \tag{20}$$
$$k = 0, 1, \ldots, n + 1.$$

— derivata funcţiei să se anuleze în aceleaşi puncte succesive φ_k, inclusiv la capetele intervalului $[\alpha, \beta]$ pe care se face sinteza curbei date :

$$g(\varphi_k, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \frac{\partial f(\varphi_k, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)}{\partial \varphi} \cdot (\varphi_k - \alpha) \cdot (\varphi_k - \beta) = 0, \tag{21}$$
$$k = 0, 1, \ldots, n + 1.$$

Se obțin deci $2(n+2)$ ecuații cu $(n+2)$ necunoscute φ_k, cu $(n+1)$ necunoscute λ_h și la care se adaugă și necunoscuta abaterii maxime L.

Considerînd valori aproximative în treapta j de aproximare pentru φ_k, λ_h și L, se obțin erorile :

$$\varepsilon_{f,k}^{j} = f(\varphi_k^j, \lambda_0^j, \lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j) + (-1)^k \cdot L^j \neq 0,$$
$$\varepsilon_{g,k}^{j} = g(\varphi_k^j, \lambda_0^j, \lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j) \neq 0. \qquad k = 0, 1, \ldots, n+1, \tag{22}$$

Prin utilizarea creșterilor finite se obțin ecuațiile corecțiilor :

$$\varepsilon_{f,k}^{j} + \frac{\partial f_k}{\partial \varphi^j} \cdot \Delta\varphi_k^j + \sum_{h=0}^{n} \frac{\partial f_k}{\partial \lambda_h^j} \cdot \Delta\lambda_h^j + (-1)^k \cdot \Delta L^j = 0,$$
$$\varepsilon_{g,k} + \frac{\partial g_k}{\partial \varphi^j} \cdot \Delta\varphi_k^j + \sum_{h=0}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial \lambda_h^j} \cdot \Delta\lambda_h^j = 0, \tag{23}$$
$$k = 0, 1, \ldots, n+1.$$

IV. În problema celei mai mici abateri medii a lui Gauss-Levitski se va nota abaterea cu

$$\varepsilon_f = f(\varphi, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0, \tag{24}$$

și trebuie să se determine minimul integralei

$$I = \int_{\alpha}^{\beta} \varepsilon_f^2 \, \mathrm{d}\varphi, \tag{25}$$

adică

$$\frac{\partial I}{\partial \lambda_k} = \int_{\alpha}^{\beta} 2f \frac{\partial f}{\partial \lambda_k} \cdot \mathrm{d}\varphi = 0 \,; \quad g_k(\varphi, \lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \int_{\alpha}^{\beta} f \cdot \frac{\partial f}{\partial \lambda_k} \cdot \mathrm{d}\varphi = 0. \tag{26}$$

Dacă valorile λ_h sînt aproximative, funcțiile g_k nu se anulează, adică

$$\varepsilon_{gk}^{j} = g_k(\varphi_k, \lambda_0^j, \lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j) \neq 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, n \tag{27}$$

și deci ecuația corecțiilor este

$$\varepsilon_{gk}^{j} + \sum_{h=0}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial \lambda_h^j} \cdot \Delta\lambda_h^j = 0, \tag{28}$$
$$k = 0, 1, \ldots, n.$$

2. REALIZAREA UNEI COLECŢII DE MECANISME, ÎN PARAMETRI ADIMENSIONALI, UTILE SINTEZEI MECANISMELOR PLANE

Realizarea practică a sintezei mecanismelor plane prin metoda aproximaţiilor succesive, presupune o rapiditate satisfăcătoare a convergenţei şirului de termeni, pentru a ajunge la precizia dorită în cît mai puţine trepte de aproximare. Alegerea valorilor iniţiale şi îndepărtarea mecanismului de poziţiile sale moarte are o importanţă hotărîtoare asupra rapidităţii convergenţei.

În scopul unei mai comode selectări a acestor valori s-a alcătuit o colecţie de mecanisme patrulatere articulate (tabelele 1, 2, 3), ale căror funcţii de transmitere şi curbe de bielă sînt date tabelar.

Tabela 1

Mecanisme manivelă-balansier

Nr. crt.	k_1	k_2	k_3
1	0,25	0,50	0,75
2	0,25	0,50	1,00
3	0,25	0,75	0,50
4	0,25	0,75	0,75
5	0,25	0,75	1,00
6	0,25	1,00	0,25
7	0,25	1,00	0,50
8	0,25	1,00	0,75
9	0,25	1,00	1,00
10	0,25	2,00	2,00
11	0,25	3,00	3,00
12	0,50	0,75	0,75
13	0,50	0,75	0,75
14	0,50	1,00	0,50
15	0,50	1,00	0,75
16	0,50	1,00	1,00
17	0,50	2,00	2,00
18	0,50	3,00	3,00
19	0,75	1,00	0,75
20	0,75	1,00	1,00
21	0,75	2,00	2,00
22	0,75	3,00	3,00
23	1,00	2,00	2,00
24	1,00	3,00	3,00

Tabela 2

Mecanisme dublă-manivelă

Nr. crt.	k_1	k_2	k_3
1	0,25	0,25	1,00
2	0,50	0,50	1,00
3	0,50	0,75	0,25
4	0,50	1,00	0,25
5	0,75	0,75	0,25
6	0,75	0,75	0,50
7	0,75	0,75	1,00
8	0,75	1,00	0,25
9	0,75	1,00	0,50
10	1,00	1,00	0,25
11	1,00	1,00	0,50
12	1,00	1,00	0,75
13	1,00	1,00	1,00
14	2,00	2,00	0,50
15	2,00	2,00	0,50
16	2,00	2,00	0,75
17	2,00	2,00	1,00
18	3,00	3,00	0,25
19	3,00	3,00	0,50
20	3,00	3,00	0,75
21	3,00	3,00	1,00

Tabela 3

Mecanisme dublu balansier

Nr. crt.	k_1	k_2	k_3	Nr. crt.	k_1	k_2	k_3
1	0,25	0,25	0,75	22	0,75	2,00	0,75
2	0,25	0,50	0,50	23	0,75	2,00	1,00
3	0,25	0,75	0,25	24	0,75	2,00	3,00
4	0,25	1,00	2,00	25	0,75	3,00	2,00
5	0,25	2,00	1,00	26	1,00	1,00	2,00
6	0,25	2,00	3,00	27	1,00	2,00	0,25
7	0,25	3,00	2,00	28	1,00	2,00	0,50
8	0,50	0,50	0,25	29	1,00	2,00	0,75
9	0,50	0,50	0,50	30	1,00	2,00	1,00
10	0,50	0,50	0,75	31	1,00	2,00	3,00
11	0,50	0,75	0,50	32	1,00	3,00	2,00
12	0,50	0,75	2,00	33	2,00	2,00	2,00
13	0,50	1,00	2,00	34	2,00	2,00	3,00
14	0,50	2,00	0,75	35	2,00	3,00	0,25
15	0,50	2,00	1,00	36	2,00	3,00	0,50
16	0,50	2,00	3,00	37	2,00	3,00	0,75
17	0,50	3,00	2,00	38	2,00	3,00	1,00
18	0,75	0,75	0,75	39	2,00	3,00	2,00
19	0,75	0,75	2,00	40	2,00	3,00	3,00
20	0,75	1,00	2,00	41	3,00	3,00	2,00
21	0,75	2,00	0,50	42	3,00	3,00	3,00

Se consideră mecanismul patrulater articulat O_1ABO_2 (fig. 1), în sistemul de axe XO_1Y. Se atașează bielei AB un plan mobil, a cărui mișcare va fi determinată, evident, de mișcarea bielei.

Utilizînd metoda analitică a conturelor, se obține ecuația de poziție :

$$\bar{r} + \bar{l} + \bar{R} = \bar{L}, \qquad 29)$$

care conduce la cele două ecuații scalare :

$$\begin{aligned} r\cos\varphi + l\cos\theta + R\cdot\cos(\pi - \psi) &= L, \\ r\sin\varphi + l\sin\theta - R\cdot\sin(\pi - \psi) &= 0. \end{aligned} \qquad (30)$$

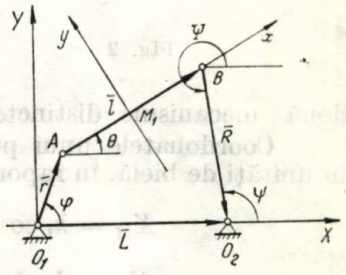


Fig. 1

Din aceste ecuații, considerîndu-se cunoscuți parametrii constructivi r, l, R, L și unghiul φ al manivelei, se determină valorile unghiurilor θ și ψ. În calcule nu s-au introdus lungimile elementelor în unități naturale, ceea

ce ar fi limitat foarte mult numărul cazurilor tratate, ci s-a utilizat drept unitate de măsură lungimea bielei :

$$r = k_1 l,$$
$$R = k_2 l, \tag{31}$$
$$L = k_3 l.$$

În planul mobil xM_1y, coordonatele unui punct din planul bielei se vor nota prin k_4 şi k_5, exprimate în unităţi de bielă.

Prin prelucrarea ecuaţiilor (30) se obţine

$$A - \cos\theta + B \sin\theta = 0, \tag{32}$$

unde

$$A = \frac{k_1^2 + k_3^2 + 1 - k_2^2 - 2k_1k_3\cos\varphi}{2(k_3 - k_1\cos\varphi)}, \qquad B = \frac{k_1 \sin\varphi}{k_3 - k_1\cos\varphi}. \tag{33}$$

Unghiul θ al bielei se determină din (32) cu :

$$\cos\theta_{1,2} = \frac{A \pm B\sqrt{1 + B^2 - A^2}}{1 + B^2}, \tag{34}$$
$$\sin\theta_{1,2} = \frac{-AB \pm \sqrt{1 + B^2 - A^2}}{1 + B^2}.$$

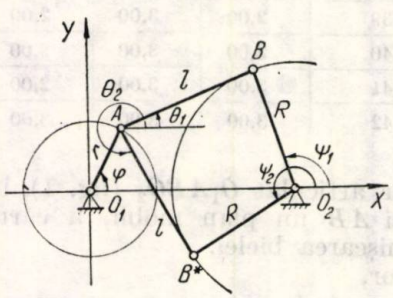


Fig. 2

Unghiul ψ al balansierului se va determina utilizînd relaţiile :

$$\cos\psi_{1,2} = \frac{k_1\cos\varphi - k_3 + \cos\theta_{1,2}}{k_2},$$
$$\sin\psi_{1,2} = \frac{k_1\sin\varphi + \sin\theta_{1,2}}{k_2}. \tag{35}$$

Cele două soluţii obţinute pentru unghiurile θ şi ψ, corespunzătoare aceluiaşi unghi al manivelei φ, conduc la două mecanisme distincte, construite cu aceleaşi elemente (fig. 2).

Coordonatele unui punct oarecare M din planul bielei, exprimate în unităţi de bielă, în raport cu sistemul de coordonate XO_1Y sînt

$$X_M = k_1\cos\varphi + (k_4 + 0{,}5)\cdot\cos\theta - k_5\sin\theta,$$
$$Y_M = k_1\sin\varphi + (k_4 + 0{,}5)\cdot\sin\theta + k_5\cos\theta. \tag{36}$$

Pentru obţinerea unei curbe de bielă se calculează coordonatele punctului de bielă corespunzător, pentru valori succesive ale unghiului φ de rotaţie al manivelei.

Luînd diferite valori pentru coeficienții adimensionali k_1, k_2, k_3, care caracterizează un mecanism patrulater articulat, se pot obține o infinitate de astfel de mecanisme. Valorile cele mai uzuale, capabile să acopere majoritatea cazurilor practice, sînt:

0,25; 0,50; 0,75; 1;00; 2,00; 3,00.

Combinînd aceste șase valori se pot obține $6^3 = 216$ triplete de coeficienți. Dintre acestea numai 146 corespund unor mecanisme patrulatere posibil de construit, acest număr reducîndu-se la 87 prin eliminarea simetriilor.

Aplicînd regulile lui Grashof, aceste mecanisme se grupează în cele trei tipuri de mecanisme patrulatere articulate, respectiv manivelă-balansier (tabela 1), dublă-manivelă (tabela 2) și dublu-balansier (tabela 3).

Pentru fiecare tripletă de coeficienți din această colecție se pot calcula tabelar funcțiile de transmitere și curbele de bielă pentru punctele bielei indicate în figura 3, atît pentru mecanismul direct O_1ABO_2 cît și pentru cel conjugat $O_1AB^*O_2$ (fig. 2).

Pe baza algoritmului de calcul expus s-a alcătuit schema logică a desfășurării calculelor (fig. 4) și un program de calcul în limbaj FORTRAN, calculele fiind efectuate pe un calculator electronic numeric IBM—360/30.

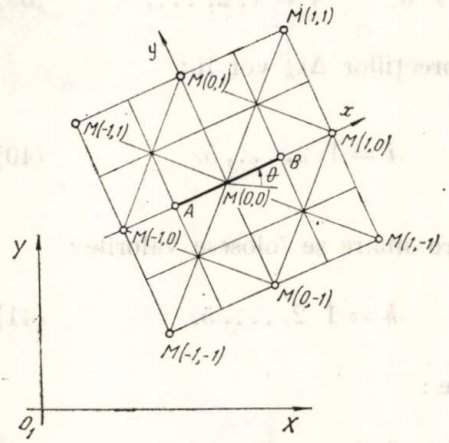


Fig. 3

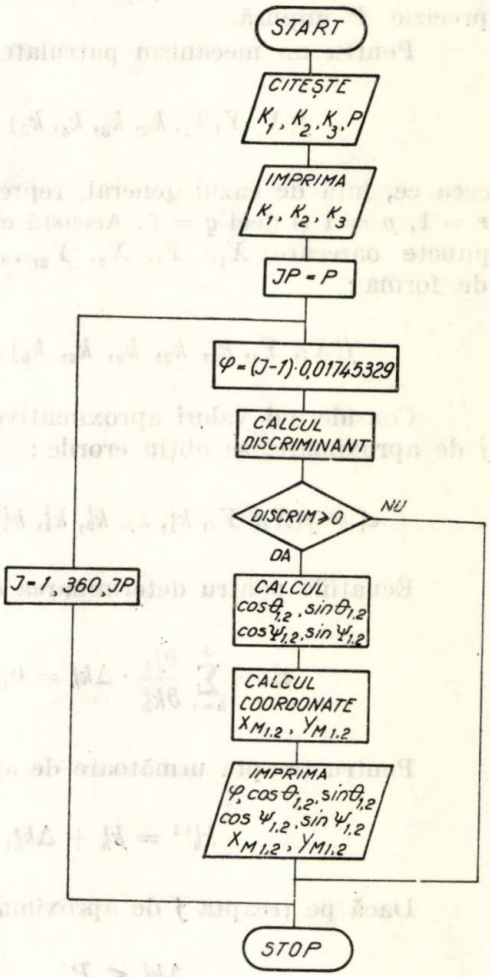


Fig. 4

Programul de calcul întocmit se poate utiliza pentru orice variaţie a unghiului φ. De asemenea, se pot calcula curbe de bielă descrise de puncte diferite de cele din figura 3. Programul de calcul, modificat corespunzător, se poate utiliza în acest scop.

Tabelele obţinute pot avea o utilizare variată atît pentru calcule cinematice, cît şi pentru alegerea valorilor iniţiale necesare sintezei mecanismelor plane de ghidare şi de transmitere prin metoda aproximaţiilor succesive.

3. ALGORITM PENTRU SINTEZA MECANISMULUI PATRULATER ARTICULAT

Problema propusă spre rezolvare constă în determinarea parametrilor constructivi ai mecanismului patrulater articulat capabil să genereze o curbă de bielă care să aproximeze o curbă dată prin cinci puncte, cu o precizie P impusă.

Pentru un mecanism patrulater articulat, ecuaţia (7) devine [2]:

$$f(X, Y, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = U^2 + V^2 + W^2 = 0, \tag{37}$$

ceea ce, faţă de cazul general, reprezintă o particularizare prin $m = 1$, $r = 1$, $p = 1$ şi deci $q = 5$. Această curbă de bielă poate trece prin $q = 5$ puncte oarecare X_1, Y_1, X_2, Y_2, ..., X_5, Y_5, scriindu-se cinci ecuaţii de forma:

$$f(X_i, Y_i, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5. \tag{38}$$

Considerînd valori aproximative pentru parametrii k_h, pe treapta j de aproximare, se obţin erorile:

$$\varepsilon_i^j = f(X_i, Y_i, k_1^j, k_2^j, k_3^j, k_4^j, k_5^j) \neq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5. \tag{39}$$

Ecuaţiile pentru determinarea corecţiilor Δk_h^j vor fi:

$$\varepsilon_i^j + \sum_{h=1}^{5} \frac{\partial f_i}{\partial k_h^j} \cdot \Delta k_h^j = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, 5. \tag{40}$$

Pentru treapta următoare de aproximare se folosesc valorile:

$$k_h^{j+1} = k_h^j + \Delta k_h^j, \qquad h = 1, 2, \ldots, 5. \tag{41}$$

Dacă pe treapta j de aproximare:

$$\Delta k_h^j \leqslant P, \qquad h = 1, 2, \ldots, 5, \tag{42}$$

calculul se oprește și :

$$k_h = k_h^{j+1}, \qquad h = 1, 2, \ldots, 5.$$

Dacă

$$\Delta k_h^j > P, \tag{42'}$$

se continuă iterația.

La aplicarea acestei metode se pun următoarele probleme fundamentale :

— *studierea condițiilor de existență a soluțiilor* : în cazul în care existența soluției din punct de vedere matematic este evidentă (jacobianul sistemului este diferit de 0) se pune problema existenței din punct de vedere fizic a soluției. Aceasta înseamnă că soluția sistemului trebuie să determine perfect un mecanism la sfîrșitul iterației ;

— *alegerea valorilor de aproximare inițiale* : tabelele calculate conform algoritmului descris în capitolul anterior se folosesc pentru alegerea unor valori inițiale de aproximare convenabile pentru necunoscutele k_h. Se caută curba de bielă cea mai apropiată de punctele date și se iau ca valori de aproximare inițiale parametri constructivi k_h ai mecanismului care generează această curbă ;

— *verificarea convergenței șirului de aproximații succesive* : convergența este pătratică dacă ordinul de multiplicitate al rădăcinilor de determinat este egal cu 1 și dacă funcțiile $f_i(k_h)$ admit derivate continui pînă la ordinul doi inclusiv [3]. În cazul în care convergența șirului de aproximații nu poate avea loc, urmează elucidarea condițiilor în care procedeul este convergent. Se poate realiza un algoritm de calcul cu ajutorul căruia să se verifice convergența procedeului pentru valorile inițiale alese, urmînd ca, în cazul convergenței, să se calculeze valorile necunoscutelor pe prima treaptă de aproximare. În caz contrar, se aleg alte valori inițiale pentru care se repetă operațiile amintite mai sus.

În scopul urmărit se poate utiliza următoarea teoremă [3] : *Șirul de aproximații succesive construit pornind de la aproximația inițială* $k_h^0 (h = 1, 2, 3, 4, 5)$ *este convergent dacă următoarele condiții sînt îndeplinite* :

1. *Matricea* $\left(\frac{\partial f_i}{\partial k^{(h)}}\right)_0$ *are o inversă* $\left(\frac{A_{i,j}}{\Delta}\right)$, *unde* $\frac{1}{|\Delta|}\left(\sum_{i,j=1}^{5} A_{i,j}^2\right)^{1/2} \leqslant B_0$;

2. $\sum_{h=1}^{5} (k_1^{(h)} - k_0^{(h)})^2 \leqslant \eta_0^2$;

3. $\sum_{i,j,h=1}^{5} \left(\frac{\partial^2 f_i}{\partial k^{(j)} \partial k^{(h)}}\right)^2 \leqslant K^2$, *se poate lua de asemenea* $K = 5\sqrt{5} \cdot L$, unde $\left|\frac{\partial^2 f_i}{\partial k^{(j)} \partial k^{(h)}}\right| \leqslant L$;

4. $h_0 = B_0 \cdot K \cdot \eta_0 \leqslant \frac{1}{2}$;

— *evaluarea erorilor* : metodele iterative convergente oferă posibilitatea de a obţine soluţia cu orice grad de precizie, calculînd aproximaţia k_h^n cu indicele n suficient de mare, precizia putînd fi impusă apriori.

Pe baza acestui algoritm s-a întocmit schema logică de desfăşurare a calculelor (fig. 5).

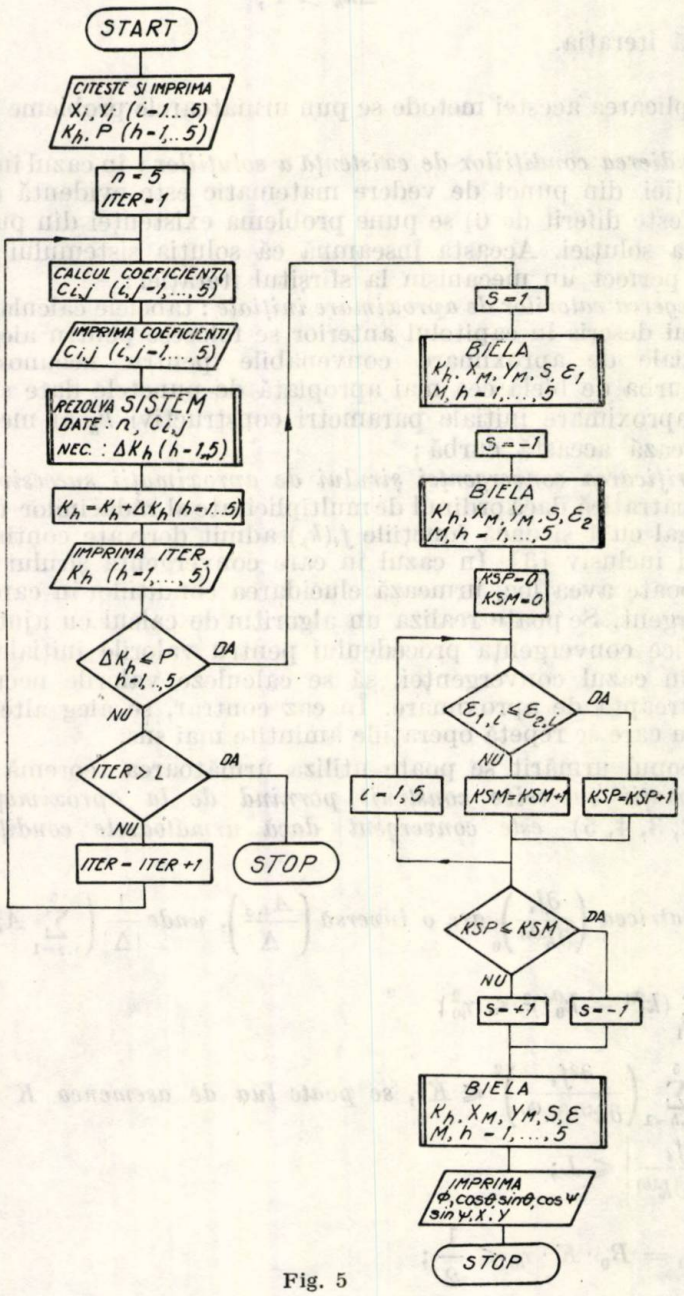


Fig. 5

SINTEZA MECANISMELOR PRIN METODA APROXIMATIILOR SUCCESIVE
CAZUL TRECERII PRIN CINCI PUNCTE DATE

PARAMETRI INITIALI K1=0.25 K2=0.50 K3=0.75 K4= 1.00 K5= 1.00

COORDONATELE PUNCTELOR

X	Y
1.79590	0.87653
1.19806	0.82433
0.74043	0.68436
0.59464	1.02686
1.19988	1.18817

-0.158D 01	0.166D 01	0.166D 01	0.125D 00	-0.833D-01	0.682D-02
-0.670D 00	0.328D 01	-0.344D 00	0.739D 00	-0.245D 00	-0.393D 00
-0.523D 00	0.140D 01	0.117D 01	0.161D 01	0.531D 00	-0.406D 00
-0.110D 01	0.353D 01	-0.106D-01	0.256D 01	0.179D 01	-0.772D 00
-0.927D 00	0.356D 01	0.125D 01	0.168D 01	0.139D 01	-0.332D 00

1 K1= 0.3493997D 00 K2= 0.5053131D 00 K3= 0.8771305D 00 K4= 0.6388503D 00 K5= 0.1136529D 01

-0.275D 01	0.144D 01	0.788D 00	-0.166D 01	-0.147D 01	-0.148D 00
-0.495D 00	0.155D 01	0.941D-01	0.314D 00	-0.478D 00	-0.104D 00
-0.490D 00	0.345D 00	0.787D 00	0.832D 00	0.714D 00	-0.136D 00
-0.986D 00	0.195D 01	-0.311D 00	0.818D 00	0.629D 00	-0.266D 00
-0.114D 01	0.240D 01	0.142D 01	0.726D 00	0.702D 00	-0.143D 00

2 K1= 0.5180169D 00 K2= 0.5253000D 00 K3= 0.9482952D 00 K4= 0.4824206D 00 K5= 0.1155412D 01

-0.380D 01	0.123D 01	0.142D 01	-0.165D 01	-0.218D 01	0.775D-01
-0.327D 00	0.696D 00	0.209D 00	0.179D 00	-0.262D 00	-0.178D-01
-0.525D 00	-0.261D 00	0.119D 00	0.380D 00	0.690D 00	-0.352D-03
-0.846D 00	0.936D 00	-0.684D 00	0.154D 00	-0.117D 00	-0.284D-01
-0.123D 01	0.160D 01	0.160D 01	0.528D 00	0.461D 00	0.916D-03

3 K1= 0.5146055D 00 K2= 0.5185964D 00 K3= 0.9662801D 00 K4= 0.4195362D 00 K5= 0.1181291D 01

-0.385D 01	0.127D 01	0.112D 01	-0.180D 01	-0.247D 01	0.112D-02
-0.183D 00	0.372D 00	0.161D 00	0.109D 00	-0.149D 00	-0.393D-02
-0.475D 00	-0.489D 00	0.192D 00	0.330D 00	0.947D 00	-0.597D-02
-0.763D 00	0.738D 00	-0.701D 00	0.102D 00	-0.230D 00	-0.633D-03
-0.121D 01	0.152D 01	0.150D 01	0.405D 00	0.360D 00	-0.204D-02

4 K1= 0.5233176D 00 K2= 0.5343696D 00 K3= 0.9616613D 00 K4= 0.3798389D 00 K5= 0.1202269D 01

-0.421D 01	0.142D 01	0.123D 01	-0.189D 01	-0.277D 01	0.208D-02
-0.159D 00	0.305D 00	0.220D 00	0.112D 00	-0.955D-01	0.909D-04
-0.436D 00	-0.565D 00	0.145D 00	0.254D 00	0.978D 00	-0.150D-02
-0.771D 00	0.753D 00	-0.719D 00	0.115D 00	-0.288D 00	0.739D-03
-0.135D 01	0.165D 01	0.165D 01	0.403D 00	0.332D 00	0.132D-03

5 K1= 0.5238234D 00 K2= 0.5355995D 00 K3= 0.9612682D 00 K4= 0.3786018D 00 K5= 0.1202049D 01

-0.423D 01	0.144D 01	0.124D 01	-0.190D 01	-0.279D 01	-0.902D-05
-0.165D 00	0.316D 00	0.225D 00	0.115D 00	-0.992D-01	-0.233D-05
-0.435D 00	-0.560D 00	0.133D 00	0.249D 00	0.963D 00	-0.104D-04
-0.772D 00	0.759D 00	-0.718D 00	0.117D 00	-0.289D 00	-0.252D-05
-0.136D 01	0.167D 01	0.167D 01	0.404D 00	0.334D 00	-0.119D-05

6 K1= 0.5238361D 00 K2= 0.5356170D 00 K3= 0.9612656D 00 K4= 0.3785692D 00 K5= 0.1202063D 01

Planşa I

CURBA DE BIELA PENTRU K1= 0.5238361 K2= 0.5356170 K3= 0.9612656 K4= 0.3785692 K5= 1.2020634 S=-1.0

FI	COS(TETA)	SIN(TETA)	COS(PSI)	SIN(PSI)	X	Y
15.0	0.9031207	-0.4293867	0.8361237	-0.5485411	1.8155909	0.8439412
20.0	0.7994921	-0.6006766	0.6169921	-0.7869693	1.9167054	0.6124667
25.0	0.7028018	-0.7113856	0.4038203	-0.9148383	1.9473474	0.4411936
30.0	0.6182469	-0.7859839	0.2065595	-0.9784340	1.9416305	0.3145488
35.0	0.5490159	-0.8358119	0.0314623	-0.9995049	1.9161487	0.2260934
40.0	0.4957478	-0.8684665	-0.1199289	-0.9927825	1.8807823	0.1696278
45.0	0.4575671	-0.8891751	-0.2488539	-0.9685410	1.8412572	0.1392309
50.0	0.4329051	-0.9014395	-0.3578026	-0.9337972	1.8006398	0.1296842
55.0	0.4199891	-0.9075291	-0.4496056	-0.8932272	1.7603570	0.1366279
60.0	0.4170897	-0.9088653	-0.5269768	-0.8498796	1.7208740	0.1565226
65.0	0.4226255	-0.9063044	-0.5923208	-0.8057022	1.6821241	0.1865281
70.0	0.4351932	-0.9003371	-0.6476825	-0.7619104	1.6437722	0.2243663
75.0	0.4535614	-0.8912250	-0.6947596	-0.7192420	1.6053731	0.2681935
80.0	0.4766515	-0.8790923	-0.7349481	-0.6781234	1.5664593	0.3164999
85.0	0.5035142	-0.8639869	-0.7693850	-0.6387851	1.5265948	0.3680264
90.0	0.5333086	-0.8459207	-0.7989978	-0.6013338	1.4853990	0.4217070
95.0	0.5652833	-0.8248968	-0.8245400	-0.5658036	1.4425633	0.4766203
100.0	0.5987615	-0.8009274	-0.8466257	-0.5321889	1.3978559	0.5319571
105.0	0.6331307	-0.7740449	-0.8657562	-0.5004659	1.3511213	0.5869980
110.0	0.6678313	-0.7443126	-0.8823405	-0.4706115	1.3022846	0.6410905
115.0	0.7023538	-0.7118280	-0.8967125	-0.4426133	1.2513460	0.6936405
120.0	0.7362306	-0.6767307	-0.9091436	-0.4164826	1.1983848	0.7440967
125.0	0.7690368	-0.6392044	-0.9198528	-0.3922635	1.1435562	0.7919471
130.0	0.8003856	-0.5994854	-0.9290130	-0.3700471	1.0870984	0.8367067
135.0	0.8299314	-0.5578655	-0.9367557	-0.3499840	1.0293337	0.8779148
140.0	0.8573682	-0.5147036	-0.9431721	-0.3323046	0.9706820	0.9151238
145.0	0.8824354	-0.4704335	-0.9483112	-0.3173414	0.9116700	0.9478949
150.0	0.9049206	-0.4255804	-0.9521734	-0.3055581	0.8529547	0.9757883
155.0	0.9246699	-0.3807697	-0.9546980	-0.2975765	0.7953390	0.9983620
160.0	0.9415975	-0.3367404	-0.9557444	-0.2941984	0.7397970	1.0151729
165.0	0.9557030	-0.2943326	-0.9550657	-0.2963943	0.6874708	1.0258028
170.0	0.9670863	-0.2544484	-0.9522795	-0.3052274	0.6396375	1.0299120
175.0	0.9759597	-0.2179510	-0.9468495	-0.3216770	0.5975963	1.0273357
180.0	0.9826402	-0.1855213	-0.9380984	-0.3463687	0.5624896	1.0182029
185.0	0.9875177	-0.1575083	-0.9252707	-0.3793074	0.5350947	1.0030216
190.0	0.9909991	-0.1338683	-0.9076343	-0.4197620	0.5157016	0.9826678
195.0	0.9934550	-0.1142243	-0.8845827	-0.4663834	0.5041368	0.9582633
200.0	0.9951856	-0.0980085	-0.8556953	-0.5174801	0.4999069	0.9310062
205.0	0.9964143	-0.0846081	-0.8207509	-0.5712863	0.5023663	0.9020365
210.0	0.9972983	-0.0734576	-0.7797038	-0.6261484	0.5108409	0.8723601
215.0	0.9979447	-0.0640811	-0.7326549	-0.6806001	0.5246914	0.8428331
220.0	0.9984253	-0.0560959	-0.6798178	-0.7333809	0.5433348	0.8141710
225.0	0.9987888	-0.0492027	-0.6214982	-0.7834156	0.5662416	0.7869714
230.0	0.9990678	-0.0431690	-0.5580725	-0.8297922	0.5929267	0.7617340
235.0	0.9992848	-0.0378143	-0.4899789	-0.8717342	0.6229358	0.7388798
240.0	0.9994554	-0.0329977	-0.4177018	-0.9085841	0.6558380	0.7187626
245.0	0.9995907	-0.0286074	-0.3417699	-0.9397836	0.6912145	0.7016811
250.0	0.9996985	-0.0245536	-0.2627429	-0.9648659	0.7286568	0.6878839
255.0	0.9997844	-0.0207625	-0.1812119	-0.9834441	0.7677587	0.6775761
260.0	0.9998525	-0.0171721	-0.0977867	-0.9952074	0.8081184	0.6709213
265.0	0.9999057	-0.0137283	-0.0130978	-0.9999142	0.8493331	0.6680460
270.0	0.9999461	-0.0103823	0.0722167	-0.9973889	0.8910020	0.6690408
275.0	0.9999748	-0.0070883	0.1575096	-0.9875174	0.9327232	0.6739628
280.0	0.9999928	-0.0038008	0.2421325	-0.9702432	0.9740947	0.6828375
285.0	0.9999999	-0.0004719	0.3254438	-0.9455614	1.0147153	0.6956618
290.0	0.9999956	0.0029512	0.4068065	-0.9135143	1.0541802	0.7124059
295.0	0.9999787	0.0065306	0.4856007	-0.8741808	1.0920831	0.7330186
300.0	0.9999465	0.0103431	0.5612199	-0.8276668	1.1280071	0.7574307
305.0	0.9998950	0.0144886	0.6330822	-0.7740844	1.1615209	0.7855650
310.0	0.9998175	0.0191038	0.7006260	-0.7135286	1.1921602	0.8173461
315.0	0.9997026	0.0243861	0.7633164	-0.6460249	1.2194024	0.8527227
320.0	0.9995306	0.0306366	0.8206362	-0.5714510	1.2426113	0.8917000
325.0	0.9992644	0.0383478	0.8720791	-0.4893648	1.2609280	0.9344104
330.0	0.9988281	0.0483987	0.9171065	-0.3986421	1.2730166	0.9812581
335.0	0.9980404	0.0625718	0.9550326	-0.2965007	1.2763891	1.0332989
340.0	0.9963533	0.0853232	0.9845331	-0.1751987	1.2650463	1.0934795
345.0	0.9908949	0.1346378	0.9999985	-0.0017566	1.2147135	1.1738284

Planşa II

Se calculează coeficienții sistemului pentru treapta întîi de aproximare cu valorile inițiale alese și pentru coordonatele celor cinci puncte date; cu ajutorul unei subrutine se rezolvă sistemul liniar prin metoda Gauss și se obțin corecțiile pe prima treaptă de aproximare, și se calculează valorile necunoscutelor pe prima treaptă de aproximare. Se trece apoi la treaptă următoare de aproximare. Pe fiecare treaptă se compară fiecare din corecțiile obținute cu precizia P impusă. Iterațiile încetează atunci cînd toate corecțiile obținute în aceeași treaptă de aproximare sînt mai mici sau egale cu P, rezultatele obținute fiind tocmai soluțiile sistemului (40), respectiv parametrii constructivi ai mecanismului care generează curba de bielă care trece prin punctele date. Cu ajutorul unei subrutine de calcul a curbei de bielă, se testează dacă punctele date se află pe curba de bielă a mecanismului direct sau a celui conjugat. Această testare are loc prin determinarea erorii minime rezultate prin înlocuirea coordonatelor date în ecuația curbei de bielă obținută cu valorile rezultate din rezolvarea sistemului.

Pe baza acestei scheme logice s-a transpus algoritmul de calcul în limbaj FORTRAN pentru efectuarea calculelor pe un calculator electronic numeric IBM—360/30.

Procedeul descris mai sus poate să nu conveargă în cadrul unui număr stabilit de trepte de aproximare. Cauzele acestei comportări, care este indicată prin mesaj de eroare, pot fi:

— s-au stabilit prea puține trepte de aproximare;

— aproximația inițială este destul de depărtată de orice rădăcină;

— eroarea P este prea mică în raport cu erorile de rotunjire;

— rădăcina de determinat este de ordin de multiplicitate mai mare decît unu.

În plus, procedeul eșuează și se trece la alegerea altor valori inițiale, dacă la oricare treaptă de aproximare derivata funcției devine 0. Aceasta este, de asemenea, indicată de către un mesaj de eroare.

Exemplu numeric

În planșa I sînt prezentate rezultatele obținute pentru sinteza unui mecanism patrulater articulat care trebuie să aproximeze o curbă dată prin cele cinci puncte indicate.

Pentru exemplul considerat rezultatele au fost obținute după numai șase iterații, avînd în vedere precizia impusă. Prentru fiecare iterație sînt afișate valorile coeficienților $C_{ih} = \frac{\partial f_i}{\partial k_h}$ $(i, h = 1, 2, \ldots, 5)$ din ecuațiile (40), precum și valorile rezultate ale parametrilor $k_h (h = 1, 2, \ldots, 5)$, utilizate ca valori inițiale în treapta următoare de iterație.

În planșa a II-a sînt date, sub formă tabelară, rezultatele analizei cinematice a mecanismului obținut.

Primită la redacție la 25 octombrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. CHR. PELECUDI, *Bazele analizei mecanismelor*, Editura Academiei, Bucureşti, 1967.
2. I. I. ARTOBOLEVSKI, N. I. LEVITSKI, S. A. CERKUDINOV, *Sintez ploskih mehanizmov*, Gos. Izd. Fiz.-Mat. Literaturi, Moskva, 1959.
3. BÉLA JANKÓ, *Rezolvarea ecuaţiilor operaţionale neliniare în spaţii Banach*, Editura Academiei, Bucureşti, 1969.

STUDIU COMPARATIV AL VITEZELOR ŞI DEBITELOR DIN CONDUCTA PĂTRATĂ ŞI CIRCULARĂ PENTRU MIŞCAREA STRATIFICATĂ

de C. CRĂCIUN, D. HOMENTCOVSCHI, V. MASGRAS

Institutul politehnic Bucureşti

Pentru curgerea stratificată a două lichide vîscoase, se calculează şi se compară vitezele în puncte corespondente din conducta de secţiune pătrată şi circulară. Cunoscînd creşterile de debit produse prin procedeul de injecţie în conducta pătrată ca şi factorii care determină fenomenul, se apreciază că şi în conducta circulară are loc o creştere de debit importantă. Evaluarea corectă a creşterii necesită în prealabil determinarea vitezelor sub o formă care să permită calculul debitelor.

1. INTRODUCERE

Lucrări anterioare [1], [2] au demonstrat că injecţia unui fluid mai puţin vîscos (de exemplu apă) într-un sistem — plăci paralele sau conductă — care transportă un lichid cu viscozitate mare (de exemplu petrol) poate duce la creşterea vitezelor şi debitului de lichid transportat sub acelaşi gradient de presiune. Problema a fost complet tratată, analitic şi cu exemple numerice, pentru conducta de secţiune dreptunghiulară şi în particular de secţiune pătrată [2].

Din punct de vedere practic prezintă interes curgerea în conducta de secţiune circulară. Soluţiile pentru viteze sub forma unor integrale Fourier [3] sînt incomode pentru aplicaţii numerice şi nu permit un calcul analitic al debitelor. Totuşi, calculul vitezelor în anumite puncte caracteristice din domeniul curgerii şi compararea lor cu vitezele în puncte corespondente din conducta pătrată, cu stratificare asemenea, poate să conducă la unele concluzii asupra mărimii debitului transportat, deci asupra eficacităţii procedeului de injecţie în conducta circulară.

2. MIŞCAREA UNUI SINGUR FLUID ÎN CONDUCTA PĂTRATĂ ŞI ÎN CEA CIRCULARĂ

Vom numi curgere de referinţă curgerea fluidului de bază în întreaga secţiune. Fie aceasta fluidul de viscozitate μ_2.

Pentru conducta de secţiune pătrată de latură $2a$ (fig. 1*a*) cînd curgerea are loc sub acţiunea gradientului de presiune $\frac{\partial p}{\partial z} = P$,

viteza se scrie [2]:

$$v_{\blacksquare}(x, y) = \frac{2K_2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n y}{\operatorname{ch} \lambda_n a} \right] \cos \lambda_n x, \tag{1}$$

unde

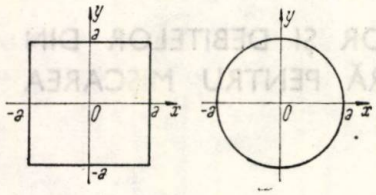


Fig. 1.

$$K_2 = -\frac{1}{\mu_2} P. \tag{2}$$

Valorile proprii λ_n au expresia

$$\lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{2a}. \tag{3}$$

Pe axa de simetrie verticală, distribuţia de viteze apare sub forma

$$v_{\blacksquare}(0, y) = K_2 a^2 \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi}{2} \frac{y}{a}}{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi}{2}} \right]. \tag{4}$$

Debitul de referinţă este

$$Q_{\blacksquare} = K_2 a^2 \frac{128}{\pi^4} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^5} \operatorname{th} \frac{(2n+1)\pi}{2} \right] \tag{5}$$

sau numeric

$$Q_{\blacksquare} = 0{,}562308\, K_2 a^4. \tag{5'}$$

Pentru conducta de secţiune circulară de diametru $2a$ (fig. 1*b*) viteza în curgerea de referinţă se scrie:

$$v_{\bullet}(x, y) = \frac{K_2}{4}(a^2 - x^2 - y^2) \tag{6}$$

Pe diametrul vertical ea are forma

$$v_{\bullet}(0, y) = K_2 a^2 \frac{1}{4} \left[1 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right]. \tag{7}$$

Debitul de referinţă este

$$Q_{\bullet} = K_2 a^4 \frac{\pi}{8}. \tag{8}$$

Pentru a calcula repartiţiile de viteze pe axa de simetrie verticală cu formulele (4) sau (7), avînd în vedere simetria în raport cu centrul conductei, e suficient să se considere intervalul $[0, a]$. S-au ales punctele echidistante pentru care raportul $\frac{y}{a}$ ia valorile din prima coloană a tabelei 1.

Pornind de la formula (4) s-a evaluat la calculator raportul dintre viteza $v_{\blacksquare}$ și factorul K_2a^2. Au rezultat valorile înscrise în a doua coloană a tabelei 1.

În aceleași puncte de pe diametrul vertical au fost calculate cu formula (7) valorile vitezei raportată la factorul K_2a^2 în conducta circulară. Ele au fost înscrise în coloana a treia a tabelei 1.

În orice punct din interval viteza în conducta pătrată este superioară celei din conducta circulară. Raportul apare în ultima coloană a tabelei 1.

Tabela 1

Viteze în curgerea de referință în conducta pătrată și circulară

$\frac{y}{a}$	$\frac{v_{\blacksquare}}{K_2a^2}$	$\frac{v_{\bullet}}{K_2a^2}$	$\frac{v_{\blacksquare}}{v_{\bullet}}$
1	0	0	1
0,9	0,0627	0,0475	1,320
0,8	0,1162	0,0900	1,291
0,7	0,1613	0,1275	1,265
0,6	0,1988	0,1600	1,243
0,5	0,2294	0,1875	1,223
0,4	0,2535	0,2100	1,207
0,3	0,2718	0,2275	1,195
0,2	0,2846	0,2400	1,186
0,1	0,2922	0,2475	1,181
0	0,2947	0,2500	1,179

În figura 2 au fost trasate distribuțiile de viteze pe axa de simetrie verticală în cele două conducte. Debitele se află în raportul

$$\frac{Q_{\blacksquare}}{Q_{\bullet}} = 1{,}432.$$

Debitul în conducta pătrată este mai mare nu numai datorită vitezelor mai mari ci și datorită secțiunii de curgere care este mai mare ($A_{\blacksquare}/A_{\bullet}=4/\pi=1{,}273$).

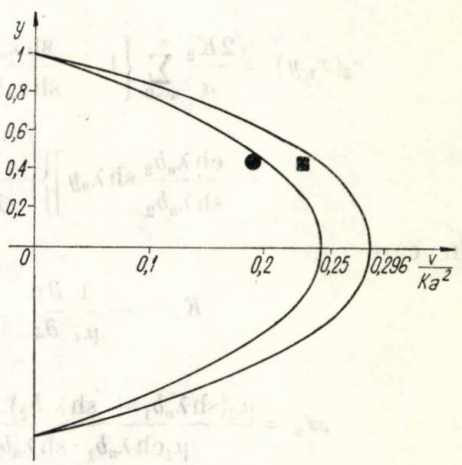


Fig. 2

3. CURGEREA STRATIFICATĂ ÎN CONDUCTA PĂTRATĂ

Să presupunem că în conducta de secțiune pătrată în care curge lichidul de viscozitate μ_2 se injectează un al doilea lichid de viscozitate μ_1, mai mică. Fie b_1 înălțimea stratului ocupat de lichidul injectat, care,

pentru a produce o creştere a debitului transportat, trebuie să fie suficient de mică. Lichidului iniţial îi revine înălţimea b_2 (figura 3*a*), astfel încît

$$b_1 + b_2 = 2a. \tag{9}$$

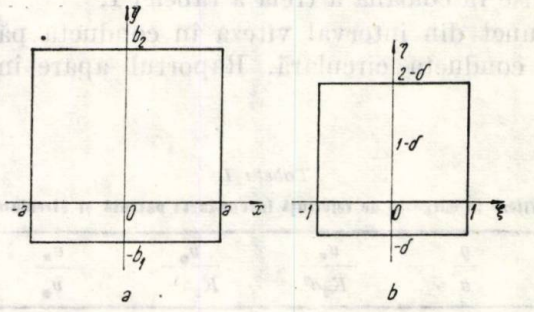


Fig. 3

Pentru curgerea celor două lichide stratificate, sub acelaşi gradient de presiune P, vitezele în domeniile corespunzătoare se scriu [2]:

$$v_1(x, y) = \frac{2K_1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 + \frac{\operatorname{sh} \lambda_n y}{\operatorname{sh}\ \lambda_n b_1} - \mathscr{B}_n \left[\operatorname{ch} \lambda_n y + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{\operatorname{ch}\ \lambda_n b_1}{\operatorname{sh} \lambda_n b_1} \operatorname{sh}\ \lambda_n y \right] \right\} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos\ \lambda_n x, \tag{10}$$

$$v_2(x, y) = \frac{2K_2}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sh} \lambda_n y}{\operatorname{sh} \lambda_n b_2} - \mathscr{A}_n \left[\operatorname{ch} \lambda_n y - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n b_2}{\operatorname{sh} \lambda_n b_2} \operatorname{sh} \lambda_n y \right] \right\} \frac{(-1)^n}{\lambda_n^3} \cos\ \lambda_n x, \tag{11}$$

în care

$$K_i = -\frac{1}{\mu_i} \frac{\partial p}{\partial z} \qquad (i = 1, 2), \tag{12}$$

$$\mathscr{A}_n = \frac{\mu_2(\operatorname{sh} \lambda_n b_1 + \operatorname{sh} \lambda_n b_2) + (\mu_1 - \mu_2) \operatorname{ch} \lambda_n b_1 \cdot \operatorname{sh} \lambda_n b_2}{\mu_1 \operatorname{ch} \lambda_n b_1 \cdot \operatorname{sh} \lambda_n b_2 + \mu_2 \operatorname{ch} \lambda_n b_2 \cdot \operatorname{sh} \lambda_n b_1}, \tag{13}$$

$$\mathscr{B}_n = \frac{\mu_1(\operatorname{sh} \lambda_n b_1 + \operatorname{sh} \lambda_n b_2) + (\mu_2 - \mu_1) \operatorname{sh} \lambda_n b_1 \cdot \operatorname{ch} \lambda_n b_2}{\mu_1 \operatorname{ch} \lambda_n b_1 \cdot \operatorname{sh} \lambda_n b_2 + \mu_2 \operatorname{ch} \lambda_n b_2 \cdot \operatorname{sh} \lambda_n b_1}. \tag{14}$$

Să facem schimbarea de variabile

$$\frac{x}{a} = \xi, \qquad \frac{y}{a} = \eta. \tag{15}$$

Stratificarea poate fi caracterizată de parametrul

$$\delta = \frac{b_1}{a}. \tag{16}$$

Dacă ţinem seama şi de (9), atunci configuraţia în secţiunea conductei este cea din figura 3 *b*.

Să mai notăm cu m raportul supraunitar al viscozităţilor dinamice

$$m = \frac{\mu_2}{\mu_1}. \tag{17}$$

Pe axa de simetrie verticală repartiţiile de viteze sînt

$$v_1(0, \eta) = K_1 a^2 \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left\{ 1 + \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2} \eta}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2} \delta} - \right.$$

$$\left. - \mathscr{B}_n \left[\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi}{2} \eta + \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi}{2} \delta}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2} \delta} \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2} \eta \right] \right\} \tag{18}$$

pentru $\quad -\delta \leqslant \eta \leqslant 0,$

$$v_2(0, \eta) = K_2 a^2 \frac{16}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left\{ 1 - \frac{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2} \eta}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2} (2-\delta)} - \right.$$

$$\left. - \mathscr{A}_n \left[\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi}{2} \eta - \frac{\operatorname{ch} \frac{(2n+1)\pi}{2} (2-\delta)}{\operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2} (2-\delta)} \operatorname{sh} \frac{(2n+1)\pi}{2} \eta \right] \right\} \tag{19}$$

pentru $\quad 0 \leqslant \eta \leqslant 2 - \delta,$

cu

$$\mathcal{A}_n = \frac{m\left[\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}\delta+\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}(2-\delta)\right]-(m-1)\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi}{2}\delta\cdot\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}(2-\delta)}{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi}{2}\delta\cdot\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}(2-\delta)+m\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi}{2}(2-\delta)\cdot\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}\delta}, \quad (20)$$

$$\mathcal{B}_n = \frac{\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}\delta+\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}(2-\delta)+(m-1)\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi}{2}(2-\delta)\cdot\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}\delta}{\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi}{2}\delta\cdot\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}(2-\delta)+m\operatorname{ch}\frac{(2n+1)\pi}{2}(2-\delta)\cdot\operatorname{sh}\frac{(2n+1)\pi}{2}\delta}. \quad (21)$$

S-a programat la calculator formula (19) cu coeficienţii (20), s-au introdus valori pentru parametrul de stratificare δ (0,2 şi 0,4) şi pentru raportul viscozităţilor m(1 ; 2 ; 20 ; 50 ; 100). Rezultatele se găsesc în tabelele 2 şi 3.

Tabela 2

Valori ale vitezei $v_2(0, \eta)$ raportate la factorul K_2a^2 pentru $\delta = 0{,}2$

	η \ m	1 ($v_\blacksquare$)	2	20	50	100
	1,8	0	0	0	0	0
	1,7	0,06264	0,06410	0,06890	0,06969	0,06999
	1,6	0,11614	0,11908	0,12881	0,13042	0,13102
	1,5	0,16126	0,16577	0,18067	0,18312	0,18404
	1,4	0,19876	0,20495	0,22537	0,22874	0,23000
	1,3	0,22931	0,23732	0,26378	0,26814	0,26977
	1,2	0,25349	0,26352	0,29666	0,30213	0,30418
	1,1	0,27178	0,28409	0,32472	0,33142	0,33394
	1	0,28458	0,29945	0,34858	0,35668	0,35972
	0,9	0,29215	0,30995	0,36876	0,37846	0,38210
O	0,8	0,29465	0,31581	0,38574	0,39727	0,40160
	0,7	0,29215	0,31716	0,39989	0,41354	0,41866
	0,6	0,28458	0,31403	0,41155	0,42764	0,43369
	0,5	0,27178	0,30635	0,42097	0,43989	0,44700
	0,4	0,25349	0,29395	0,42834	0,45055	0,45889
	0,3	0,22931	0,27655	0,43379	0,45981	0,46958
	0,2	0,19876	0,25377	0,43738	0,46781	0,47924
	0,1	0,16126	0,22513	0,43911	0,47464	0,48799
S	0	0,11614	0,19005	0,43886	0,48028	0,49585

Distribuţia de valori pentru $m = 1$ coincide cu cea din cazul curgerii unui singur lichid calculată cu formula (4) (coloana 2 din tabela 1). Decalarea valorilor între tabela 1 pe de o parte şi 2 şi 3 pe de alta se datorează schimbării originii axelor de coordonate : în tabela 1 origina este centrul conductei în timp ce în tabelele 2 şi 3 ea se află în mijlocul liniei de separare. Putem afirma deci că valorile din tabelele 2 şi 3 pentru $m = 1$ reprezintă viteza $v_\blacksquare$ din curgerea de referinţă raportată la K_2a^2.

Pentru a urmări creşterea vitezei fluidului transportat μ_2 în mişcarea stratificată (cu injecţie) faţă de viteza lui din curgerea de referinţă (singur

Tabela 3

Valori ale vitezei $v_2(0,\eta)$ raportate la factorul K_2a^2 pentru $\delta=0{,}4$

η \ m	1 ($v_{\blacksquare}$)	2	20	50	100
1,6	0	0	0	0	0
1,5	0,06264	0,06520	0,07107	0,07178	0,07204
1,4	0,11614	0,12132	0,13320	0,13464	0,13516
1,3	0,16126	0,16919	0,18738	0,18959	0,19037
1,2	0,19876	0,20964	0,23457	0,23760	0,23868
1,1	0,22931	0,24339	0,27568	0,27961	0,28101
1	0,25349	0,27112	0,31156	0,31648	0,31823
0,9	0,27178	0,29339	0,34297	0,34899	0,35114
0,8	0,28458	0,31069	0,37059	0,37787	0,38046
0,7	0,29215	0,32337	0,39504	0,40375	0,40686
O 0,6	0,29465	0,33173	0,41687	0,42722	0,43091
0,5	0,29215	0,33593	0,43654	0,44878	0,45314
0,4	0,28458	0,33606	0,45447	0,46888	0,47402
0,3	0,27178	0,33209	0,47098	0,48789	0,49392
0,2	0,25349	0,32390	0,48632	0,50612	0,51318
0,1	0,22931	0,31125	0,50067	0,52379	0,53203
S 0	0,19876	0,29379	0,51406	0,54099	0,55059

în întreaga conductă) am ales două puncte caracteristice : mijlocul S al liniei de separare ($\xi = 0$, $n = 0$) și centrul 0 al conductei ($\xi = 0$, $\eta = 1 - \delta$). În cele două tabele liniile corespunzătoare au fost marcate cu literele S și O care vor apare ca indici superiori la viteze.

Pentru studiul comparativ al vitezelor în cele două puncte caracteristice la trei valori ale parametrului m s-a considerat cazul parametrului de stratificare $\delta = 0{,}2$. În tabela 4 se găsesc valorile raportului între viteza din curgerea stratificată și cea din curgerea de referință în punctele caracteristice.

Tabela 4

Efectele injecției cu $\delta=0{,}2$ la conducta pătrată

m	$\frac{v_2^{(0)}}{v_{\blacksquare}^{(0)}}$	$\frac{v_2^{(S)}}{v_{\blacksquare}^{(S)}}$	$\frac{Q_2}{Q_{\blacksquare}}$
20	1,309	3,779	1,399
50	1,348	4,135	1,453
100	1,363	4,269	1,474

Se constată creșteri foarte mari ale vitezei în mijlocul liniei de separare (coloana trei). În centrul conductei creșterile sînt moderate. În ultima coloană apare raportul între debitul de lichid transportat cu injecție și debitul de referință [2]. La toate valorile parametrului m creșterile de debit sînt apreciabile. Dar o corelație între creșterile de viteză și cele de debit nu poate fi stabilită. Într-adevăr, să alegem drept caz test curgerea cu $\delta = 0{,}2$ și $m = 20$. Deși vitezele au creșteri spectaculoase care ajung la 377,9% în mijlocul liniei de separare, creșterea debitului transportat este de numai 39,9%. Rezultatului i se poate da o interpretare fizică imediată. În primul rînd creșterea de viteză în punc-

tul S reprezintă creşterea maximă. În orice alt punct din domeniu ea este mai mică atingînd în centrul conductei numai 30,9% şi tinzînd la zero cînd ne apropiem de pereţi. În al doilea rînd, prin introducerea lichidului de viscozitate mai mică, secţiunea activă de transport a lichidului de viscozitate μ_2 se reduce cu o fişie de înălţime b_1. La stabilirea debitului transportat concură cele două efecte opuse : creşterea vitezei şi reducerea secţiunii active. Rezultatele sînt greu previzibile fără calcul.

Menţionăm că la $m = 20$, creşterea maximă a debitului transportat are loc pentru o valoare mai mică a parametrului de stratificare decît $\delta = 0{,}2$ şi anume $\delta^* = 0{,}14$ cînd creşterea atinge 41,1% [2].

În cazul $\delta = 0{,}2$, $m = 100$ creşterile de viteză sînt mai mari decît în cazul test. Cum secţiunea activă de transport rămîne aceiaşi, creşterea debitului transportat este de 47,4%.

4. CURGEREA STRATIFICATĂ ÎN CONDUCTA CIRCULARĂ

Să considerăm curgerea a două lichide total stratificate sub acelaşi gradient de presiune în conducta circulară de diametru $2a$ (fig. 4a). Ca parametru de stratificare poate fi luat raportul între înălţimea maximă h_1 a stratului injectat şi rază

$$\delta = \frac{h_1}{a} \tag{22}$$

sau unghiul α, legat de aceasta prin relaţia

$$\cos\alpha = 1 - \delta. \tag{23}$$

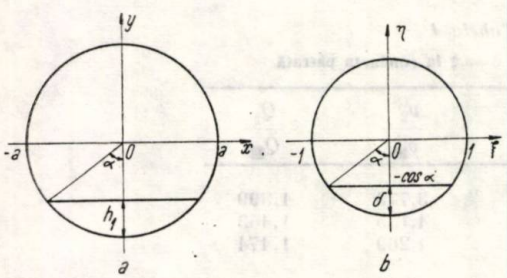


Fig 4.

Dacă se face şi aici schimbarea de variabile (15) se ajunge la configuraţia din figura 4b deci la rezolvarea problemei la limită pentru cercul unitate. În lucrarea [3] vitezele au fost obţinute sub forma unor integrale Fourier.

Spre deosebire de lucrarea citată am notat

$$v_1(\xi, \eta) = K_1\left\{\frac{1}{4}(1-\xi^2-\eta^2) + V_1(\xi, \eta)\right\}, \tag{24}$$

$$v_2(\xi, \eta) = K_2\left\{\frac{1}{4}(1-\xi^2-\eta^2) + V_2(\xi, \eta)\right\}, \tag{25}$$

şi am determinat „funcţiile corecţie" V_1 şi V_2.

Pe diametrul vertical avem

$$v_1(0,\eta) = K_1\left\{\frac{1}{4}(1-\eta^2)-(m-1)\sin^2\alpha\int_0^\infty \frac{u}{\operatorname{sh}\pi u}\,\frac{\dfrac{\operatorname{sh}(\pi-\alpha-\sigma)u}{\operatorname{ch}\alpha u}}{m\operatorname{th}\alpha u+\operatorname{th}(\pi-\alpha)u}\,du\right. \quad (26)$$

$$\text{pentru} \quad -1 \leqslant \eta \leqslant -\cos\alpha,$$

$$v_2(0,\eta) = K_2\left\{\frac{1}{4}(1-\eta^2)+(m-1)\sin^2\alpha\int_0^\infty \frac{u}{\operatorname{sh}\pi u}\,\frac{\dfrac{\operatorname{sh}(\sigma-\alpha)u}{\operatorname{ch}(\pi-\alpha)u}}{m\operatorname{th}\alpha u+\operatorname{th}(\pi-\alpha)u}\,du\right.$$

$$\text{pentru} \quad -\cos\alpha \leqslant \eta \leqslant 1. \quad (27)$$

În aceste formule s-a notat cu σ funcţia de η

$$\sigma = \operatorname{arc\,tg}\frac{2\eta\sin\alpha+\sin 2\alpha}{\eta^2+2\eta\cos\alpha+\cos 2\alpha}. \quad (28)$$

Centrului conductei $\eta = 0$ îi corespunde din (28) $\sigma^{(0)} = 2\alpha$, iar mijlocului liniei de separare $\eta = -\cos\alpha$, $\sigma^{(S)} = \pi$. Astfel, din (27) deducem

$$v_2^{(0)} = K_2\left\{\frac{1}{4}+(m-1)\sin^2\alpha\int_0^\infty \frac{u}{\operatorname{sh}\pi u}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha u}{\operatorname{ch}(\pi-\alpha)u\,[m\operatorname{th}\alpha u+\operatorname{th}(\pi-\alpha)u]}\,du\right\}. \quad (29)$$

Termenul cu integrala este tocmai $V_2(0,0) = V_2^{(0)}$ şi a fost evaluat la calculator pentru diferite stratificări (valori δ sau α) şi diferite valori ale parametrului m. Rezultatele se găsesc în tabela 5.

Tabela 5

Funcţia $V_2^{(0)}$ – corecţia în centrul conductei

		m			
δ	α	2	20	50	100
0,1	0,4510	0,003900	0,020070	0,023485	0,024847
0,2	0,6435	0,010307	0,043415	0,048870	0,050925
0,3	0,7954	0,017963	0,067349	0,074410	0,076999
0,4	0,9273	0,026427	0,091341	0,099759	0,102794
0,5	1,0472	0,035433	0,115126	0,124729	0,128152
0,8	1,3695	0,064063	0,183752	0,196232	0,200591
1	1,5708	0,083301	0,226104	0,240104	0,244956

Corecţia $V_2^{(S)}$ nu s-a evaluat pornind de la (27) cu $\sigma = \sigma^{(S)} = \pi$. Ea a rezultat din calculul vitezei în punctele liniei de separare

$$v_2(\xi,-\cos\alpha) = K_2\left\{\frac{1}{4}\sin^2\alpha+(m-1)\sin^2\alpha\int_0^\infty \frac{u}{\operatorname{sh}\pi u}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\operatorname{th}(\pi-\alpha)u}{m\operatorname{th}\alpha u+\operatorname{th}(\pi-\alpha)u}\cos\left(u\cdot\ln\frac{\sin\alpha-\xi}{\sin\alpha+\xi}\right)du\right\}. \quad (30)$$

Al doilea termen notat $V_2(\xi)$ a fost evaluat la calculator în diferite puncte ale segmentului C_0. Ca valori ξ s-au luat abscisele punctelor unei diviziuni a liniei de separare $[-\sin\alpha, \sin\alpha]$ în opt intervale echidistante. La capete funcţia este nulă. În plus, datorită simetriei s-au considerat numai punctele 0, $\frac{1}{4}\sin\alpha$, $\frac{1}{2}\sin\alpha$ şi $\frac{3}{4}\sin\alpha$. Rezultatele apar în tabela 6. Valorile $V_2^{(S)}$ se citesc în coloana a doua deoarece $V_2^{(S)} = V_2(0)$.

Tabela 6

Valorile funcţiei corecţie V_2 în puncte ale liniei de separare

Stratificarea	m \ ξ	0	$\frac{1}{4}\sin\alpha$	$\frac{1}{2}\sin\alpha$	$\frac{3}{4}\sin\alpha$
$\delta = 0{,}1$ $\alpha = 0{,}4510$	2	0,030902	0,029340	0,024510	0,015744
	20	0,150592	0,144648	0,125841	0,089602
	50	0,174633	0,168035	0,147100	0,106456
	100	0,184130	0,177290	0,155564	0,113268
$\delta = 0{,}2$ $\alpha = 0{,}6435$	2	0,051120	0,048535	0,040563	0,026178
	20	0,207322	0,198671	0,171532	0,120263
	50	0,232151	0,222732	0,193125	0,136904
	100	0,241450	0,231755	0,201258	0,143240
$\delta = 0{,}3$ $\alpha = 0{,}7954$	2	0,065726	0,062344	0,051955	0,033386
	20	0,239867	0,229258	0,196224	0,134987
	50	0,264124	0,252671	0,216958	0,150494
	100	0,272983	0,261230	0,224565	0,156232
$\delta = 0{,}4$ $\alpha = 0{,}9273$	2	0,076209	0,072195	0,059912	0,038180
	20	0,258475	0,246383	0,208986	0,140857
	50	0,281671	0,268684	0,228470	0,154982
	100	0,290013	0,276709	0,235501	0,160116
$\delta = 0{,}5$ $\alpha = 1{,}0472$	2	0,083362	0,078856	0,065116	0,041049
	20	0,267420	0,254226	0,213662	0,140943
	50	0,289315	0,275189	0,231727	0,153624
	100	0,297104	0,282653	0,238173	0,158175
$\delta = 0{,}8$ $\alpha = 1{,}3695$	2	0,089340	0,084081	0,068206	0,041185
	20	0,255735	0,241129	0,196901	0,120980
	50	0,273049	0,257502	0,210413	0,129510
	100	0,279094	0,263219	0,215135	0,132498
$\delta = 1$ $\alpha = 1{,}57079$	2	0,083302	0,078091	0,062457	0,036350
	20	0,226107	0,211962	0,169527	0,098664
	50	0,240107	0,225087	0,180024	0,104774
	100	0,244959	0,229635	0,183662	0,106891

Pentru comparaţie cu conducta de secţiune pătrată s-a considerat stratificarea $\delta = 0{,}2$ şi s-au calculat în punctele caracteristice vitezele $v_2^{(0)}$ şi $v_2^{(S)}$. Ele s-au raportat la vitezele din curgerea de referinţă (cazul $m = 1$). De exemplu, pentru $m = 20$, din tabela 5, $V_2^{(0)} = 0{,}043415$. După (29) $v_2^{(0)} = K_2(0{,}25 + 0{,}043415) = K_2 \cdot 0{,}293415$, în timp ce pentru curgerea de referinţă $v^{(0)} = K_2 \cdot 0{,}25$. În mod analog, pentru mijlocul liniei de separare, din tabela 6, $V_2^{(S)} = 0{,}207322$. Din formula (27) avem $v_2^{(S)} = K_2\left\{\frac{1}{4}\,0{,}36 + 0{,}207322\right\} = K_2 \cdot 0{,}297322$, pe cînd în curgerea de referinţă $v_\bullet^{(S)} = K_2 \cdot 0{,}09$. Vitezele ca şi rapoartele lor se găsesc în tabela 7.

Tabela 7

Efectele injecției cu $\delta = 0{,}2$ asupra vitezei în conducta circulară

m	$v_2^{(0)}$	$\frac{v_2^{(0)}}{v_{\bullet}^{(0)}}$	$v_2^{(S)}$	$\frac{v_2^{(S)}}{v_{\bullet}^{(S)}}$
1	0,2500	1	0,0900	1
20	0,2934	1,174	0,2973	3,303
50	0,2989	1,196	0,3222	3,580
100	0,3009	1,204	0,3315	3,683

Să considerăm cazul test ($\delta = 0{,}2$, $m = 20$). Creșterile de viteză în punctele caracteristice sînt apreciabile. Ele rămîn inferioare celor din conducta dreptunghiulară. Dar și domeniul ocupat de lichidul injectat, segment de cerc cu înălțimea δ, are o secțiune mai mică decît banda dreptunghiulară de la conducta pătrată. Secțiunea activă de transport scade mai puțin ca urmare a injecției. Putem aprecia că și în conducta circulară se obține o creștere a debitului transportat de 20—30% față de cel din curgerea de referință ceea ce nu este de loc neglijabil.

CONCLUZII

Studiul comparativ al vitezelor în diferite puncte ale unei conducte pentru curgerea de referință (un singur lichid) și curgerea stratificată (cu injecția unui lichid de viscozitate redusă în strat de grosime mică) a pus în evidență creșteri importante ale vitezelor în lichidul transportat atît în conducta pătrată, cît și în cea circulară.

Pentru curgeri cu aceeași stratificare δ și același parametru de viscozitate m se constată că în puncte corespondente (mijlocul suprafeței de separare și centrul conductei) creșterile de viteză sînt mai mici în conducta circulară decît în cea pătrată.

Dar modificarea debitului transportat este rezultatul a două cauze opuse: creșterea vitezei lichidului transportat și micșorarea secțiunii active de transport ca urmare a injecției celui de-al doilea lichid.

Pe baza rezultatelor de calcul și a considerării celor două efecte s-a apreciat că pentru un caz test ($\delta = 0{,}2$, $m = 20$) creșterea de debit în conducta circulară poate fi de 20—30%. La aceiași parametri, creșterea estimată este inferioară celei din conducta pătrată (39,9%). Cum creșterea maximă are loc la valori ale stratificării diferite de 0,2, putem afirma că procedeul injecției este eficace și la conducta circulară.

În vederea evaluării corecte a creșterii de debit funcție de parametri ce intervin și a determinării condițiilor în care s-ar obține creșterea maximă se impune găsirea unei metode de calcul efectiv al debitelor pentru curgerea stratificată în conducte circulare.

Deoarece formulele vitezelor de tip (27) nu permit calculul debitelor, cercetările vor trebui îndreptate spre elaborarea unei metode de determinare a vitezelor sub o formă care să permită acest calcul.

Primită în redacție la 26 noiembrie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. CORNELIU CRĂCIUN, *Creșterea debitului în mișcarea Poiseuille plană prin injecția unui alt fluid viscos*, St. cerc. mec. apl., **32**, *6*, 1191—1208 (1973).
2. — *Creșterea capacității de transport a conductei dreptunghiulare prin injecția unui al doilea fluid de viscozitate mai mică*, St. cerc. mec. apl., **35**, *1*, 27—50 (1976).
3. MICHAEL BENTWICH, *Two — Phase Viscous Axial Flow in a Pipe*, Journal of Basic Engineering Transaction of A.S.M.E., 669—672, December (1964).

CERCETĂRI PRIVIND COMPORTAREA CUPLEI CU CONTACT LINIAR ÎN REGIM DE FRECARE MIXTĂ

de B. DIMITROV
Centrul de mecanică a solidelor
H.-A. LUEB, TH. G. F. SCHOON.
Institut für Physikalische Chemie der Universität Würzburg

Se folosește ca instrument de cercetare al regimului lubrificației mixte o instalație tip Almen-Wieland (AWM) — automatizată, construită de autori la Institutul de chimie fizică al Universității din Würzburg (R. F. Germania). Cu ajutorul acesteia, se studiază diferite aspecte tribologice ale funcționării unei cuple de frecare cu contact liniar în prezența lubrifianților. Se evidențiază influența forței normale și a vitezei de creștere a încărcării cuplei asupra evoluției coeficientului de frecare a acesteia.

1. ASPECTE GENERALE

Complexitatea regimului mixt de frecare și a regimurilor învecinate — limită și EHD — precum și importanța cunoașterii lor atît pentru tribologie ca știință, cît și pentru aplicațiile practice ale acesteia, au impus folosirea în cercetare a unor instalații și metode din ce în ce mai complicate. Toate aceste complicații urmărind controlul cît mai precis atît al parametrilor mecanici și termici, cît și al mediului în care funcționează cupla, au apărut ca necesare în cursul cercetărilor experimentale care utilizau tribometre clasice.

Instalația Almen-Wieland (AWM) a fost concepută inițial pentru a servi la determinări comparative ale sarcinilor de gripaj ale uleiurilor de extremă presiune (EP), în cadrul industriilor petrolieră și constructoare de mașini [1]. În prezent, AWM este unul dintre cele mai răspîndite tribometre în R.F. Germania. Cercetări mai vechi efectuate în Institutul de chimie fizică al Universității din Würzburg și care au folosit acest tip de instalație, au arătat că AWM este suficient de sensibilă pentru a permite studierea influenței lubrifiantului, asupra procesului de frecare [2], [3]. Investigațiile ulterioare au evidențiat că reproductibilitatea determinărilor efectuate cu AWM este nesatisfăcătoare pentru desfășurarea unor cercetări fundamentale tribologice în domeniile mixt și limită. Erorile sistematice constatate pot avea următoarele cauze :

— utilizarea unei metode manuale pentru încărcarea cuplei de frecare ;

— prezența frecărilor parazite în sistemul de măsurare a forței de frecare;

— existența unor surse de vibrații în sistemul de reducție și transmisie a mișcării de la motorul de antrenare la axul principal;

— dificultățile de la operația de modelare a parametrilor mecanici de funcționare, datorită existenței unei singure trepte de viteză;

— folosirea unei metode principial greșită pentru măsurarea uzurii cuplei de frecare.

În scopul înlăturării acestor dificiențe au fost făcute de către Schoon și Klette [4] unele propuneri de îmbunătățire a funcționării AWM. În perioada mai-august 1975 a fost realizată și utilizată în cercetări de către autorii prezentei lucrări, o instalație Almen-Wieland automatizată ale cărei caracteristici tehnice și performanțe vor fi prezentate în continuare.

2. DESCRIEREA AWM — AUTOMATIZATĂ

În figurile 1 și 2 se redau imagini ale acestui tribometru, după efectuarea tuturor modificărilor constructive și funcționale. În figura 3 se prezintă schema bloc a aceleiași instalații. Din AWM inițială au fost păs-

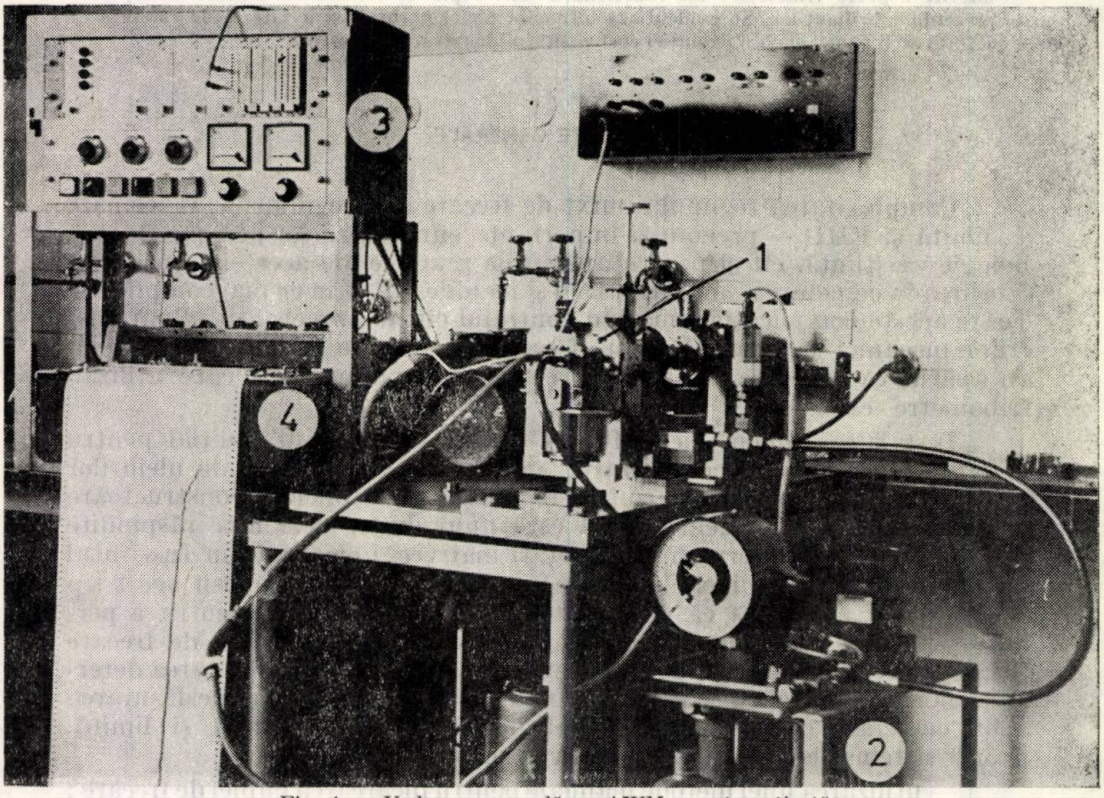


Fig. 1. — Vederea generală a AWM — automatizată:
1. Instalația propriu-zisă; *2.* Instalația mini-hidraulică; *3.* Pupitrul de comandă; *4.* Potențiometrul înregistrator cu 3 canale.

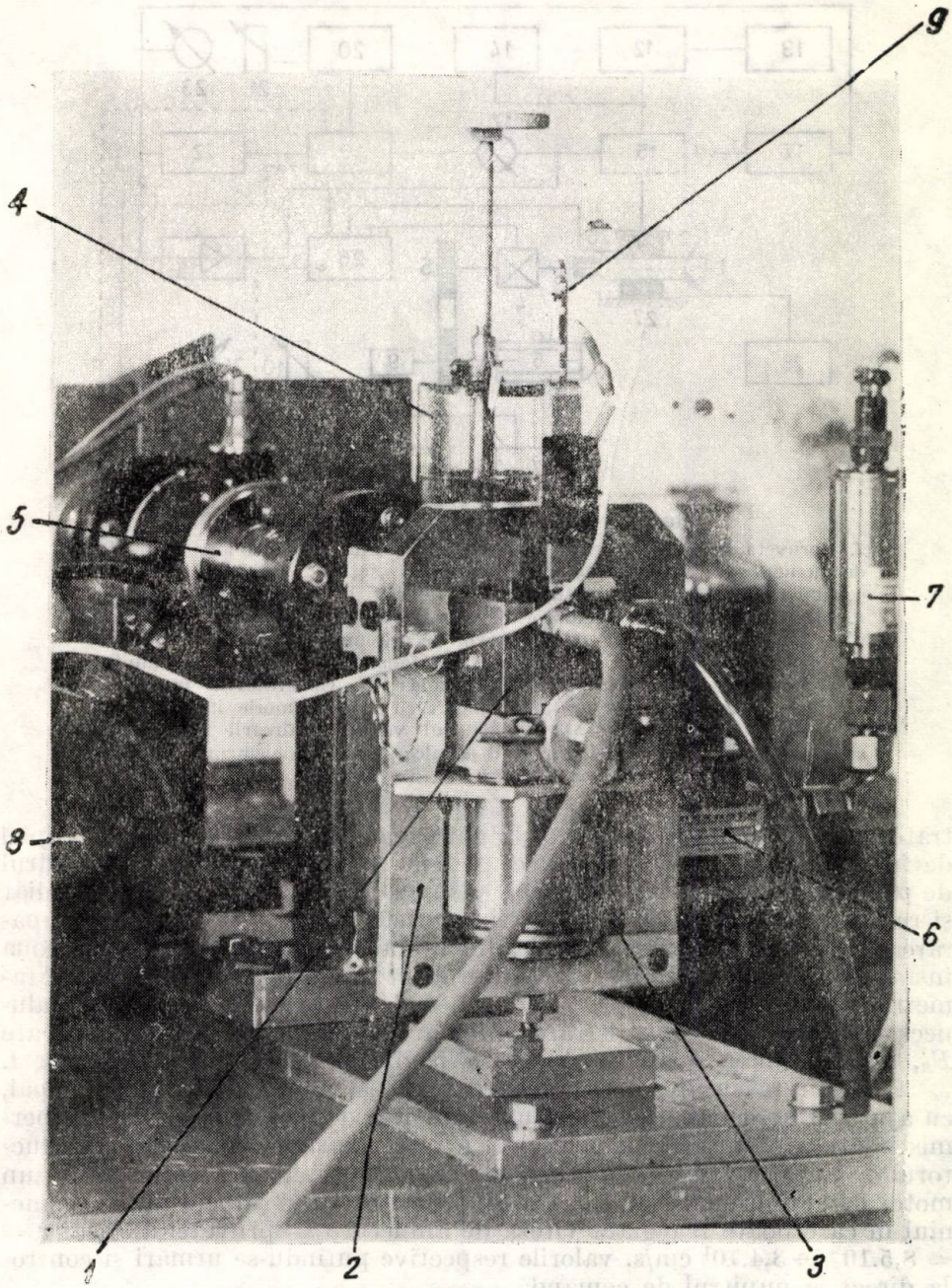


Fig. 2. — Vederea AWM-automatizată propriu-zisă :
1. Vasul cu ulei de probă și cupla de frecare ; *2.* Cadrul de încărcare ; *3.* Cilindrul de presiune ; *4.* Rezervor de ulei tip pahar (din sticlă) ; *5.* Traductor de moment ; *6.* Ventil de închidere (manual) ; *7.* Traductor de presiune ; *8.* Motor de curent continuu ; *9.* Termoelement.

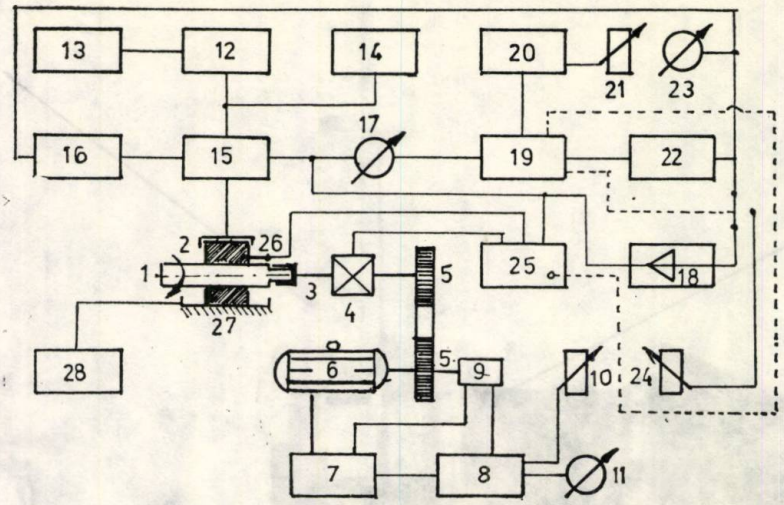


Fig. 3. — Schema bloc AWM-automatizată :

1. Epruveta ax ; *2.* Epruvetele semi-lagăr ; *3.* Axul principal ; *4.* Traductor de moment ; *5.* Şaibe de acţionare cu curea dinţată ; *6.* Motor de curent continuu ; *7.* Regulator cu tiristori ; *8.* Aparat de comandă cu redresor ; *9.* Taho-generator ; *10.* Regulator de viteză ; *11.* Tahometru ; *12.* Pompa de ulei ; *13.* Rezervor de ulei ; *14.* Rezervor de presiune ; *15.* Ventil de reglare automată ; *16.* Traductor de presiune ; *17.* Manometru contact ; *18.* Amplificator de reglare ; *19.* Bloc logic de comandă ; *20.* Generator de impulsuri ; *21.* Regulatorul vitezei de creştere a încărcării ; *22.* Memorie intermediară ; *23.* Indicator de presiune ; *24.* Regulatorul valorii încărcării instantanee ; *25.* Potenţiometrul înregistrator cu 3 canale ; *26.* Termoelement ; *27.* Vasul cu ulei de probă ; *28.* Termostat.

trate numai părţile care serveau la ghidarea, încărcare şi ungerea cuplei de frecare. Au fost reutilizate deci piesele : cadrul de încărcare, cilindrul de presiune, vasul cu ulei de probă şi suportul acestuia, axul intermediar şi rezervorul de ulei tip pahar. Prin această metodă, se permite compararea rezultatelor experimentale din literatură cu cele obţinute pe noua instalaţie. Modificările efectuate au urmărit o mai bună stăpînire a parametrilor mecanici — presiunea hidraulică de încărcare p şi viteza de alunecare v, precum şi înregistrarea continuă a mărimilor, forţa de frecare F_R, forţa normală F_N şi temperatura medie a semilagărului superior t.

Pentru măsurarea forţei de frecare a fost montat pe axul principal, cu ajutorul unor cuplaje rigide, un traductor de moment, ceea ce a permis înlăturarea motorului pendular. Cu acest prilej s-au eliminat reductorul cu roţi dinţate şi transmisia cu curea trapezoidală şi s-au montat un motor de curent continuu şi o transmisie cu curea şi şaibe dinţate. Domeniul în care poate fi reglată viteza de alunecare a epruvetei ax este $v = 8{,}5.10^{-3} \div 3{,}4.10^{1}$ cm/s, valorile respective putîndu-se urmări şi controla direct la pupitrul de comandă.

Dispozitivul de încărcare hidraulic-manual a fost înlocuit printr-o miniinstalaţie hidraulică automată care permite reglarea presiunii de lucru în domeniul $p = 0 \div 70$ at, respectiv $F_N = 0 \div 3500$ daN. Viteza de creştere automată a încărcării cuplei V_p se poate controla în domeniul $V_p =$

= 1 ÷ 100 daN/min. Pentru a evita distrugerea cuplei de frecare și suprasolicitarea aparaturii de măsură la apariția gripajului, a fost montat un întrerupător electric la potențiometrul înregistrator. Prin intermediul acestuia se asigură descărcarea automată a cuplei, în momentul depășirii unei anumite valori limită de către forța de frecare.

Alături de forțele normală și de frecare, potențiometrul cu trei canale înregistrează și temperatura semilagărului superior, măsurată cu ajutorul unui termocuplu miniatural montat la circa 2 mm de suprafața de frecare (vezi fig. 4). Pentru a controla temperatura lubrifiantului s-a intercalat vasul cu ulei de probă (cu pereți dubli) într-un circuit de termostatare.

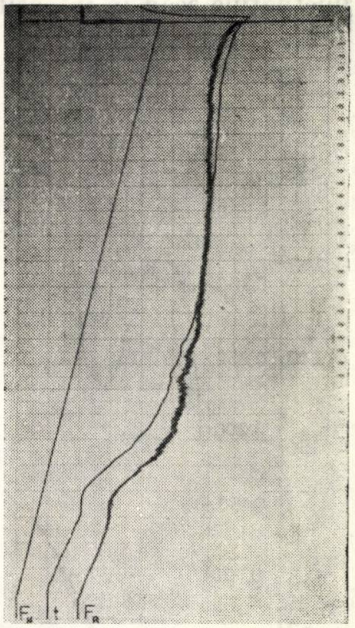


Fig. 4. — Aspectul diagramei de înregistrare simultană a mărimilor : forța normală F_N, forța de frecare F_R și temperatura t.

3. CERCETĂRI CU CARACTER EXPERIMENTAL

Prezentele cercetări tribologice au utilizat cuple de frecare standard, livrate de firma Wieland, care constau dintr-o epruvetă ax și două epruvete semilagăr. Drept ulei de bază a fost folosit de obicei hexadecan p.a. (Hd) și numai cu caracter comparativ ulei de parafină (PA), după DAB—7. Drept aditiv de onctuozitate a fost introdus : 1% trioleină (TOL), iar ca aditiv EP 1% tricrezilfosfat (TKP).

Primele studii au urmărit punerea în evidență a domeniului de lucru al AWM. Astfel, pentru lubrifiantul Hd + 1% TKP și $F_N = 100$ daN, creșterea vitezei de alunecare în domeniul de lucru al instalației, respectiv $v = 8{,}5.10^{-3} \div 3{,}4.10^{1}$ cm/s, a dus la scăderea continuă a coeficientului de frecare în domeniul $\mu = 0{,}420 \div 0{,}130$, toate valorile fiind situate pe ramura descrescătoare a curbei tip Stribeck [5]. Aceste constatări dovedesc că AWM funcționează în regimurile de lubrificație mixtă și limită.

Urmărind problema reproductibilității măsurătorilor, se reprezintă în figura 5 mediile aritmetice ale rezultatelor experimentale ale unei serii de 20 de determinări efectuate în condiții identice. Evoluția forței de frecare prezintă două paliere, unul mai restrîns (pentru $F_N \simeq 180$ daN), iar celălalt mai extins (pentru $F_N \geqslant 350$ daN). Particularitățile funcționării cuplei sînt cu mult mai evidente atunci cînd reprezentăm variația coeficientului de frecare în funcție de încărcare. Se observă două domenii distincte de funcționare, a căror limită de separare este la $F_N \simeq 175$ daN. Această comportare care atestă eficiența tribologică discontinuă a aditivului TKP în condițiile creșterii solicitărilor mecanice, confirmă observațiile similare făcute de Sanin și colab [6] pentru alte categorii de aditivi.

Fluctuațiile în jurul valorii medii sînt și ele mai evidente la reprezentarea evoluției coeficientului în locul forței de frecare. Cele mai puter-

nice fluctuaţii sînt prezente la încărcări mai mici şi mai ales pentru porţiunile crescătoare ale curbelor, de exemplu circa 15% pentru $F_N = 250$ daN. În schimb, pentru porţiunile descrescătoare şi mai ales la încărcări mai mari, fluctuaţiile scad în intensitate (circa 5% pentru $F_N > 350$ daN).

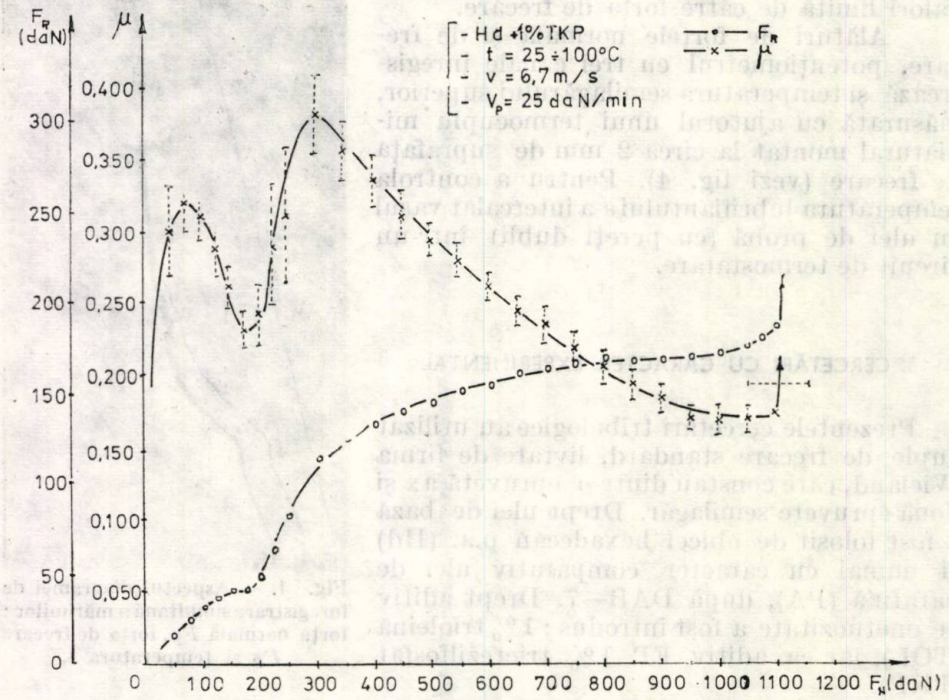


Fig. 5. — Influenţa forţei normale asupra forţei şi respectiv a coeficientului de frecare; împrăştierea valorilor coeficientului de frecare.

Au fost făcute studii urmărind stabilirea influenţei vitezei de încărcare V_p asupra evoluţiei coeficientului de frecare (vezi fig. 6). Reducerea vitezei de încărcare are drept rezultat o anumită aplatizare a curbelor, scăderea generală a valorilor coeficientului de frecare, deplasarea limitei de separare între cele două domenii spre sarcini mai mici şi a limitei de gripaj spre valori mai mari ale încărcării. Se constată că valoarea maximă a coeficientului de frecare este atinsă aproximativ la aceiaşi încărcare ($F_N \simeq 350$ daN). Reproductibilitatea măsurătorilor forţei de frecare se îmbunătăţeşte pe măsură ce viteza de încărcare scade. Totuşi, reducerea vitezei de încărcare are drept rezultat creşterea duratei fiecărei serii de experimentări, ceea ce constituie un impediment pentru eficienţa lucrărilor de laborator.

În continuare, pentru a investiga intrarea în regim şi comportarea la uzare a cuplei de frecare, aceasta a funcţionat perioade egale de timp ($\Delta\tau = 60$ min) la diferite sarcini constante, urmărindu-se variaţia coeficientului de frecare (vezi fig. 7). Pentru domeniul $F_N = 200 \div 350$ daN cupla prezintă o instabilitate a funcţionării; coeficientul de frecare creşte

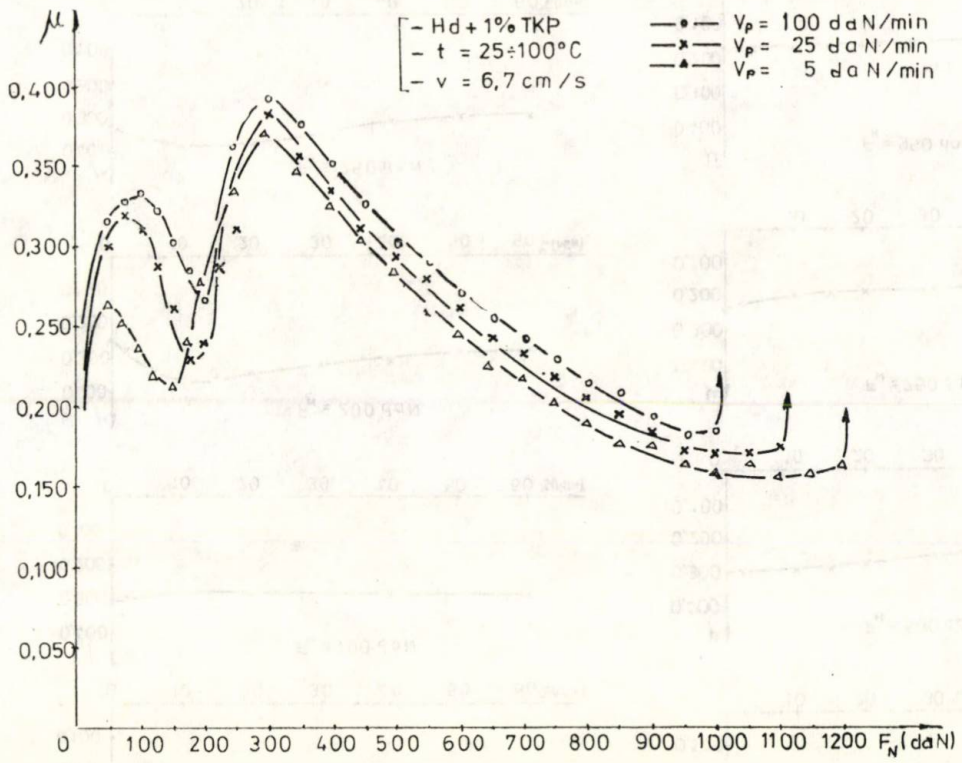
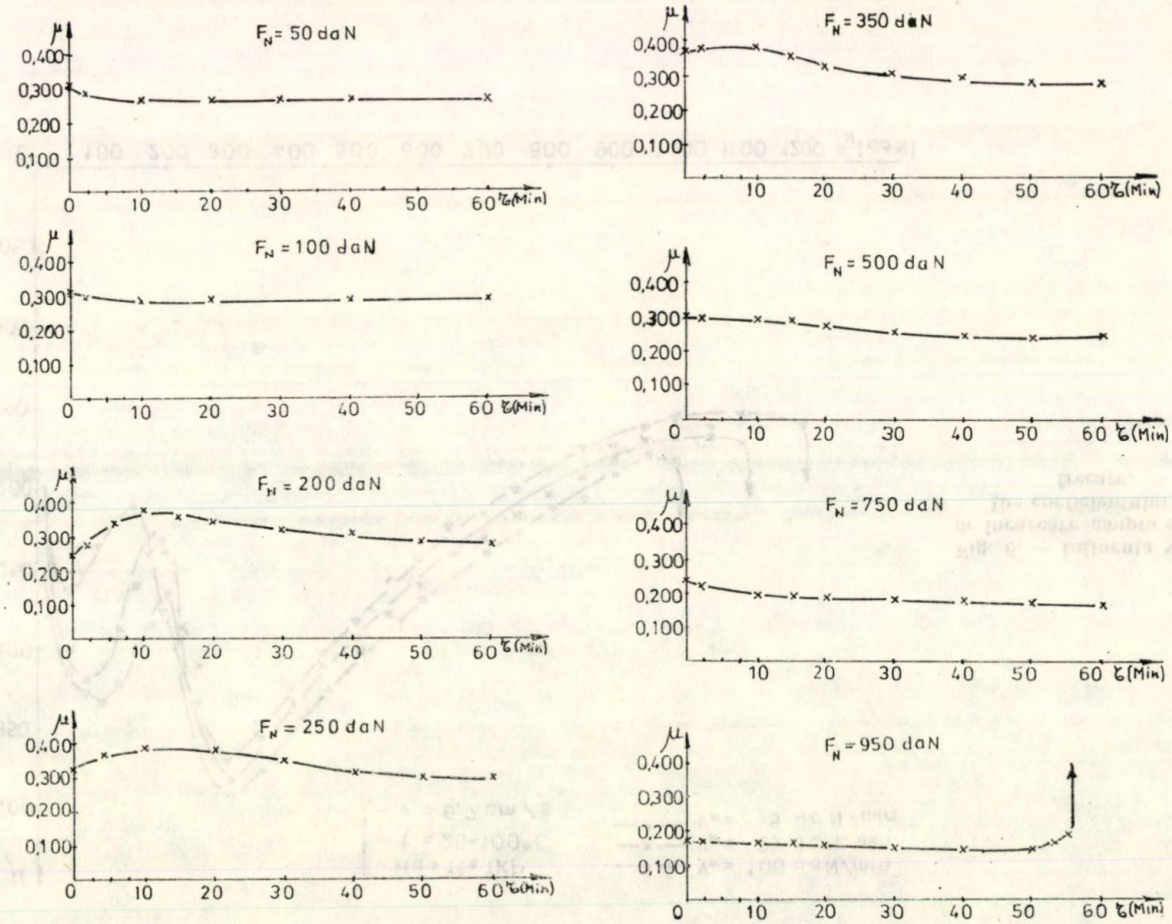


Fig. 6. — Influenţa vitezei de încărcare asupra evoluţiei coeficientului de frecare.



a *b*

Fig. 7.—Evoluția în timp a coeficientului de frecare la încărcare constantă. Condiții de lucru: $v = 6{,}7$cm/s; $F_N = 50 + 950$ daN; $V_p = 25$ daN/min; lubrifiant: Hd + 1% TKP.

în perioada inițială, după care scade din nou, stabilizîndu-se. În afara acestui domeniu, coeficientul de frecare are o tendință generală de scădere și stabilizare la valori mai scăzute decît cele inițiale. La încărcări ridicate ($F_N \geqslant 900$ daN), deși în perioada inițială au fost măsurate valori relativ scăzute ale coeficienților de frecare și ale temperaturii epruvetelor, apare o instabilitate în funcționarea cuplei de frecare, care poate duce brusc la gripajul acesteia. La începutul fiecărei experiențe, cuplele au fost rodate timp de 15 min la $F_N = 25$ daN, după care încărcarea a fost mărită continuu ($V_p = 25$ daN/min) pînă la atingerea valorii dorite. Descărcarea cuplei la sfîrșitul perioadei de uzare, de 60 min. la sarcină constantă, s-a făcut instantaneu, epruvetele păstrîndu-se apoi în exicator în vederea investigării suprafeței de contact a acestora. Aceste cercetări ajutătoare au fost făcute folosind un rugozimetru înregistrator tip Perth-o-meter, pentru a măsura modificarea rugozității în funcție de parametrii de funcționare și de durata lucrului (vezi tabela 1). De asemenea, s-a utilizat

Tabela 1

Determinarea rugozității suprafețelor de contact ale epruvetelor cu ajutorul unui Perth-o-metru

Lubrifiant	Condiții de lucru		Rugozitatea R_a (μm)	
	F_N (daN)	$\Delta\tau$ (min)	Epruvetă ax	Epruvetă semilagăr
Hd	100	20	15,4	10,5
Hd + TOL	200	20	0,33	0,50
Hd + TKP	100	60	0,38	0,30
Hd + TKP	200	60	0,26	0,18
Hd + TKP	250	60	0,36	0,42
Hd + TKP	350	60	0,26	0,30
Hd + KTP	350	120	0,24	0,25
Hd + TKP	500	60	0,24	0,26
Hd + TKP	750	60	0,22	0,24
Hd + TKP	950	58	0,89	0,63
Epruveta neuzată			0,28	0,19

microscopul optic de atelier pentru determinarea lățimii urmei de contact pe epruveta semilagăr, metodă care dă anumite indicații cu privire la uzura acestei piese (vezi tabela 2). Determinările de mai sus au fost completate cu observații la un microscop electronic tip Siemens, la care s-a comparat aspectul suprafeței neuzate a unei epruvete ax noi (vezi fig. 9) cu cele uzate în contact cu diferiți lubrifianți (vezi fig. 10 și 12).

S-a studiat influența naturii lubrifiantului asupra fenomenelor de frecare și uzare care apar la cupla AWM (vezi fig. 8). Spre diferență

Tabela 2

Determinarea lățimii urmei de uzură pe suprafața epruvetei semilagăr cu ajutorul unui microscop de măsură. (V = 6,7 cm/s; V_p = 25 daN/min; Hd + 1% TKP)

Condiții de lucru		Lățimea medie a urmei de uzură (mm)
F_N(daN)	$\Delta\tau$(min)	
100	60	0,83
200	60	1,30
250	60	1,41
350	60	1,56
350	120	1,67
500	60	1,68
950	58	1,96

de PA folosit pînă în prezent ca ulei de bază și care mai are o anumită eficiență ca lubrifiant, Hd provoacă tendințe de gripaj și coeficienți de

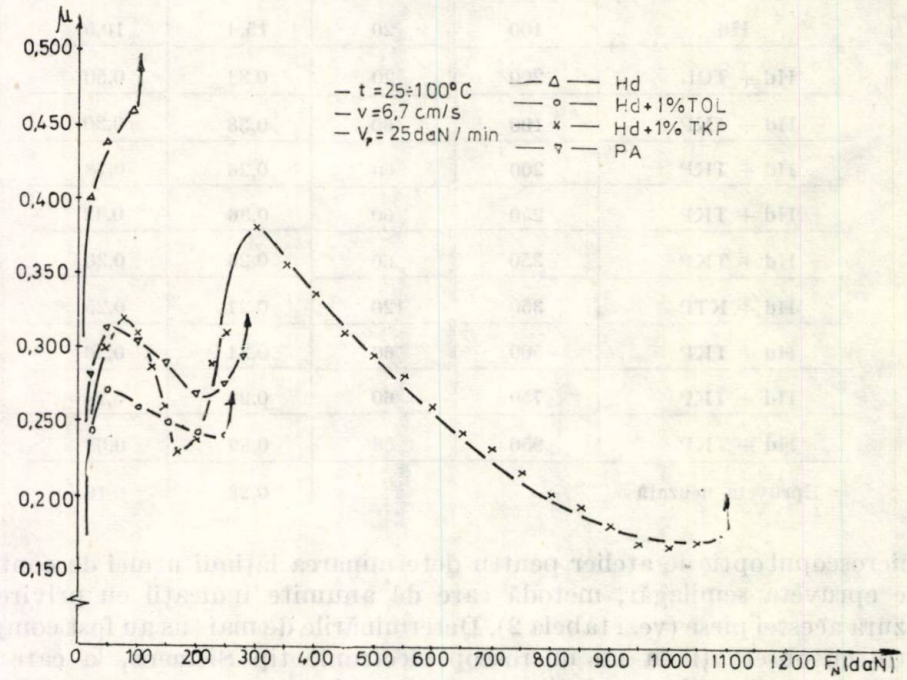


Fig. 8. — Influența naturii lubrifiantului asupra evoluției coeficientului de frecare cu creșterea încărcării cuplei.

frecare ridicați chiar la încărcări reduse (vezi și fig. 9 și 10). Deoarece ambii lubrifianți au în componența lor numai hidrocarburi parafinice, diferențele mai sus semnalate se datorează impurităților conținute de PA și care pot fi diferiți produși de oxidare ai hidrocarburilor. Acest fapt

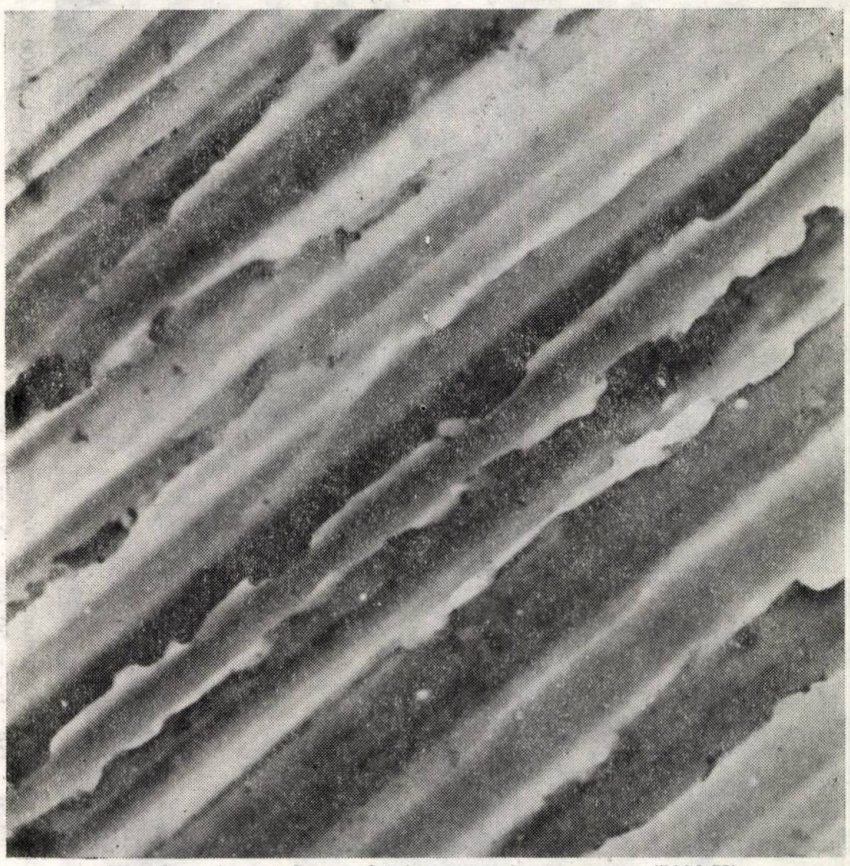


Fig. 9. — Aspectul suprafeței epruvetei ax neuzate (5000 X).

explică comportarea tribologică asemănătoare a lubrifianților PA și Hd + + 1% TOL , respectiv forma curbelor (vezi fig. 8), limita de gripaj și aspectul suprafeței de contact (vezi fig. 10 b și 11). Luînd însă ca bază de comparație mărimea coeficienților de frecare, se constată că cel de-al doilea lubrifiant este mai eficient.

TKP este mai puțin activ ca aditiv de onctuozitate, la încărcări reduse obținîndu-se straturi de chemisorbție sau reacție datorită impurităților conținute de obicei de aditiv [7] — vezi fig. 12 *a*. Straturile formate nu pot asigura protecția necesară pentru suprafața de frecare la mărirea solicitărilor mecanice (vezi fig. 12 *b*). Formarea pe întreaga suprafață de frecare a straturilor de reacție tribochimică are loc numai la depășirea unui anumit nivel al solicitărilor mecanice și termice, specifice cuplei respective ($F_N > 300$ daN) (vezi fig. 12 *c*). După această fază,

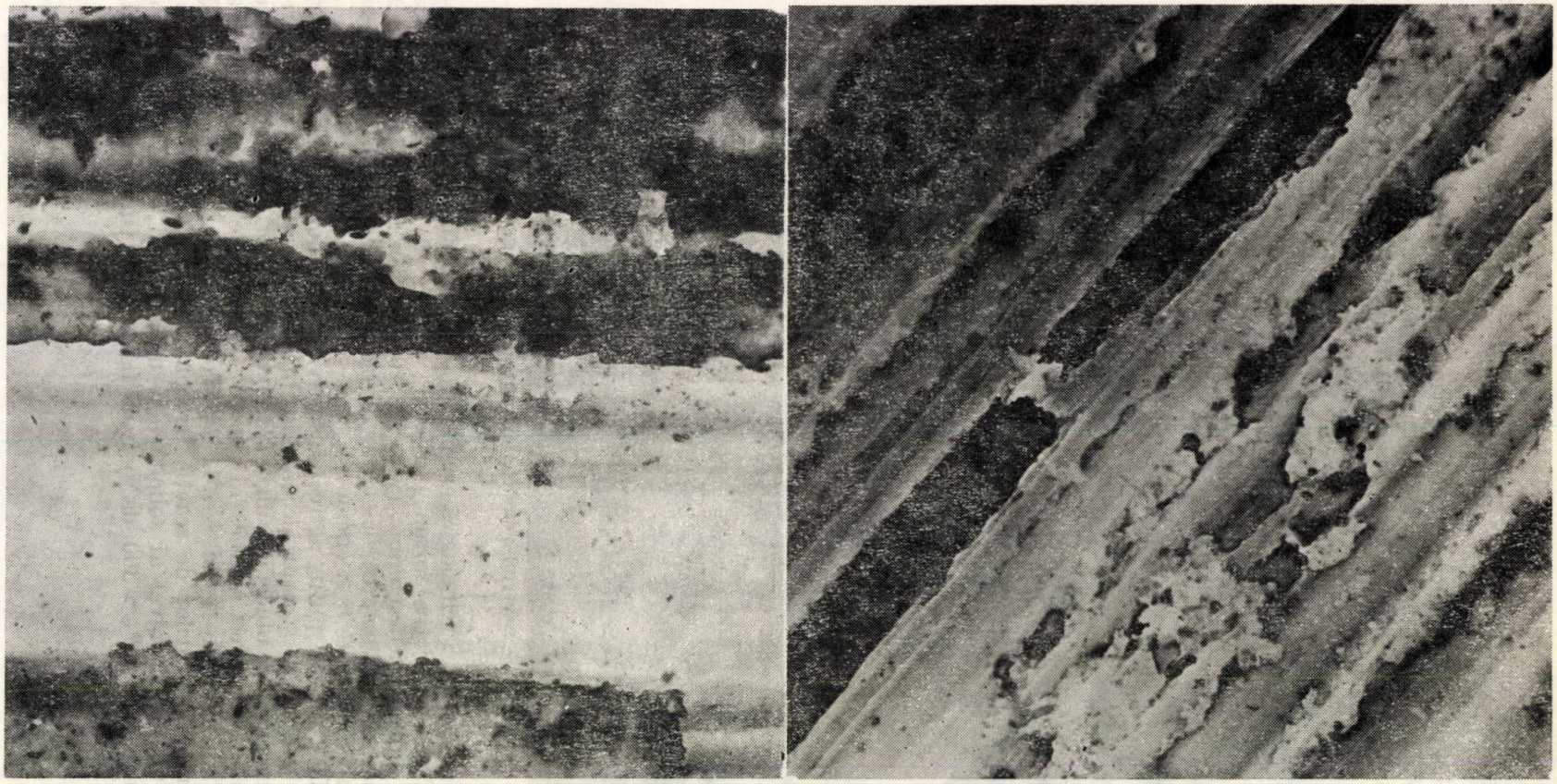


Fig. 10. — Aspectul suprafeţei uzate a epruvetei ax, după funcţionarea acesteia în ulei de bază neaditivat (5000 ×):
a. lubrif.: Hd; $F_N = 50$ daN; $\Delta\tau = 30$ min;
b. lubrif.: PA; $F_N = 100$ daN; $\Delta\tau = 30$ min.

stratul de suprafață este afinat și netezit, el asigurînd protecția suprafeței de frecare atît din punct de vedere mecanic, cît și tribochimic [8] (vezi fig. 12 *d*). La încărcări mari ($F_N > 900$ daN), datorită solicitărilor mecanice mai ridicate, echilibrul proceselor de formare și uzare ale stratului de suprafață este deteriorat [9], rugozitatea zonei de contact crescînd din nou datorită intensificării procesului de uzare de coroziune a suprafeței și caracterului neuniform al acestuia [10]. Se pot provoca perturbări ale regimului frecării mixte, transformarea acestuia în regim limită și apariția în final a tendințelor de gripaj a cuplei de frecare. Aceste fenomene au fost constatate prin descărcarea și demontarea cuplei în momentul apariției instabilității în funcționarea acesteia ($F_N \simeq 950$ daN) deși coeficienții de frecare se menținеau la valori relativ mici, iar temperatura de lucru a epruvetei semilagăr superior era practic constantă. Suprafața de frecare a epruvetei ax a fost investigată la microscopul electronic (vezi fig. 12*e*), iar rugozitatea a fost măsurată (vezi tabela 1). Creșterea în continuare a coeficientului de frecare se datorește și intensificării procesului uzării de adeziune, consecință a perturbațiilor procesului de lubrificație din zona de contact, fapt care grăbește declanșarea gripajului.

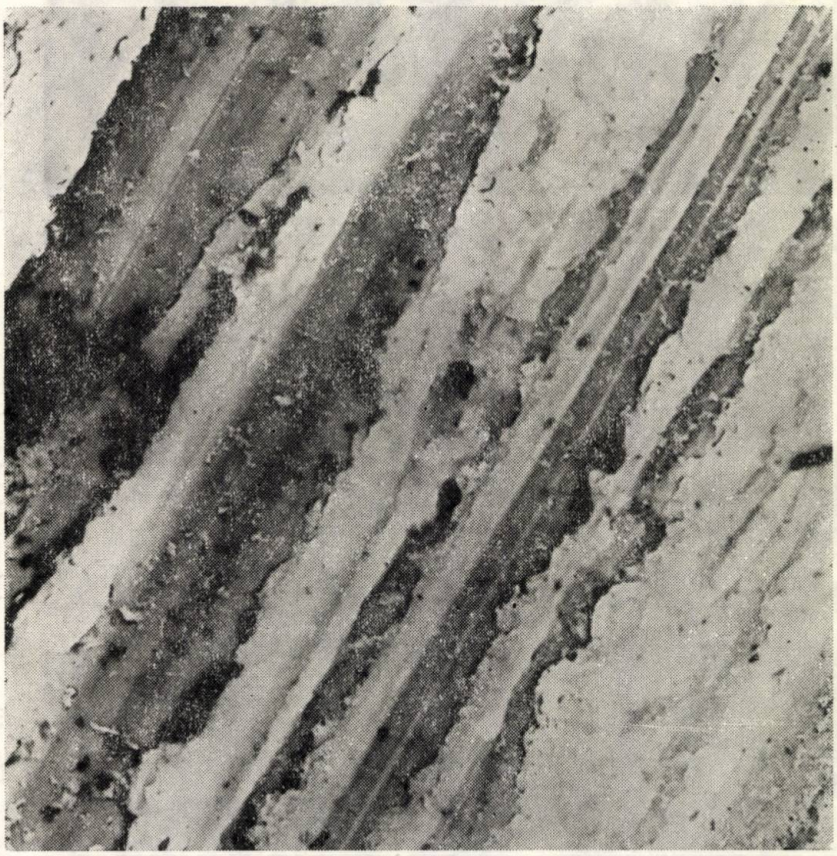


Fig. 11. — Aspectul suprafeței uzate a epruvetei ax, după funcționarea acesteia în Hd + 1% TOL; $F_N = 200$ daN; $\Delta\tau = 30$ min (5 000×).

Fig. 12 *a*

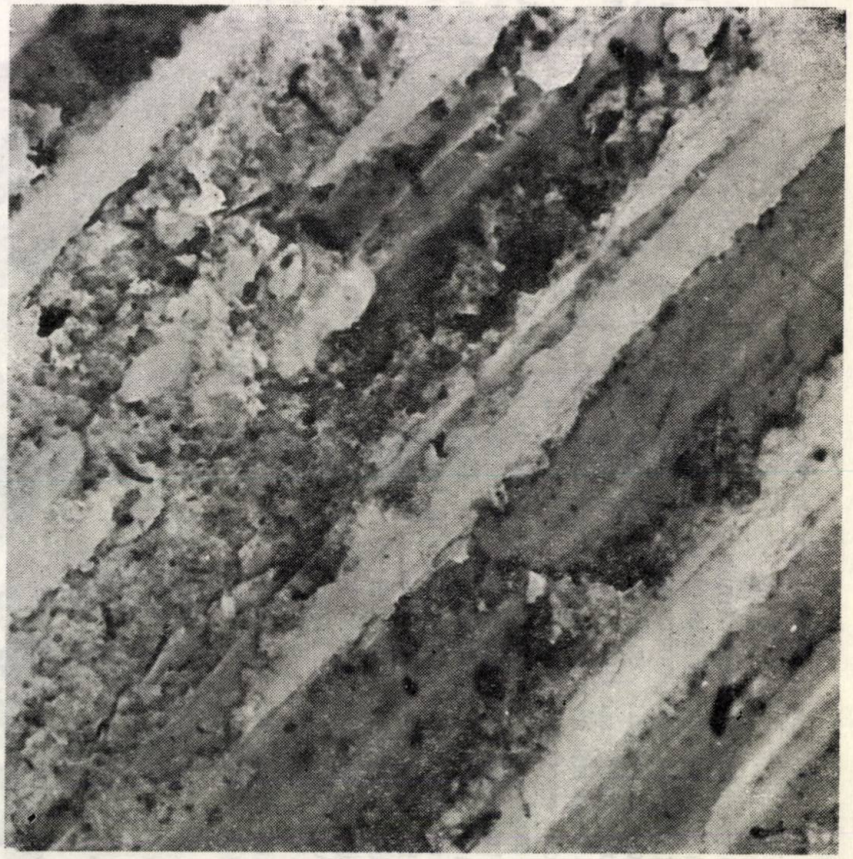


Fig. 12 *b*

Fig. 12. — Aspectul suprafeţei uzate a epruvetei ax, după funcţionarea acesteia în Hd + 1% TKP (5000 X):
a. $F_N = 100$ daN; $\Delta\tau = 60$ min; *b*. $F_N = 250$ daN; $\Delta\tau = 60$ min; *c*. $F_N = 350$ daN; $\Delta\tau = 60$ min; *d*. $F_N = 750$ daN; $\Delta\tau = 60$ min; *e*. $F_N = 950$ daN; $\Delta\tau = 57$ min.

Fig. 12 *c*

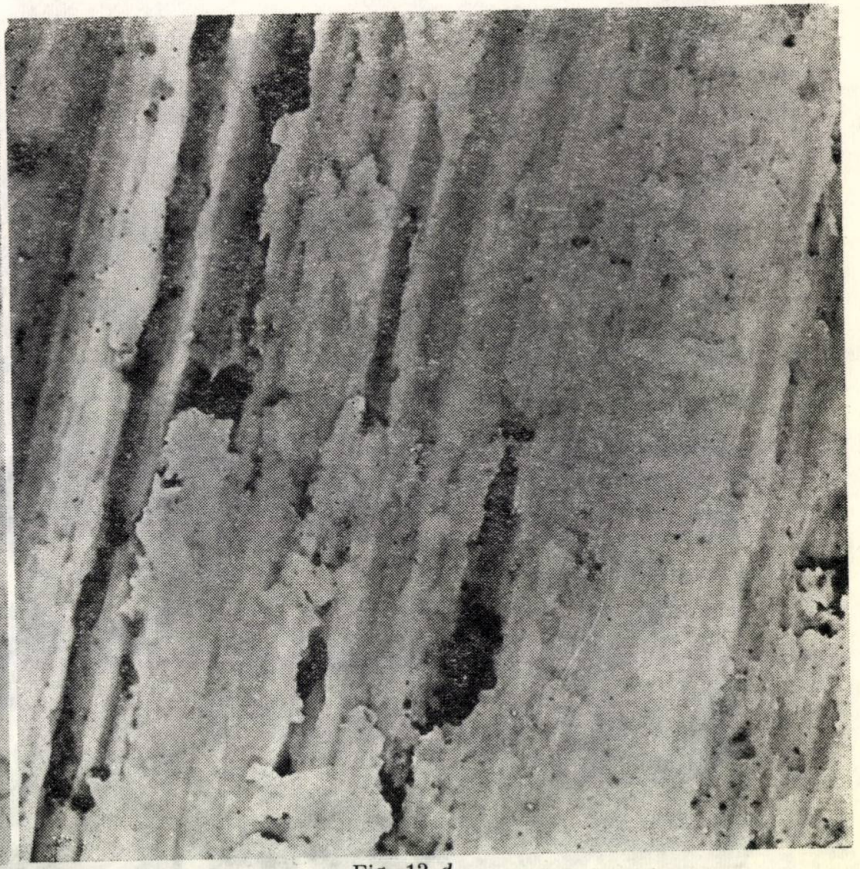


Fig. 12 *d*

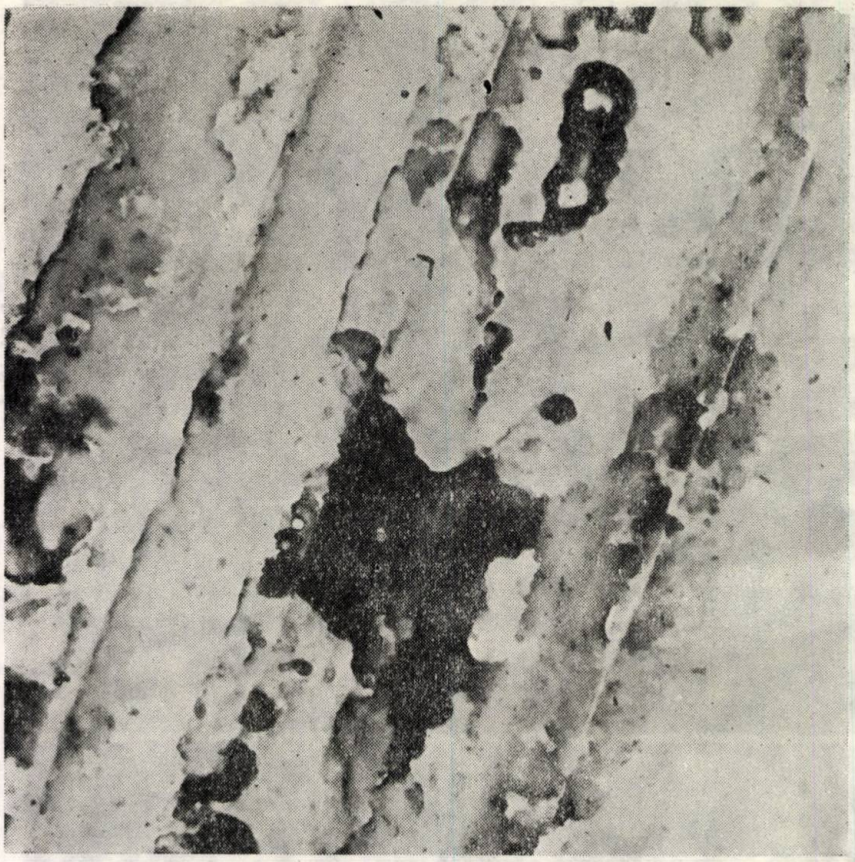


Fig. 12 *e*

4. CONCLUZIILE CERCETĂRILOR

1. Alături de alţi parametri mecanici, viteza de creştere a încărcării culpei, V_p, are o influenţă deosebită asupra funcţionării tribologice a acesteia şi a reproductibilităţii rezultatelor. Creşterea încărcării se va efectua continu, fără salturi, la o viteză de încărcare cît mai redusă cu putinţă.

2. Utilizarea ca ulei de bază a hidrocarburilor saturate pure, contribue la creşterea eficienţei cercetărilor tribologice în domeniuile mixt şi limită, mărind sensibilitatea investigării efectelor aditivilor (în special la încărcări reduse).

3. Aditivii tip EP pot avea discontinuităţi în eficacitatea lor, mai ales la sarcini medii. Rolul pachetelor de aditivi este de a suplini această dificienţă, ducînd la o comportare mai uniformă a lubrifianţilor.

4. Alături de controlul frecării şi uzării, determinarea modificării rugozităţii suprafeţei de contact în funcţie de condiţiile de lucru, furnizează date importante cu privire la funcţionarea tribologică a cuplei de frecare.

5. Gripajul poate avea şi cauze chimice, respectiv coroziunea tribochimică accelerată şi neuniformă a suprafeţei de contact la încărcări ridicate, care duce la creşterea rugozităţii acesteia.

6. Eforturile cercetătorilor ar trebui să se concentreze pe viitor nu atît asupra măririi continui a numărului de tribometre de laborator, ci mai ales asupra perfecţionării tribometrelor existente, care au fost studiate şi folosite timp îndelungat în laboratoarele de specialitate. Perfecţionarea acestora va avea drept obiect asigurarea controlului parametrilor mecanici, fizici şi chimici, precum şi automatizarea lucrului instalaţiei.

Autorii mulţumesc Societăţii Germane de Cercetare din Bonn (DFG) pentru sprijinul acordat în realizarea acestei lucrări.

Primită la redacţie la 8 ianuarie 1976

BIBLIOGRAFIE

1. M. Brunner, R. Pedrini, *Prüfung von Schmiermitteln auf ihre Schmierfähigkeit mit dem Wieland- und Vierkugel-apparat. I. Teil*, Schweizer Archiv, **21**, *6*, 169—178 (1955).
2. K. Adler, Th. G. F. Schoon, *Untersuchungen zur Kenntnis der Schmier— und Verschleissvorgänge im Gebiet der Misch- und Grenzreibung*. Schmierth. + Trib., **15**, *6*, 257—271 (1968).
3. Th. G. F. Schoon, K. Adler, H. Klette, *Reaktionen von mit Additiven versetzten Schmierölen im Bereich der Mischreibung*, Schmierth. + Trib., **17**, *5*, 219—221 (1970).
4. Th. G. F. Schoon, H. Klette, *Ausbau der Almen-Wieland-Maschine zu einer automatisch arbeitend und registrierend betriebshaben Gleitreibungsmessapparatur*. Exposé, DFG Bonn, 17 Dez. 1969 (nepublicată).
5. Th. G. F. Schoon, B. Dimitrov, H.-A. Lueb, *Bericht über die Forschungsarbeiten zur Automatisierung der Almen-Wieland Maschine*, Sept. 1975 (Raport înaintat către DFG şi nepublicat).
6. P. I. Sanin, Yu. A. Lozovoy, E. S. Shepeleva, *Investigation of Anti-Wear Additives Under Various Loads and at Different Sliding Speeds*, ASLE Trans. **16**, *3*, 185—188 (1973).
7. H. E. Bieber, E. E. Klaus, E. J. Tewksbury, *A Study of Tricresyl Phosphate as an Additive for Boundary Lubrication*, ASLE Trans., **11**, *2*, 155—161 (1968).
8. B. Dimitrov, *Über das chemische und tribochemische Verhalten flüssiger Schmierstoffe*. Schmierungsth. **6**, *5*, 151—156 (1975).
9. B. I. Kosteţki, M. E. Natanson, L. I. Berşadski, *Mehano-himiceskie proţessî pri granicinom trenii*, Izd. Nauka, Moskva, 1972.
10. B. Dimitrov, *Aspecte ale uzării de coroziune a metalelor în prezenţa uleiurilor lubrifiante*, teză de doctorat, Inst. Politehnic Bucureşti, 1973.

STABILITATEA DEFORMATEI PLANE SIMETRICE LA ÎNCOVOIERE A GRINZII „T" CU TALPĂ LATĂ. I

de DAN COȘA
Universitatea Brașov
CONSTANTIN PAVEL
Institutul de construcții București
GHEORGHE PAMFIL
Universitatea Brașov

În evoluția procesului de industrializare a execuției construcțiilor s-a ajuns, în perioada ultimilor ani, la folosirea unor elemente din beton precomprimat de mare deschidere, cu secțiunea în T și talpa superioară lată și relativ subțire.
Pentru proiectarea lor rațională este necesar a se cunoaște cît mai exact modul de participare a tălpii la comportarea de ansamblu a grinzii.
În prezenta lucrare a se analizează stabilitatea generală a grinzilor de acest tip pornind de la ipoteza că talpa comprimată se comportă ca o placă plană subțire, deformabilă în planul secțiunii transversale a elementului. Metoda propusă pentru calculul încărcării critice este mai exactă decît cele existente în literatura tehnică de specialitate și servește la studiul alcătuirii optime a grinzilor cu secțiune T avînd talpa superioară lată și relativ subțire.

§ 1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

Studiul stabilității deformatei plane simetrice a grinzii T cu talpă lată și relativ subțire, solicitată la încovoierea dreaptă, are ca obiect găsirea valorilor limită ale încărcărilor pentru care grinda își pierde stabilitatea generală și admite, pe lîngă deformata plană simetrică, și o deformată antisimetrică, fapt ce determină apariția unor solicitări suplimentare de încovoiere și răsucire.

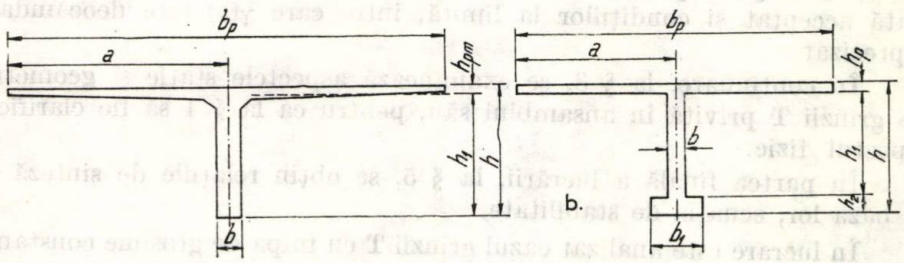


Fig. 1

Alcătuirea de principiu, în secțiune transversală, a unor grinzi T cu talpă lată este reprezentată în figura 1.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 4, 1976, P. 515–530

Asociind grinzii un sistem de axe triortogonal stîng $xOyz$ cu axa Oz coincinzînd cu linia centrelor de greutate ale secțiunilor transversale și folosind o terminologie din cinematica punctului, se poate spune (cu referire la pierderea stabilității sub formă antisimetrică) că secțiunea grinzii într-un punct z este complet definită, în poziție deplasată (fig. 2), dacă se cunosc componentele deplasării „de transport" :

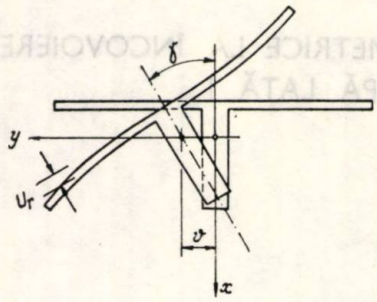


Fig. 2

— săgeata $v(z)$ a axei grinzii ;

— rotire $\gamma(z)$ a secțiunii transversale ;

precum și deplasarea „relativă" a tălpii superioare, respectiv

— săgeata $u_r(z, y)$ a unui punct din planul median.

În locul deplasării „relative" $u_r(z, y)$ măsurată de la linia rotită a tălpii nedeformate în secțiune, poate fi folosită, în funcție de necesități, deplasarea „absolută" $u(z, y)$ măsurată de la poziția inițială simetrică (anterioară pierderii stabilității).

Mărimile $v(z)$, $\gamma(z)$ și $u_r(z, y)$ sau $v(z)$, $\gamma(z)$ și $u(z, y)$ reprezintă, pentru problema în discuție, sisteme complete de parametri în raport cu care ea poate fi formulată și rezolvată.

Considerăm că modelul fizic care se potrivește cel mai bine tipului de grindă T pe care o studiem, este un model compus în sensul că pentru componentele deplasării de transport se identifică cu modelul clasic al rezistenței materialelor, iar pentru deplasarea relativă cu modelul plăcii plane subțiri cu deformabilitatea completă.

Pentru atingerea scopului propus, calea pe care o vom urma, și care va fi respectată în organizarea interioară a lucrării de față, va fi următoarea :

— La început, în § 2, se stabilește expresia deplasării „absolute" $u(z, y)$ a tălpii superioare corespunzătoare solicitării, tipului de deformată acceptat și condițiilor la limită, între care $\gamma(z)$ este deocamdată neprecizat.

În continuare, la § 3, se examinează aspectele static și geometric ale grinzii T privită în ansamblul său, pentru ca la § 4 să fie clarificat aspectul fizic.

În partea finală a lucrării, la § 5, se obțin relațiile de sinteză și, pe baza lor, ecuația de stabilitate.

În lucrare este analizat cazul grinzii T cu talpa de grosime constantă și înălțimea secțiunii constantă pe lungimea grinzii. Reazemele sînt de tip „furcă" adică permit rotirea secțiunilor transversale de la capetele grinzii în jurul axelor lor principale de inerție (ox și oy) dar împiedică rotirea lor în jurul axei longitudinale a grinzii, oz. Grinda este solicitată la încovoiere pură în planul xoz.

§ 2. RELAȚII DE CALCUL PRIVIND PLACA (TALPA SUPERIOARĂ)

Talpa superioară, lată și flexibilă, poate fi considerată, în modul cel mai general, ca fiind o placă plană subțire cu deformabilitate completă a cărei comportare și calcul de ordinul II sînt descrise în lucrarea [5].

Alegînd un sistem de referință $x'\,o'\,y'\,z'$ cu centrul O' în centrul de greutate al tălpii (ca în figura 3), ținînd seama de legăturile la capete ale grinzii ca ansamblu și de legătura monolită între talpa superioară și restul secțiunii, talpa reprezintă o placă dreptunghiulară de lățimea $2a$ și lungime l, simplu rezumată pe laturile $z' = 0$ și $z' = l$, liberă pe laturile $y' = \pm a$ și obligată, în lungul liniei $y' = 0$, la deplasări identice cu ale restului de secțiune, considerat indeformabil în planul său. Grosimea plăcii se consideră constantă și egală cu h_p.

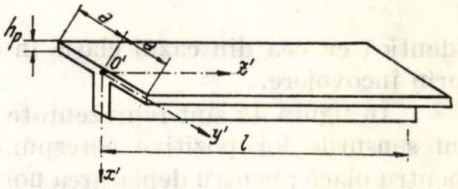


Fig. 3

Ca parte integrantă a grinzii T, solicitată la încovoiere pură de un moment M, pentru talpa superioară pot fi găsite prin calcul de ordinul I, potrivit modelului fizic din rezistența materialelor ale barelor încovoiate, solicitările ce revin pe unitatea de lățimea de placă $\mathfrak{M}^0_{z'}$ și $\mathfrak{M}^0_{y'}$:

$$\mathfrak{M}^0_{z'} = \frac{1}{2a}\int_{(pl)} \sigma \, dA = M\,\frac{h_p \cdot d}{I_y}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{M}^0_{y'} = \frac{1}{2a}\int_{(pl)} \sigma(x-d)\, dA = M\,\frac{h_p^3}{12 I_y}\cdot \tag{2}$$

Cu d s-a notat distanța de la centrul de greutate ale întregii secțiuni la centrul de greutate al tălpii comprimate.

Trebuie precizat faptul că deși placa este raportată la un sistem de referință propriu ($x'\,O'\,y'\,z'$), în toate notațiile care vor urma referitoare la placă, vom renunța la indicele „prim" care marchează direcțiile Ox', Oy' și Oz', el fiind subînțeles.

Corespunzător tipului de calcul de ordinul al II-lea propus în lucrarea [5] pentru placa plană subțire cu deformabilitate completă, acest calcul presupune integrarea unui sistem de trei ecuații cu derivate parțiale (12), (13) și (14) în deplasări. Ecuațiile (13) și (14) exprimă comportarea plăcii în planul median, iar ecuația (12) comportarea în afara acestui plan.

Structura aparte a acestui sistem de ecuații a permis demonstrarea unei proprietăți interesante, și anume că în cazul unei singure plăci problema plană poate fi rezolvată complet și independent de starea de efort și de deformație corespunzătoare deplasărilor normale la planul median, dacă pentru comportarea plăcii în planul median și pe direcția normală la acest plan există condiții la limită distincte ; este ușor și important de observat că în acest caz toate mărimile antecalculate ce intervin

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM 1948

în ecuația (12) sînt furnizate de calcule de ordinul I. Ținînd seama de aceste considerente, în condițiile date ale problemei pe care ne-am propus-o spre rezolvare, rezultă că ecuația (12) din [5] a deplasărilor normale $u(y, z)$ devine :

$$D \cdot \Delta\Delta u = \mathfrak{N}_z^0 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{3}$$

identică cu cea din cazul clasic în care se admitea doar deformabilitatea prin încovoiere.

În figura 4*a* sînt reprezentate eforturile secționale care ne interesează cu sensurile lor pozitive corespunzătoare convenției de semne valabilă pentru placă ; pentru deplasarea normală u și rotirea φ a tangentei în planul nul $x'O'y'$ sensurile lor pozitive sînt cele din figura 4*b*.

Deformațiile tălpii superioare, ca parte componentă a grinzii T solicitată la încovoiere în planul xOz, sînt simetrice în raport cu acest plan pînă la pierderea stabilității grinzii.

La apariția pierderii stabilității generale a grinzii T sub formă antisimetrică, deformata grinzii (și implicit a plăcii) va avea două componente, una simetrică, corespunzătoare stării inițiale, $u^s(y, z)$, prezentă oricare ar fi mărimea solicitării, și alta antisimetrică $u^a(y, z)$, dacă încărcarea depășește limita sa critică

$$u(y, z) = u^s(y, z) + u^a(y, z). \tag{4}$$

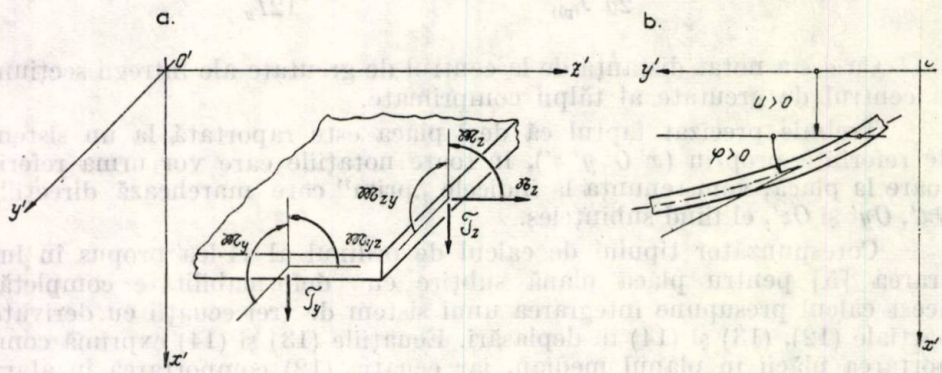


Fig. 4

Efectuînd calculele în cadrul ipotezei micilor deplasări, cu consecințele cunoscute asupra formulării și rezolvării problemelor de stabilitate, încărcarea critică reprezintă solicitarea pentru care grinda T admite pe lîngă componenta simetrică și una antisimetrică a cărei amplitudine este nedeterminată.

Fiecare din funcţiile $u^s(y, z)$ şi $u^a(y, z)$ satisface ecuaţia (3) şi, în mod diferenţiat, condiţiile pe contur pentru $y \geqslant 0$, astfel :

I) $u^s(y, z)$	II) $u^a(y, z)$	
$u^s(y, 0) = u^s(y, l) = 0$;	$u^a(y, 0) = u^a(y, l) = 0$,	(5)
$\mathfrak{M}^s_y(y, 0) = \mathfrak{M}^s_y(y, l) = \mathfrak{M}^0_y$;	$\mathfrak{M}^a_y(y, 0) = \mathfrak{M}^a_y(y, l) = 0$,	(6)
$u^s(0, z) = u_g(z)$;	$u^a(0, z) = 0$,	(7)
$\left.\frac{\partial u^s(y, z)}{\partial y}\right\|_{y=0} = 0$;	$\left.\frac{\partial u^a(y, z)}{\partial y}\right\|_{y=0} = \varphi_g(z)$,	(8)
$\mathfrak{M}^s_y(a, z) = 0$;	$\mathfrak{M}^a_y(a, z) = 0$,	(9)
$\mathfrak{T}^{s*}_y(a, z) = 0$;	$\mathfrak{T}^{a*}_y(a, z) = 0$.	(10)

S-au notat cu $u_g(z)$ şi $\varphi_g(z)$ săgeata verticală şi respectiv, rotirea (în convenţia de semne admisă pentru placă) porţiunii din secţiunea transversală a grinzii admisă indeformabilă, iar cu $\mathfrak{T}^*_y(a, z)$ forţa tăietoare convenţională corespunzătoare unei margini libere a plăcii,

$$\mathfrak{T}^*_y(a, z) = \mathfrak{T}_y(a, z) + \frac{\partial \mathfrak{M}_{yz}(a, z)}{\partial z}. \tag{11}$$

Condiţiile (7) şi (8) exprimă că placa este integrată în ansamblul grinzii T.

Pentru cele două ansambluri de condiţii la limită I. (5) — 1. (10) şi II.(5) — II.(10), funcţiile $u^s(y, z)$ şi, respectiv, $u^a(y, z)$ pot fi găsite independent şi complet.

Determinarea stărilor de efort şi deformaţie la grinda T cu talpa superioară lată şi subţire corespunzătoare unei deformate plane, simetrice, se poate face cu metoda propusă în lucrarea [4].

Deoarece pentru cazul pierderii stabilităţii generale a grinzii T interesează doar $u^a(y, z)$ şi condiţiile la limită corespunzătoare, în cele ce urmează prin $u(y, z)$ vom înţelege doar deformata antisimetrică, iar prin relaţiile (5)—(10) condiţiile sale de contur.

Se admite, pentru ecuaţia (3), o soluţie de forma

$$u(y, z) = Y(y) \sin \lambda z, \tag{12}$$

în care $\lambda = n\pi/l$.

Obligînd ca $u(y, z)$ sub forma (12) să fie o soluţie a ecuaţiei (3), se obţine o ecuaţie diferenţială ordinară cu coeficienţi constanţi avînd ca necunoscută pe $Y(y)$. Soluţia generală a acestei ecuaţii este

$$Y(y) = C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y, \tag{13}$$

în care

$$\alpha = \sqrt{\lambda^2 + \lambda\sqrt{\frac{\mathfrak{M}_z^0}{D}}} \quad \text{și} \quad \beta = \sqrt{-\lambda^2 + \lambda\sqrt{\frac{\mathfrak{M}_z^0}{D}}}. \tag{14}$$

Ținînd seama de (13), relația (12) capătă forma (15).

$$u(y, z) = (C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y + C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y) \sin \lambda z. \tag{15}$$

Prin forma sa, soluția (15) satisface condițiile (5) și (6).
Constantele arbitrare $C_1 \ldots C_4$ se află cu ajutorul condițiilor (7)—(10).
Condițiile (7) și (8) ne conduc la relațiile (16) și (17)

$$C_1 + C_3 = 0, \tag{16}$$

$$(\alpha C_2 + \beta C_4) \sin \lambda z = \varphi_g(z). \tag{17}$$

Ținînd seama de expresiile eforturilor secționale,

$$\mathfrak{M}_y = -D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) = -D[(\alpha^2 - \mu\lambda^2)(C_1 \operatorname{ch} \alpha y + C_2 \operatorname{sh} \alpha y) -$$

$$- (\beta^2 + \mu\lambda^2)(C_3 \cos \beta y + C_4 \sin \beta y)] \sin \lambda z,$$

$$\mathfrak{T}_y^* = -D\left[\frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + (2 - \mu)\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z^2}\right] = \{\alpha[\alpha^2 - (2 - \mu)\lambda^2](C_1 \operatorname{sh} \alpha y -$$

$$- C_2 \operatorname{ch} \alpha y) - \beta[\beta^2 + (2 - \mu)\lambda^2(-C_3 \sin \beta y + C_4 \cos \beta_y)\} \sin \lambda z,$$

prin particularizarea acestora pentru $y = a$ se obțin condițiile la limită (9) și (10) sub forma (18) și (19).

$$(\alpha^2 - \mu\lambda^2)(C_1 \operatorname{ch} \alpha a + C_2 \operatorname{sh} \alpha a) -$$

$$- (\beta^2 + \mu\lambda^2)(C_3 \cos \beta a + C_4 \sin \beta a) = 0, \tag{18}$$

$$\alpha[\alpha^2 - (2 - \mu)\lambda^2](C_1 \operatorname{sh} \alpha a + C_2 \operatorname{ch} \alpha a) -$$

$$- \beta[\beta^2 + (2 - \mu)\lambda^2](- C_3 \sin \beta a + C_4 \cos \beta a) = 0. \tag{19}$$

Relațiile (16)—(19) permit aflarea constantelor arbitrare în funcție de $\varphi_g(z)$, deocamdată neprecizat, care asigură totodată și corelarea deformațiilor plăcii cu cele ale ansamblului.

§3. RELAȚII STATICE ȘI GEOMETRICE PENTRU GRINDA T PRIVITĂ ÎN ANSAMBLU

Relațiile statice (S) și geometrice (G) ale calculului de ordinul al II-lea în metoda diferențială pentru bara curbă în spațiu sînt, potrivit lucrării [1], următoarele :

$$(S)\quad \begin{cases} \dfrac{dT_x}{ds} + qN_z - rT_y + f_x = 0, \\ \dfrac{dT_y}{ds} + rT_x - pN_z + f_y = 0, \qquad * \qquad (20) \\ \dfrac{dN_z}{ds} + pT_y - qT_x + f_z = 0, \\ \dfrac{dM_x}{ds} + qM_z - rM_y - T_y + m_x = 0, \qquad * \qquad (21) \\ \dfrac{dM_y}{ds} + rM_x - pM_z - T_x + m_y = 0, \\ \dfrac{dM_z}{ds} + pM_y - qM_x + m_z = 0, \qquad * \qquad (22) \end{cases}$$

$$(G)\quad \begin{cases} \beta = \dfrac{du}{ds} + q_0 w - r_0 v, \\ -\alpha = \dfrac{dv}{ds} + r_0 u - p_0 w, \qquad * \qquad (23) \\ 0 = \dfrac{dw}{ds} + p_0 v - q_0 u, \\ \delta_p = \dfrac{d\alpha}{ds} + q_0\gamma - r_0\beta, \qquad * \qquad (24) \\ \delta_q = \dfrac{d\beta}{ds} + r_0\alpha - p_0\gamma, \\ \delta_r = \dfrac{d\gamma}{ds} + p_0\beta - q_0\alpha. \qquad * \qquad (25) \end{cases}$$

Pentru scrierea relațiilor de mai sus s-a avut în vedere atașarea, la fiecare punct al liniei centrelor de greutate, a unui sistem triortogonal stîng de axe $xGyz$ (axa Gz coincide cu tangenta la curbă în puncte considerat, iar axele Gx și Gy cu direcțiile principale de inerție ale secțiunii transversale).

Semnificațiile mărimilor care intervin în grupurile (S) și (G) sînt următoarele :

T_x, T_y, N_z, = componentele solicitării interioare globale de tip forță, calculate pe poziția deformată,

M_x, M_y, M_z = componentele solicitării interioare globale de tip cuplu, calculate pe poziția deformată,

f_x, f_y, f_z, = componentele forțelor exterioare distribuite,

m_x, m_y, m_z = componentele cuplurilor exterioare distribuite,

u, v, w = componentele deplasării originii triedrului la trecerea barei în poziția defirmată,

α, β, γ = componentele rotației triedrului,

p_0, g_0, r_0 și p, q, r = componentele curburii și torsiunea barei înainte și respectiv după deformare.

Convenim că toate mărimile de mai sus sînt pozitive dacă în reprezentare vectorială (în cazul cuplurilor și al rotirilor reprezentarea va fi făcută în conformitate cu regula șurubului stîng) sensul lor coincide cu cel al axei față de care se ia componenta considerată.

În cazul silicitărilor interioare globale care, după cum se cunoaște, sînt solicitări perechi, convenția de mai sus se aplică celor care acționează pe fațeta din secțiune a cărei normală exterioară coincide ca sens cu versorul tangentei la curbă.

Semnificațiile grupurilor (S) și (G) sînt următoarele :

Grupul (S) exprimă faptul că un element de bară ds, solicitat de încărcările exterioare și eforturile interioate aferente, este în echilibru.

Grupul (G) exprimă legătura existentă între translația triedrului, rotirea sa și variațiile componentelor de curbură și de torsiune ale barei la trecerea ei din poziția naturală (nesolicitată) în cea deformată.

Cele două grupuri au fost stabilite în ipoteza că singurele solicitări care provoacă deformarea barei sînt încovoierea și răsucirea.

În continuare vom examina posibilitățile de particularizare relațiilor de mai sus (evident, numai a acelor care ne interesează) în cazul grinzii T cu talpă lată flexibilă.

Principala premisă care a stat la baza calculului de ordinul al II-lea prezentat în [1] este aceea a *barelor indeformabile în secțiune transversală*. Această premisă are drept consecință faptul că în situațiile naturală sau deformată, centrul de greutate și axele centrale principale de inerție ocupă aceeași poziție în secțiunea transversală, asigurîndu-se în acest fel posibilitatea identificării acelei fibre a barei pentru care elementul de arc ds are o lungime constantă, precum și a deplasărilor triedrului principal al barei (translație, rotație).

În ceea ce privește poziția centrului de greutate al grinzii T este remarcat că componenta antisimetrică a deformației tălpii nu modifică această poziție în timp ce componenta simetrică joacă un rol nesemnificativ pentru valori ale momentului încovoietor inferioare celei ce provoacă pierderea stabilității laterale a grinzii, fapt pus de noi în evidență atît teoretic, prin aplicații numerice pe baza lucrării, cît și experimental. În concluzie, se poate admite că poziția centrului de greutate al secțiunii

grinzii T în poziția deformată este fixă și aceeași cu cea din secțiunile poziției naturale (și aceasta cu atît mai mult cu cît fenomenul de instabilitate de care ne ocupăm are un caracter antisimetric).

În ceea ce privește direcțiile axelor principale ale secțiunii transversale ele sînt neinfluențate de deformația simetrică a tălpii dar modificate de cea antisimetrică, fapt care ar putea influența structura relațiilor fizice și va fi discutat în paragraful următor.

Dacă prin „triedrul principal" al barei vom înțelege un triedru format din tangenta la axa barei, axa de simetrie a părții indeformabile din secțiunea transversală și axa normală pe cea de simetrie; prin T_x, T_y, N_z, și M_y, M_x, M_z componentele în raport cu acest triedru ale torsorului de reducere al solicitărilor exterioare aflate în dreapta secțiunii considerate, prin u, v, w și α, β, γ componentele deplasării „triedrului principal", ținînd seama și de considerațiile anterioare privind *poziția fixă* a centrului de greutate, putem trage concluzia că relațiile ce alcătuiesc grupurile (S) și (G) pot fi acceptate ca adevărate și în cazul grinzii T cu talpă lată flexibilă.

În grupurile (S) și (G) relațiile care intersesează în pierderea stabilității laterale au fost marcate cu asterisc și numerotate de la (20) la (25).

Grinda T de care ne ocupăm are axa inițială dreaptă și coincide cu axa Oz a sistemului de referință unic $Oxyz$; în această situație elementul de arc ds al axei barei devine identic cu elementul de lungime pe axa Oz ($ds \equiv dz$).

Întrucît axa grinzii T este inițial rectilinie și nu există răsucire naturală, mărimile p_0, q_0 și r_0 sînt nule, iar δp, δq și δr se identifică cu p, q și, respectiv, r.

În aceste condiții relațiile (23), (24) și (25) devin:

$$-\alpha = \frac{dv}{dz}; \quad p = \frac{d\alpha}{dz}; \quad r = \frac{d\gamma}{dz},$$

sau, după eliminarea lui α,

$$p = -\frac{d^2v}{dz^2}; \quad r = \frac{d\gamma}{dz}.$$

O situație de solicitare oarecare a grinzii în planul xOz are diferite de zero, trei componente ale încărcării exterioare (f_x^0, f_z^0 și m_y^0) și trei componente ale solicitării interioare obținută printr-un calcul de ordinul I (T_x^0, N_z^0 și M_z^0).

Dacă se notează cu F și F^0 unul și același efort interior obținut prin calcul de ordinul al II-lea și, respectiv de ordinul I, $F = F^0 + \delta F$, unde cu δF s-a notat variația efortului F apărută ca urmare a scrierii relațiilor de echilibru pe poziția deformată.

Ținînd seama că $T_x = T_x^0 + \delta T_x$, $T_y = \delta T_y$, $N_z = N_z^0 + \delta N_z$, $M_x = \delta M_x$, $M_y = M_y^0 + \delta M_y$, $M_z = \delta M_z$, că mărimile $p \cdot q$ și r pot fi asimilate cu niște infiniți mici de același ordin de mărime cu variațiile δF,

după neglijarea variațiilor de ordinul al II-lea, relațiile (20), (21) și (22) devin :

$$\frac{dT_y}{dz} + rT_x^0 - pN_z^0 + f_y = 0, \tag{20'}$$

$$\frac{dM_x}{dz} - rM_y^0 - T_y + m_x = 0, \tag{21'}$$

$$\frac{dM_z}{dz} + pM_y^0 + m_z = 0. \tag{22'}$$

Eliminînd T_y între (20') și (21'), efectuînd înlocuirile permise de (26) obținem :

$$f_y + \frac{dm_x}{dx} = \frac{d\gamma}{dz}\left(\frac{dM_y^0}{dz} - T_x^0\right) + \frac{d^2\gamma}{dz^2}M_y^0 - \frac{d^2v}{d^2z}N_z^0 - \frac{d^2Mx}{dz^2}, \tag{27}$$

$$m_z = \frac{d^2v}{dz^2}M_y^0 - \frac{dM_z}{dz}. \tag{28}$$

În cazul particular al grinzii solicitate la încovoiere pură M în planul xOz, relațiile (27) și (28) devin :

$$-\frac{d^2M_x}{dz^2} + M\frac{d^2\gamma}{dz^2} = 0, \tag{29}$$

$$\frac{dM_z}{dz} - M\frac{d^2v}{dz^2} = 0. \tag{30}$$

§ 4. RELAȚII FIZICE PENTRU GRINDA T PRIVITĂ ÎN ANSAMBLU

Cu privire la relațiile fizice, relații de legătură între caracteristicile deformatei și eforturile globale în secțiunea transversală, nici o considerație nu poate fi făcută fără a ține seama de particularitățile de alcătuire ale grinzii (placă flexibilă, restul secțiunii indeformabil în planul său). Căutînd pentru problema stabilității grinzii T cu talpă lată flexibilă cea mai simplă și totodată o eficientă formulare, atîta timp cît aspectele static și geometric nu sînt modificate față de problema similară din rezistența materialelor, *rezultă că singura posibilitate pe care o avem la dispoziție pentru a prinde în calcul specificul grinzii T, o constituie modul de tratare al aspectului fizic.*

Pierderea stabilității generale sub formă antisimetrică modifică atît geometria grinzii prin deplasările v, γ și u (componenta antisimetrică), cît și componentele solicitării interioare globale prin apariția unor solicitări de încovoiere laterală M_x și de răsucire M_z.

Deplasările v, γ și u fiind mici, M_x și M_z se vor exprima în funcție de acestea prin relații de forma (31)

$$M_x = M_{xu} + M_{xv} + M_{x\gamma},$$
$$M_z = M_{zu} + M_{zv} + M_{x\gamma}, \tag{31}$$

ceea ce presupune neglijarea variațiilor de ordin superior.

În categoria variațiilor de ordin superior ce pot fi neglijate intră și cele a căror cauză o constituie modificarea, în funcție de deplasările u, a caracteristicilor secțiunii transversale.

Într-adevăr, dacă ținem seama că toți termenii care intră în partea dreaptă a relațiilor (31) sînt funcții biliniare de o anumită caracteristică de rigiditate a secțiunii și de amplitudinea unei deplasări considerată apriori ca fiind mică, variația respectivei caracteristici de rigiditate, ca urmare a modificării formei, prin deplasările u, înmulțită cu oricare din amplitudinile lui u, v sau γ, este neglijabilă.

Pentru găsirea expresiilor lui $M_{x\gamma}$ și $M_{z\gamma}$, M_{xv} și M_{zv}, M_{xu} și M_{zu}, vom obliga grinda la deplasări independente prin a căror sumare să rezulte deformata reală.

Concepînd secțiunea deformată în poziție deplasată drept consecința unor deplasări de transport v și γ peste care se suprapun deplasările relative u_r vom avea următoarele trei situații:

I. $v \neq 0$, $\gamma = 0$, $u_r = 0$ (fig. 5,*a*),

$$M_{xv} = -B_x \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}; \quad M_{zv} = 0. \tag{32}$$

Prima dintre aceste relații presupune valabilitatea, pentru încovoierea laterală a întregii secțiuni, a modelului fizic acceptat în rezistența materialelor pentru încovoiere (cu B_x s-a notat rigiditatea la încovoiere a *întregii* secțiuni). Este posibil ca în cazul pierderii stabilității cu un număr

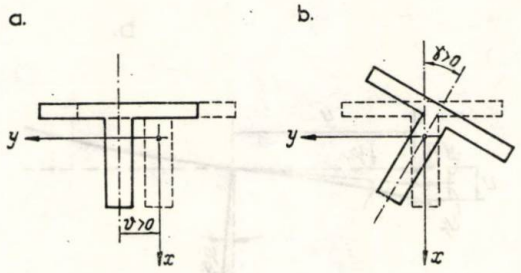


Fig. 5

mai mare de semiunde, distanța dintre două puncte de inflexiune consecutive raportată la lățimea tălpii superioare să încadreze elementul încovoiat lateral în categoria grinzilor scurte sau de lungime medie. Întrucît

luarea în considerare, pentru placă, a unor eventuale efecte de grindă medie sau scurtă atrage după sine importante dificultăți de calcul fără a fi compensate de calitatea rezultatelor (cu cît numărul de semiunde este mai mare, cu atît rolul jucat de încovoierea laterală în pierderea stabilității generale este mai mic), adoptarea, pentru întreaga secțiune, a modelului din rezistența materialelor apare ca deplin justificată

II. $v = 0\,;\quad \gamma \neq 0\,;\quad u_r = 0$ (fig. 5 *b*),

$$M_{x\gamma} = 0, \qquad M_{z\gamma} = C\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}z}. \tag{33}$$

Cea de-a II-a relație (33) presupune valabilitatea modelului fizic acceptat în rezistența materialelor pentru bara răsucită (cu C s-a notat rigiditatea la răsucire a întregii secțiuni considerată indeformabilă în planul său).

III. $v = 0\,;\quad \gamma = 0\,;\quad u_r \neq 0$ (fig. 6*a*).

Pentru evaluarea momentelor M_{xu} și M_{zu} se secționează grinda evidențiindu-se eforturile secționale $\mathfrak{M}_{zy}(ur)$ și $\mathfrak{T}_z(u_r)$ (fig. 6 *b*)

$$M_{xu} = 0\,;\quad M_{zu} = -\int_{(pl)} \mathfrak{T}_z(ur)\cdot y\cdot \mathrm{d}y + \int_{(pl)} \mathfrak{M}_{zy}(ur)\cdot \mathrm{d}y. \tag{34}$$

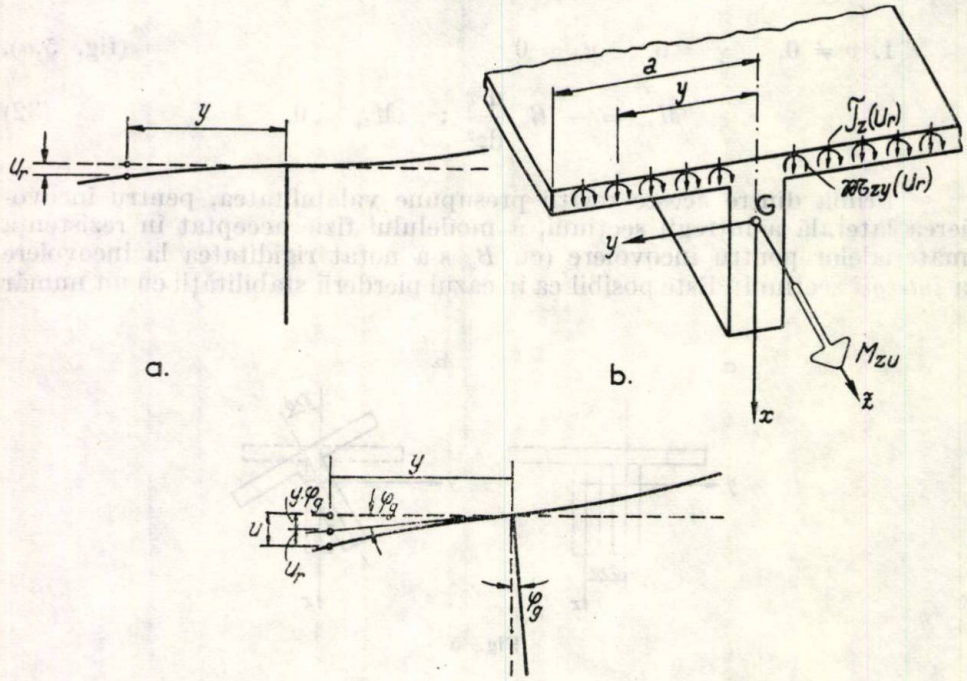


Fig. 6

Înlocuind în (34) expresiile generale ale eforturilor $\mathfrak{M}_{zy}$ și $\mathfrak{T}_z$

$$\mathfrak{M}_{zy}(u_r) = -D(1-\mu)\frac{\partial^2 u_r}{\partial y \partial z}; \quad \mathfrak{T}_z(u_r) = -D\frac{\partial}{\partial z}(\Delta u_r),$$

ținînd seama de expresia deplasării relative u_r, obținută cu ajutorul săgeții absolute u, și a rotirii $\varphi_g(z)$ (fig. 6*c*)

$$u_r = u - y\varphi_g(z) \tag{35}$$

obținem expresia momentului M_{zu}

$$M_{zu} = 2D\int_0^a \frac{\partial}{\partial z}[\Delta(u - y\cdot\varphi_g)]\,y\,dy - 2D(1-\mu)\int_0^a \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}(u - y\cdot\varphi_g)\,dy. \tag{36}$$

Ținînd seama de (17), efectuînd integralele din (36) și introducînd notațiile,

$$\begin{aligned}
H_1 &= (\alpha^2-\lambda^2)\left(\frac{a}{\alpha}\operatorname{sh}\alpha a - \frac{1}{\alpha^2}\operatorname{ch}\alpha a + \frac{1}{\alpha^2}\right) - (1-\mu)(\operatorname{ch}\alpha a - 1),\\
H_2 &= (\alpha^2-\lambda^2)\left(\frac{a}{\alpha}\operatorname{ch}\alpha a - \frac{1}{\alpha^2}\operatorname{sh}\alpha a\right) - (1-\mu)\operatorname{sh}\alpha a,\\
H_3 &= -(\beta^2+\lambda^2)\left(\frac{1}{\beta^2}\cos\beta a + \frac{a}{\beta}\sin\beta a - \frac{1}{\beta^2}\right) - (1-\mu)(\cos\beta a - 1),\\
H_4 &= -(\beta^2+\lambda^2)\left(\frac{1}{\beta^2}\sin\beta a - \frac{a}{\beta}\cos\beta a\right) - (1-\mu)\sin\beta a,
\end{aligned} \tag{37}$$

relația (36) devine :

$$M_{zu} = 2D\left[(\alpha a C_2 + \beta a C_4)\left(\frac{\lambda^2 a^2}{3} + 1 - \mu\right) + C_1H_1 + C_2H_2 + C_3H_3 + C_4H_4\right]\lambda\sin\lambda z. \tag{38}$$

Întrucît $\gamma = -\varphi_g$ (convențiile de semn pentru rotirea secțiunii grinzii și pentru rotirea tangentei la deformata plăcii, sînt inversate)

$$\gamma = -(\alpha C_2 + \beta C_4)\sin\lambda z, \tag{39}$$

avînd în vedere relațiile (32), (33), (34), (38) și (39), relațiile fizice (31) capătă expresiile definitive,

$$M_x = -B_x \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}, \tag{40}$$

$$M_z = \lambda \cos \lambda z \left\{ (\alpha C_2 + \beta C_4) \left[-C + 2Da \left(\frac{\lambda^2 a^2}{3} + 1 - \mu \right) \right] + \right.$$

$$\left. + 2D(C_1 H_1 + C_2 H_2 + C_3 H_3 + C_4 H_4) \right\}. \tag{41}$$

În încheierea considerațiilor privitoare la aspectul fizic al problemei este necesar să scoatem în evidență ideea conducătoare a acestui paragraf și anume că pentru deplasările de transport au fost aplicate modelele clasice pentru răsucire și încovoiere, iar pentru deplasările relative modelul plăcii plane subțiri cu deformabilitate completă.

§ 5. ECUAȚIA DE STABILITATE

Fiind clarificate aspectele static, geometric, fizic, prin găsirea de relații de calcul corespunzătoare problemei care ne interesează și modelului fizic propus, se poate trece la construirea ecuației de stabilitate.

Dispunem de următoarele relații :

(16), (18), (19) — condiții de contur pentru placă,

(29), (30) — relații de sinteză pentru aspectele static și geometric ale ansamblului,

(40), (41) — relații fizice.

La acestea se mai adaugă pentru condiții, cîte două pentru fiecare capăt al grinzii, exprimînd fie comportarea în poziție deplasată a momentului exterior M, fie tipul de legătură exterioară existent la acel capăt.

Pentru cazul particular de care ne ocupăm, aceste condiții sînt următoarele :

$$M_x(0) = M_x(l) = 0,$$
$$\gamma(0) = \gamma(l) = 0. \tag{42}$$

Integrînd de două ori relația (29), obținem

$$-M_x(z) + M \cdot \gamma(z) + K_1 z + K_2 = 0.$$

Ținînd seama de condițiile (42), rezultă că mărimile constante K_1 și K_2 sînt nule, deci că

$$-M_x(z) + M \cdot \gamma(z) = 0. \tag{43}$$

Înlocuind în (43) pe M_x cu expresia (40), eliminînd pe d^2v/dz^2 între (30) și (43) se obține

$$\gamma \frac{M^2}{B_x} + \frac{dM_z}{dz} = 0. \tag{44}$$

Relația (44), în care γ a fost înlocuit prin (39), iar M_z prin (41), trebuie să fie satisfăcută oricare ar fi z, fapt care implică condiția

$$C_1H_1 + C_2H_2 + C_3H_3 + C_4H_4 = -\Phi(\alpha a C_2 + \beta a C_4), \tag{45}$$

unde Φ are expresia

$$\Phi = \left[\frac{M^2}{\lambda^2 B_x C} - 1\right]\frac{C}{2Da} + \left[\frac{(\lambda a)^2}{3} + 1 - \mu\right]. \tag{46}$$

Relația (45), împreună cu relațiile (16), (18) și (19), alcătuiesc un sistem liniar și omogen în C_1, C_2, C_3 și C_4. Condiția ca acest sistem să admită și altă soluție decît cea banală reprezintă ecuația de stabilitate :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{ch}\alpha a & \operatorname{sh}\alpha a & -\frac{1}{K}\cos\beta a & -\frac{1}{K}\sin\beta a \\ \alpha a \operatorname{sh}\alpha a & \alpha a \operatorname{ch}\alpha a & K\beta a \sin\beta a & -K\beta a\cos\beta a \\ H_1 & H_2 + \alpha a\Phi & H_3 & H_4 + \beta a\Phi \end{vmatrix} = 0. \tag{47}$$

Cu K a fost notat raportul

$$K = \frac{\alpha^2 - \mu\lambda^2}{\beta^2 + \mu\lambda^2}. \tag{48}$$

După dezvoltarea determinantului, ținînd seama că H_1, H_2, H_3, H_4 au expresiile (37) și că

$$\alpha^2 - \lambda^2 = \beta^2 + \lambda^2 = \lambda\sqrt{\frac{\mathfrak{M}_z^0}{D}},$$

ecuația de stabilitate poate fi adusă la forma

$$\begin{aligned} \lambda a^2\sqrt{\frac{\mathfrak{M}_z^0}{D}}\Bigg[&\left(\frac{\beta a}{\alpha a} + K\frac{\alpha a}{\beta a}\right)\left(\frac{1}{K\beta a}\sin\beta a + \frac{1}{\alpha a}\operatorname{sh}\alpha a\right) - \\ &- \left(K\frac{\beta a}{\alpha a} + \frac{\alpha a}{\beta a}\right)\left(\cos\beta a + \frac{1}{K}\operatorname{ch}\alpha a\right) + \\ &+ \left(\frac{\alpha a}{\beta a} - \frac{\beta a}{\alpha a}\right)\left(\frac{1}{K\beta a}\operatorname{ch}\alpha a\sin\beta a - \frac{K}{\alpha a}\operatorname{sh}\alpha a\cos\beta a\right)\Bigg] + \\ &+ (1-\mu)(1+K)\left(\frac{\alpha a}{K}\sin\beta a + \beta a\operatorname{sh}\alpha a\right) = \\ = (\alpha a)(\beta a)\Phi&\left[2 + \left(K + \frac{1}{K}\right)\operatorname{ch}\alpha a\cos\beta a + \left(-\frac{\alpha a}{K\beta a} + \frac{K\beta a}{\alpha a}\right)\operatorname{sh}\alpha a\sin\beta a\right]. \end{aligned} \tag{49}$$

Este interesant de remarcat faptul că în anumite situații limită ecuația (49) se particularizează în ecuațiile de stabilitate ale unor cazuri cunoscute.

Astfel pentru $a \to 0$, relația (49) nu poate fi satisfăcută decît dacă

$$\frac{M^2}{\lambda^2 B_x C} - 1 = 0,$$

ceea ce reprezintă ecuația clasică în rezistența materialelor, a stabilității laterale a grinzii încovoiate, iar atunci cînd $C \to \infty$ relația (49) nu poate fi satisfăcută decît dacă

$$2 + \left(K + \frac{1}{K}\right) \operatorname{ch} \alpha a \cos \beta a + \left(-\frac{\alpha a}{K\beta a} + \frac{K\beta a}{\alpha a}\right) \operatorname{sh} \alpha a \sin \beta a = 0,$$

ceea ce reprezintă cunoscuta ecuație a stabilității plăcii rezemată pe laturile $z = 0$ și $z = l$, încastrată pe latura $y = 0$ și liberă pe latura $y = a$.

Rezolvarea ecuației (49) se face prin încercări, modificînd pe de o parte numărul de semiunde al deformatei, iar pe de alta căutînd, tot prin încercări, valoarea momentului M care pentru un n dat satisface ecuația de stabilitate. Dintre toate aceste soluții, cîte una pentru fiecare n, se reține valoarea cea mai mică.

Dificultatea soluționării manuale a unor probleme concrete fiind evidentă, autorii au conceput și verificat un program optimizat de rezolvare a ecuației de stabilitate la un calculator electronic.

În paralel s-au efectuat verificări experimentale pe grinzi-model la scară mare confecționate din diferite materiale.

Rezultatele calculului teoretic sînt în deplină concordanță cu rezultatele obținute experimental.

Prezentarea mai detaliată a programului de calcul, a experimentărilor numerice efectuate cu ajutorul lui, a rezultatelor experimentărilor fizice pe modele din diferite materiale precum și compararea rezultatelor teoretice cu cele experimentale vor constitui obiectul unei lucrări care urmează celei de față.

Primită la redacție la 20 septembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. S. D. Ponomariov, ș.a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. III, Edit. tehnică, București, 1964.
2. S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Teoria plăcilor plane și curbe*, Editura tehnică, București, 1968.
3. S. Timoshenko, J. Gere, *Teoria stabilității elastice*, Editura tehnică, București, 1967.
4. D. Coșa, C. Pavel *Calculul de ordinul II al grinzilor „T" cu talpă lată, flexibilă, la încovoiere dreaptă*, St. cerc. mec. apl., **33**, *1*, (1974).
5. D. Coșa, , C. Pavel, *Calculul de ordinul II al plăcilor plane cu considerarea deformabilităților în planul său a suprafeței mediane*, St. cerc. mec. apl., **31** (1972).

METODE ENERGETICE PENTRU STUDIUL CIOCNIRILOR

ŞTEFAN STAICU
Institutul politehnic Bucureşti

Lucrarea prezintă cîteva metode energetice pentru studiul ciocnirii unui sistem de puncte materiale cu mai multe grade de libertate.
Astfel se demonstrează teorema energiei cinetice faţă de centrul maselor care serveşte pentru studiul ciocnirii sistemului material, în mişcarea sa în jurul centrului maselor.
În continuare se deduc ecuaţiile lui Lagrange în cazul fenomenului de ciocnire, introducîndu-se noţiunea de percuţie generalizată. Ca aplicaţie, pornind de la aceste relaţii, se deduc ecuaţiile ciocnirii rigidului liber în mişcarea generală.

Se consideră un sistem de puncte materiale $A_1, A_2, \ldots, A_n$ de mase $m_1, m_2, \ldots$, respectiv m_n, care se ciocnesc într-un interval de timp scurt $\delta t = t'' - t'$. Asupra fiecărui punct material A_i va acţiona forţa percutantă $\vec{F}_i$ egală cu rezultanta tuturor forţelor percutante exterioare concurente în acel punct şi forţele percutante interioare $\vec{F}_{ij}$ care provin din ciocnirea punctului A_i cu celelalte puncte ale sistemului.

Studiul ciocnirii sistemului material poate fi efectuat cu ajutorul teoremelor generale din cazul fenomenului de ciocnire.

În cele ce urmează vom arăta că aceste fenomene pot căpăta soluţionări interesante dacă se utilizează unele metode energetice.

1. TEOREMA ENERGIEI CINETICE FAŢĂ DE CENTRUL MASELOR

Această teoremă serveşte pentru studiul ciocnirii unui sistem material, în mişcarea sa în jurul centrului maselor. Cu ajutorul ei se poate determina variaţia energiei cinetice, pe perioada ciocnirii, în mişcarea sistemului faţă de centrul maselor C, adică în raport cu un triedru cu originea în C şi cu axele de direcţii fixe, deşi există un salt al vitezei lui C (fig. 1).

Mai întîi vom demonstra o teoremă analoagă cu a doua teoremă a lui Koenig [4]. Ea va stabili relaţia dintre energia cinetică a vitezelor pierdute din mişcarea unui sistem material în raport cu un reper fix şi energia cinetică corespunzătoare din mişcarea relativă în jurul centrului de greutate.

ERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 4, 1976, P. 531–538

Ţinînd seama de relaţia cinematică dintre viteza $\vec{v}_i$ a unui punct oarecare A_i şi viteza $\vec{v}_c$ a centrului maselor C (fig. 1):

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_i', \tag{1}$$

expresia energiei cinetice a vitezelor pierdute se scrie succesiv:

$$E_0 = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i'' - \vec{v}_i')^2 = \sum \frac{1}{2} m_i [\vec{v}_c'' - \vec{v}_c' + (\vec{\omega}'' - \vec{\omega}') \times \vec{r}_i']^2 =$$

$$= \frac{1}{2} (\sum m_i)(\vec{v}_c'' - \vec{v}_c')^2 + \sum m_i (\vec{v}_c'' - \vec{v}_c') [(\vec{\omega}'' - \vec{\omega}') \times \vec{r}_i'] +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\omega}'' \times \vec{r}_i' - \vec{\omega}' \times \vec{r}_i')^2 = \frac{1}{2} M (\vec{v}_c'' - \vec{v}_c')^2 + \tag{2}$$

$$+ (\vec{v}_c'' - \vec{v}_c') [\vec{\omega}'' - \vec{\omega}') \times (\sum m_i \vec{r}_i')] + \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\omega}'' \times \vec{r}_i' - \vec{\omega}' \times \vec{r}_i')^2.$$

Observînd că momentul static al sistemului de puncte materiale în raport cu punctul C este nul, termenul al doilea se scrie:

$$\vec{v}_c'' - \vec{v}_c') [\vec{\omega}'' - \vec{\omega} m') \times \sum_i \vec{r}_i'] = M (\vec{v}_c'' - \vec{v}_c') [(\vec{\omega}'' - \vec{\omega}') \times \vec{\rho}'] = 0. \tag{3}$$

În aceste condiţiuni, relaţia (2) devine

$$E_0 = \frac{1}{2} M (\vec{v}_c'' - \vec{v}_c')^2 + \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega}'' \times \vec{r}_i' - \vec{\omega}' \times \vec{r}_i')^2, \tag{4}$$

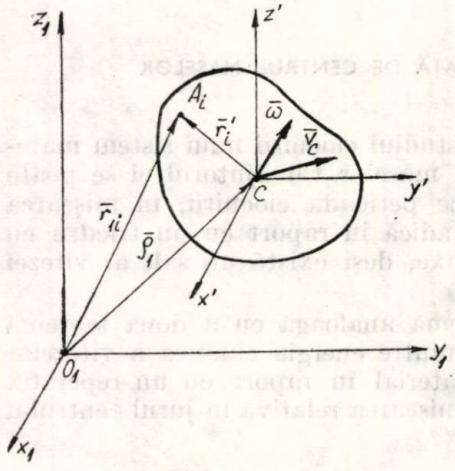


Fig. 1

sau mai simplu

$$E_0 = \frac{1}{2} M (\vec{v}_c'' - \vec{v}_c')^2 + E_{0C}. \tag{5}$$

În această relaţie

$$E_{0C} = \sum \frac{1}{2} m_i (\vec{\omega}'' \times \vec{r}_i' - \vec{\omega}' \times \vec{r}_i')^2, \tag{6}$$

va reprezenta tocmai energia cinetică a vitezelor pierdute din mişcarea sistemului de puncte materiale faţă de centrul maselor.

Teorema demonstrată se enunţă astfel : *energia cinetică a vitezelor pierdute în mişcarea unui sistem de puncte materiale sau a unui rigid în mişcarea genrală în raport cu un reper fix este egală cu suma dintre energia cinetică a vitezei pierdute de centrul maselor în care s-ar concentra toată masa sistemului şi energia cinetică a vitezelor pierdute în mişcarea sistemului faţă de centrul maselor.*

Pentru demonstrarea teoremei energiei cinetice faţă de centrul maselor vom porni de la relaţia (5) şi de la teorema a doua a lui Koenig şi vom scrie

$$E_C'' - E_C' + E_{0C} = E'' - E' + E_0 - \frac{1}{2} M(\vec{v}_c''^2 - \vec{v}_c'^2) - \frac{1}{2} M(\vec{v}_c'' \vec{v}_c')^2. \quad (7)$$

Ţinînd seama de teorema impulsului

$$\vec{H}'' - \vec{H}' = \sum \vec{\mathscr{P}}_i \quad (8)$$

şi de teorema energiei cinetice [4]:

$$E'' - E' + E_0 = \sum \vec{\mathscr{P}}_i \vec{v}_i'' + \sum \sum \vec{\mathscr{P}}_{ij} \vec{v}_i'', \quad (9)$$

scrise pentru mişcarea sistemului material în raport cu un reper fix, relaţia (7) se scrie

$$E_C'' - E_C' + E_{0C} = \sum \vec{\mathscr{P}}_i \vec{v}_i'' + \sum \sum \vec{\mathscr{P}}_{ij} \vec{v}_i'' - (\sum \vec{\mathscr{P}}_i) \vec{v}_c'' = \\ = \sum \vec{\mathscr{P}}_i (\vec{v}_i'' - \vec{v}_c'') + \sum \sum \vec{\mathscr{P}}_{ij} \vec{v}_i'', \quad (10)$$

unde

$$\vec{\mathscr{P}}_i = \int_{t'}^{t''} \vec{F}_i \, dt, \quad \vec{\mathscr{P}}_{ij} = \int_{t'}^{t''} \vec{F}_{ij} \, dt, \quad (11)$$

reprezintă percuţia exterioară şi, respectiv, percuţiile interioare aplicate punctului material A_i.

Utilizînd şi relaţia (1), expresia (10) devine

$$E_C'' - E_C' + E_{0C} = \sum \vec{\mathscr{P}}_i (\vec{\omega}'' \times \vec{r}_i') + \sum \sum \vec{\mathscr{P}}_{ij} (\vec{\omega}'' \times \vec{r}_i') + (\sum \sum \vec{\mathscr{P}}_{ij}) \vec{v}_c'', \quad (12)$$

sau, în cele din urmă,

$$E_C'' - E_C' + E_{0C} = \sum \vec{\mathscr{P}}_i (\vec{\omega}'' \times \vec{r}_i') + \sum \sum \vec{\mathscr{P}}_{ij} (\vec{\omega}'' \times \vec{r}_i'), \quad (13)$$

adică teorema energiei cinetice, în cazul fenomenului de ciocnire, faţă de centrul maselor, care se enunţă astfel : *suma dintre variaţia, pe durata*

ciocnirii, a energiei cinetice a unui sistem de puncte materiale şi energia cinetică a vitezelor pierdute în aceeaşi perioadă, calculată în mişcarea sistemului faţă de centrul maselor, este egală cu suma produselor scalare dintre percuţiile aplicate punctelor materiale şi vitezele finale ale acestor puncte în mişcarea lor faţă de centrul maselor.

Observaţii

a). Procedînd asemănător ca mai înainte se obţine o formă analoagă cu (13) a teoremei energiei cinetice faţă de centrul maselor :

$$E_C'' - E_C' - E_{0C} = \sum \vec{\mathscr{P}}_i (\vec{\omega}' \times \vec{r}_i') + \sum\sum \vec{\mathscr{P}}_{ij} (\vec{\omega}' \times \vec{r}_i'). \tag{14}$$

b). Dacă se adună sau se scad membru cu membru relaţiile (13) şi (14), rezultă expresiile cantitative analoage ale teoremei lui Kelvin [4] în cazul fenomenului de ciocnire :

$$E_C'' - E_C' = \frac{1}{2} \sum \vec{\mathscr{P}}_i [(\vec{\omega}' + \vec{\omega}'') \times \vec{r}_i'] + \frac{1}{2} \sum\sum \vec{\mathscr{P}}_{ij} [(\vec{\omega}' + \vec{\omega}'') + \vec{r}_i'], \tag{15a}$$

$$E_{0C} = \frac{1}{2} \sum \vec{\mathscr{P}}_i [(\vec{\omega}'' - \vec{\omega}') \times \vec{r}_i'] + \frac{1}{2} \sum\sum \vec{\mathscr{P}}_{ij} [(\vec{\omega}'' - \vec{\omega}) \times \vec{r}_i']. \tag{15b}$$

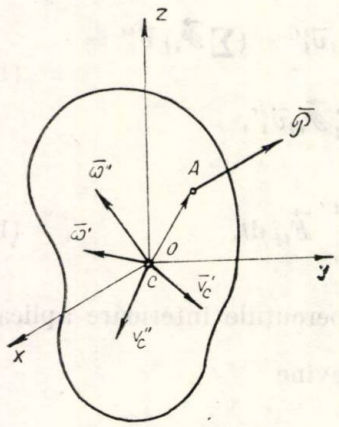


Fig. 2

c). Teorema energiei cinetice faţă de centrul maselor (13) sau teorema lui Kelvin (15 a), aplicate în cazul ciocnirii rigidului liber, reprezintă nişte relaţii scalare care conţin necunoscutele ω_x'' ω_y'', ω_z'' (fig. 2).

În continuare vom arăta că aceste relaţii sînt consecinţe ale ecuaţiilor generale ale ciocnirii, deduse din teorema momentului cinetic faţă de centrul maselor [4]. Pentru aceasta se porneşte de la teorema energiei cinetice (13) :

$$E_{0C} - \delta E_C = \vec{\mathscr{P}} (\vec{\omega}'' \times \vec{CA}), \tag{16}$$

în care

$$\delta E_C = E_C' - E_C'' = \frac{1}{2} (J_1 \omega_x'^2 + J_2 \omega_y'^2 + J_3 \omega_z'^2) - \tag{17a}$$

$$- \frac{1}{2} (J_1 \omega_x''^2 + J_2 \omega_y''^2 + J_3 \omega_z''^2),$$

$$E_{0C}=\frac{1}{2}(J_1\omega_x'^2+J_2\omega_y'^2+J_3\omega_z'^2)+\frac{1}{2}(J_1\omega_x''^2+J_2\omega_y''^2+J_3\omega_z''^2)- \tag{17b}$$

$$-J_1\omega_x'\omega_x''-J_2\omega_y'\omega_y''-J_3\omega_z'\omega_z'',$$

J_1, J_2, J_3 fiind momentele principale şi centrale de inerţie ale rigidului.

Înlocuind în (16) se obţine relaţia

$$\vec{\omega}''\cdot(\vec{K}_C''-\vec{K}_C'-\overrightarrow{CA}\times\vec{\mathscr{P}})=0, \tag{18}$$

care se mai scrie

$$[J_1(\omega_x''-\omega_x')-(y\mathscr{P}_z-z\mathscr{P}_y)]\omega_x''+[J_2(\omega_y''-\omega_y')-(z\mathscr{P}_x-x\mathscr{P}_z)]\omega_y''+$$

$$+[J_3(\omega_z''-\omega_z')-(x\mathscr{P}_y-y\mathscr{P}_x)]\omega_z''=0. \tag{19}$$

Deoarece parametrii cinematici ai mişcării finale a rigidului în jurul centrului de greutate ω_x'', ω_y'' , ω_z'' sînt indpendenţi între ei, relaţia (19) este satisfăcută de soluţiile

$$\begin{aligned}
J_1(\omega_x''-\omega_x')-(y\mathscr{P}_z-z\mathscr{P}_y)&=0,\\
J_2(\omega_y''-\omega_y')-(z\mathscr{P}_x-x\mathscr{P}_z)&=0,\\
J_3(\omega_z''-\omega_z')-(x\mathscr{P}_y-y\mathscr{P}_x)&=0,
\end{aligned} \tag{20}$$

care reprezintă ecuaţiile ciocnirii rigidului în mişcarea faţă de centrul maselor.

Dacă se aplică teorema lui Kelvin sub forma (15a), se obţine relaţia

$$\vec{\omega}''\vec{K}_C''-\vec{\omega}'\vec{K}_C'=(\vec{\omega}'+\vec{\omega}'')(\overrightarrow{CA}\times\vec{\mathscr{P}}). \tag{21}$$

Introducînd termenul : $\vec{\omega}'\vec{K}_C''-\vec{\omega}''\vec{K}_C'$ şi grupînd convenabil, relaţia (21) se scrie mai simplu

$$(\vec{\omega}'+\vec{\omega}'')(\vec{K}_C''-\vec{K}_C'-\overrightarrow{CA}\times\vec{\mathscr{P}})=0, \tag{22}$$

care conduce la aceleaşi ecuaţii (20), observînd că $\omega_x'+\omega_x''$, $\omega_y'+\omega_y''$, $\omega_z'+\omega_z''$, sînt şase mărimi indepenndente.

2. ECUAŢIILE LUI LAGRANGE ÎN CAZUL FENOMENULUI DE CIOCNIRE

Dacă poziţiile punctelor materiale pot fi definite la un moment dat cu ajutorul a h parametri scalari independenţi q_1, q_2,..., q_k,..., q_h, ($h\leqslant 3n$), atunci sistemul respectiv are h grade de libertate, iar parametrii corespunzători reprezintă coordonatele generalizate.

Presupînînd că în timpul ciocnirii punctele materiale nu-şi schimbă poziţiile în raport cu un reper fix, vectorii de poziţie ai punctelor sînt daţi de relaţiile

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \ldots, q_h), \tag{23}$$

ca şi în cazul legăturilor scleronome.

În cele ce urmează se vor determina ecuaţiile generale ale ciocnirii sistemului material, acţionat de forţele percutante exterioare $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$. Considerînd legăturile ideale, rigide şi persistente, apare posibilitatea eliminării din calcule a percuţiilor interioare $\vec{\mathscr{P}}_{ij}$.

Pentru aceasta se porneşte de la teorema energiei cinetice din cazul fenomenului de ciocnire, scrisă pentru mişcarea sistemului în raport cu un reper fix :

$$E'' - E' + E_0 = \sum \vec{\mathscr{P}}_i \vec{v}_i'', \tag{24}$$

în care vom introduce

$$E' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k' \right)^2, \tag{25a}$$

$$E'' = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i''^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k'' \right)^2, \tag{25b}$$

$$E_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i (\vec{v}_i'' - \vec{v}_i')^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left[\sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} (\dot{q}_k'' - \dot{q}_k') \right]^2. \tag{25c}$$

Membrul întîi al relaţiei (24) se mai scrie

$$E'' - E' + E_0 = \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k'' \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} m_i \left(\sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k'' \right) \left(\sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k' \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{h} \left[\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \left(\sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k'' \right) \right] \dot{q}_k'' - \sum_{k=1}^{h} \left[\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \left(\sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k' \right) \right] \dot{q}_k'' =$$

$$= \sum_{k=1}^{h} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right)'' \dot{q}_k'' - \sum_{k=1}^{h} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right)' \dot{q}_k''. \tag{26}$$

Celălalt membru al relaţiei (24) devine

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathscr{P}}_i \vec{v}_i'' = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathscr{P}}_i \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k'' = \sum_{k=1}^{h} \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{\mathscr{P}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k'' = \sum_{k=1}^{h} \Pi_k \dot{q}_k'', \tag{27}$$

în care expresiile

$$\Pi_k = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathscr{P}}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, h), \tag{28}$$

au dimensiunile unor percuţii dacă coordonatele generalizate sînt lungimi sau dimensiunile momentelor unor percuţii dacă mărimile q_k sînt reprezentate prin unghiuri.

Aceste expresii $\Pi_1, \Pi_2, \ldots \Pi_h$ reprezintă componentele unei percuţii aplicate asupra punctului fictiv din spaţiul configuraţiilor al lui Lagrange şi se numesc *percuţii generalizate.*

Cu aceste notaţii relaţia (24) devine

$$\sum_{k=1}^{h} \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right)'' - \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right)' - \Pi_k \right] \cdot q_k'' = 0. \tag{29}$$

Întrucît parametrii $q_1, q_2, \ldots, q_h$ au fost presupuşi independenţi între ei, vitezele generalizate $\dot{q}_1''$, $\dot{q}_2''$, $\ldots$, $\dot{q}_h''$ sînt de asemenea independente iar expresia (29) conduce la relaţiile

$$\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right)'' - \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_k} \right)' = \Pi_k \quad (k = 1, 2, \ldots, h), \tag{30}$$

care reprezintă *ecuaţiile lui Lagrange în cazul fenomenului de ciocnire.*

Observaţii

a) În cazul în care legăturile interioare nu sînt rigide şi persistente, termenul $\sum\sum_{i<j} \vec{\mathscr{P}}_{ij} \vec{v}_i''$ este diferit de zero şi se scrie

$$\sum\sum_{i<j} \vec{\mathscr{P}}_{ij} \vec{v}_i'' = \sum\sum_{i<j} \vec{\mathscr{P}}_{ij} \sum_{k=1}^{h} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \dot{q}_k'' = \sum_{k=1}^{h} \left(\sum\sum_{i<j} \vec{\mathscr{P}}_{ij} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \right) \dot{q}_k'' = \sum_{k=1}^{h} \Pi_k^* \dot{q}_k'', \tag{31}$$

unde s-a notat

$$\Pi_k^* = \sum\sum_{i<j} \vec{\mathscr{P}}_{ij} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \quad (k = 1, 2, \ldots, h). \tag{32}$$

b) Pornind de la ecuaţiile lui Lagrange (30) se pot deduce ecuaţiile ciocnirii rigidului liber în mişcarea generală (fig. 2). Într-adevăr, introducînd expresia energiei cinetice

$$E = \frac{1}{2} M (v_{cx}^2 + v_{cy}^2 + v_{cz}^2) + \frac{1}{2} (J_1 \omega_x^2 + J_2 \omega_y^2 + J_3 \omega_z^2), \tag{33}$$

şi derivînd în raport cu vitezele $\dot{q}_1 = v_{cx}, \dot{q}_2 = v_{cy}, \dot{q}_3 = v_{cz}, \dot{q}_4 = \omega_x, \dot{q}_5 = \omega_y, \dot{q}_6 = \omega_z$, se obţin relaţiile (20) la care se adaugă

$$M(v''_{cx} - v'_{cx}) = \mathscr{P}_x,\ M(v''_{cy} - v'_{cy}) = \mathscr{P}_y,\ M(v''_{cz} - v'_{cz}) = \mathscr{P}_z, \qquad (34)$$

adică tocmai ecuaţiile ciocnirii rigidului în mişcarea generală.

Primit la redacţie la 23 septembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. V. VÂLCOVICI, ŞT. BĂLAN, R. VOINEA, *Mecanică teoretică*, Edit. tehnică, 1958.
2. W. KECS, P. P. TEODORESCU, *Aplicaţii ale teoriei distribuţiilor în mecanică*, Edit. Acad., 1970.
3. ŞT. STAICU, *Mecanica. Statica şi cinematica*, Litografia Institutului politehnic Bucureşti 1973.
4. ŞT. STAICU, *Mecanica. Dinamica şi elemente de mecanica fluidelor*, Litografia Institutului politehnic Bucureşti, 1973.

DETERMINAREA PE CALE OPERAȚIONALĂ A MIȘCĂRILOR VIBROPERCUTANTE PERIODICE

LIVIU BRÎNDEU

Institutul politehnic „Traian Vuia" Timișoara

Folosind calculul operațional se dezvoltă o nouă metodă de a determina mișcările periodice ale unui sistem vibropercutant, direct din ecuațiile diferențiale ale mișcării. Se obține astfel legea mișcării sub forma unei serii Fourier. Pentru exemplificare se ia un sistem vibropercutant format dintr-o masă așezată liber pe o platformă vibrantă.

Mișcările periodice ale sistemelor vibropercutante se determină obișnuit prin integrarea ecuațiilor diferențiale ale mișcării în intervalul dintre două ciocniri succesive și scrierea condițiilor de periodicitate [1] — [3]. Astfel, pe un interval egal cu perioada se obțin legile mișcării care apoi se repetă și în celelalte perioade.

Expresiile analitice ale legilor mișcării periodice valabile în tot timpul mișcării se pot obține numai prin dezvoltarea soluțiilor obținute în serie Fourier. Un astfel de studiu s-a făcut pentru cazul vibratorului simplu rezemat pe un limitator elastic [5] a cărui mișcare era cunoscută [4].

Determinarea legii mișcării sub forma unei serii Fourier mai are avantajul de a permite analiza armonică a mișcării. Experimental, pentru sistemul vibropercutant cu un grad de libertate și o cuplă percutantă s-a arătat că este suficient să se considere numai primele două armonici [6].

Legea mișcării periodice dezvoltată în serie Fourier se va obține printr-o nouă metodă direct din ecuația diferențială a mișcării, folosind calculul operațional. Spre deosebire însă de metoda operațională a lui A. Taplin [7], soluția obținută este identică cu aceea găsită direct prin integrare. Metoda este arătată pe cazul sistemului vibropercutant format dintr-o masă așezată pe o platformă vibrantă.

SISTEMUL VIBROPERCUTANT

Sistemul vibropercutant considerat este format dintr-o masă m așezată liber pe o platformă vibrantă care are pe verticală o mișcare periodică impusă $y = y(t)$.

Notînd cu T perioada, funcția y va satisface condiția de periodicitate

$$y(t + T) = y(t). \tag{1}$$

Dintre mişcările posibile ale sistemului se vor analiza numai acelea care se fac cu desprinderea masei m de platformă. Masa se mişcă liber pe verticală şi se ciocneşte de platformă. Ciocnirea se consideră instantanee cu coeficientul de restituire R. Poziţia masei m se determină prin coordonata relativă x faţă de platformă.

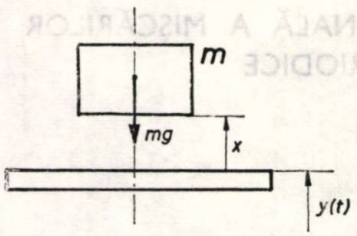


Fig. 1

Ecuaţia diferenţială a mişcării între două ciocniri succesive va fi

$$\ddot{x} = -g - \ddot{y}\,. \tag{2}$$

Dacă se notează prin $t = t_k$ momentul ciocnirii de ordin k, atunci în intervalul dintre ciocnirile de ordin k şi $k+1$, condiţiile iniţiale vor fi

$$x(t_k) = 0\,; \qquad \dot{x}(t_k) = -R\dot{x}_k, \tag{3}$$

iar cele finale

$$x(t_{k+1}) = 0\,; \quad \dot{x}(t_{k+1}) = \dot{x}_{k+1}\,. \tag{4}$$

Mişcările periodice ale căror perioadă trebuie să fie $t_{k+1} - t_k = rT$ $(r = 1, 2, \ldots,)$, se realizează dacă vitezele de la începutul fiecărei ciocniri sînt aceleaşi $\dot{x}_k = \dot{x}_c$ $(k = 1, 2, \ldots,)$.

Folosind condiţiile (3), (4) şi soluţia ecuaţiei (2) s-au determinat, atît mişcările periodice, cît şi stabilitatea lor [8].

FOLOSIREA TRANSFORMĂRII LAPLACE PENTRU STUDIUL MIŞCĂRILOR PERIODICE

Folosind calculul operaţional [9] se va dezvolta o metodă nouă de studiu prin care se poate ajunge pe o cale directă la legea mişcării.

În acest scop se va nota prin $X(p)$ transformata legii mişcării $x(t)$ şi prin $X_0(p)$ transformata aceleiaşi funcţii pe o perioadă rT care începe cu momentul $t = t_0$ $(t_0 > 0)$. Conform definiţiei transformării se poate scrie :

$$X(p) = \int_{t_0}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0+krT}^{t_0+(k+1)rT} x(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Dacă separat în fiecare din integralele ce se însumează în relaţia (5), se fac substituţiile $t = krT + \tau$ $(k = 1, 2, \ldots)$, se obţine

$$X(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t_0}^{t_0+rT} x(krT+\tau)\mathrm{e}^{-p(krT+\tau)}\,\mathrm{d}\tau = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-kprT}\right) \int_{t_0}^{t_0+rT} x(\tau)\mathrm{e}^{-p\tau}\mathrm{d}\tau. \tag{5'}$$

După cum se constată, pentru legea mişcării periodice $x(t)$ cu perioada rT, rezultă

$$X(p) = \frac{X_0(p)}{1 - \mathrm{e}^{-prT}}\,. \tag{6}$$

În același fel, pentru funcția $y(t)$ având perioada T, prin $Y(p)$ se notează transformata, iar prin $Y_0(p)$ transformata pe perioada care începe la momentul $t = t_0$. Folosind același raționament ca la deducerea formulei (6), se obține

$$Y(p) = \frac{Y_0(p)}{1 - e^{-pT}} . \tag{7}$$

Determinarea legii mișcării evident necesită cunoașterea funcției transformate $X_0(p)$ din care se poate apoi calcula $X(p)$.

În acest scop se calculează integrala

$$\int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}(t)e^{-pt}dt = \dot{x}(t_1)e^{-pt_1} - \dot{x}(t_0)e^{-pt_0} + p\,[x(t_1)e^{-pt_1} - x(t_0)e^{-pt_0}] + p^2X_0(p). \tag{8}$$

Dacă aici se folosesc condițiile inițiale (3) și finale (4), se poate scrie

$$\int_{t_0}^{t_1} \ddot{x}(t)e^{-pt}dt = (R + e^{-prT})\dot{x}_c\, e^{-pt_0} + p^2X_0(p). \tag{8'}$$

Procedînd în mod analog se mai găsește

$$\int_{t_0}^{t_1} \ddot{y}\,(t)\, e^{-pt}\, dt = -(1 - e^{-prT})e^{-pt_0}[\dot{y}(t_0) + py(t_0)] + p^2\int_{t_0}^{t_1} y(t)e^{-pt}dt .$$

Dacă în ultima integrală din relația (9) se fac aceleași raționamente ca la deducerea formulei (5'), se obține

$$\int_{t_0}^{t_1} y(t)e^{-pt}dt = \left(\sum_{k=0}^{r-1} e^{kpT}\right)\int_{t_0}^{t_0+T} y\,(t)\, e^{-pt}dt = \frac{1 - e^{-prT}}{1 - e^{-pT}}\, Y_0(p). \tag{9'}$$

Pentru calculul lui $X_0(p)$, se înmulțesc ambii membri ai ecuației diferențiale (2) a mișcării prin factorul e^{-pt} și apoi se integrează între limitele 0 și rT. Ținînd seama de relațiile (8), (8') și (9), după integrare rezultă

$$X_0(p) = (1 - e^{-prT})\left\{\left[\frac{\dot{x}_c + \dot{y}(t_0)}{p^2} + \frac{y(t_0)}{p} - \frac{g}{p^3}\right]e^{-pt_0} - \frac{Y_0(p)}{1 - e^{-pT}}\right\} - \frac{(1 + R)e^{-pt_0}}{p^2}\,\dot{x}_c . \tag{10}$$

Apoi din relația (6), folosind și relația (7), se deduce transformata funcției necunoscute $x(t)$ care va fi dată de ecuația

$$X(p) + Y(p) = \left[\frac{\dot{x}_c + \dot{y}\,(t_0)}{p^2} + \frac{y(t_0)}{p} - \frac{g}{p^3} - \frac{1 + R}{p^2(1 - e^{-prT})}\,\dot{x}_c\right]e^{-pt_0}. \tag{11}$$

Pentru a găsi funcţiile iniţiale se va aplica formula de inversiune Mellin-Fourier [9]. Astfel se obţine

$$x(t) + y(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0-i\infty}^{\sigma_0+i\infty} [X(p) + Y(p)]\, e^{pt}\, dp, \tag{12}$$

în care integrarea se face de-a lungul conturului Bromwich, adică pe dreapta $p = \sigma_0$ care lasă la stînga sa toate punctele singulare ale funcţiei considerate (11).

DETERMINAREA MIŞCĂRILOR PERIODICE

Calculul integralei (11) se poate face prin mai multe metode care conduc la expresii analitice diferite însă echivalente. Deoarece interesează dezvoltarea legii mişcării în serie Fourier, se va folosi pentru rezolvarea problemei teorema reziduurilor.

Este uşor de verificat că pentru funcţia (11) este satisfăcută lema Jordan, astfel că integrala (12) luată de-a lungul semicercului de la infinit situat la stînga conturului, este nulă.

Prin urmare, se poate considera domeniul închis delimitat de dreapta $p = \sigma_0$ şi semicercul situat la stînga acestei drepte a cărui rază tinde la infinit. Punctele singulare din acest domeniu sînt polii,

$$p_j = \frac{2\pi j}{rT} i \quad (j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,), \tag{13}$$

situaţi pe axa imaginară.

Lăsînd de o parte pe $p = 0$, se vede că toţi ceilalţi sînt poli simpli. În ceea ce priveşte $p = 0$, dacă acesta este un pol multiplu, mişcarea nu poate fi periodică.

Ţinînd seama că se determină mişcările periodice, este necesar să se pună condiţia ca şi $p = 0$ să fie un pol simplu. Deci pentru $p = 0$ expresia (11) trebuie să admită un pol simplu.

Din aceste condiţii de existenţă a mişcării se vor determina parametrii mişcărilor periodice.

În primul rînd, pentru ca $p = 0$ să nu fie pol de ordinul trei, este necesar să fie verificată condiţia

$$\lim_{p=0} p^3 [X(p) + Y(p)] = 0. \tag{14}$$

Folosind relaţia (11), din calculul limitei (14) rezultă

$$-g - (1 + R)\, \dot{x}_c \lim_{p=0} \frac{p}{1 - e^{-prT}} = 0$$

şi apoi

$$\dot{x}_c = -\frac{rTg}{1 + R}, \tag{15}$$

Mai trebuie pusă condiţia ca $p = 0$ să nu fie pol de ordinul doi, adică

$$\lim_{p=0} p^2 [X(p) + Y(p)] = 0. \tag{16}$$

Dacă se înlocuieşte aici expresia (11) şi se calculează limita, se obţine

$$\dot{x}_c + \dot{y}(t_0) - \lim_{p=0} \left[\frac{g}{p} + \frac{(1+R)\,\dot{x}_c}{1 - e^{-prT}} \right] = 0$$

sau

$$y(t_0) = \frac{rTg}{1+R} - g \lim_{p=0} \left(\frac{1}{p} - \frac{rT}{1 - e^{-prT}} \right).$$

Apoi se calculează limita şi se ajunge la ecuaţia

$$\dot{y}(t_0) = \frac{rTg}{2} \frac{1-R}{1+R}, \tag{17}$$

din care se determină momentul ciocnirii iniţiale.

După cum se constată, condiţiile pentru ca $p = 0$ să fie un pol simplu coincid chiar cu condiţiile de existenţă ale mişcărilor periodice deduse pe altă cale [8].

Calculul integralei din legea mişcării (12) se face cu ajutorul teoremei reziduurilor.

În primul rînd se vor înlocui condiţiile de existenţă (15) şi (17) în relaţia (11). Apoi se calculează reziduurile relative la toţi polii (13).

Reziduul relativ la polul $p = 0$ va fi

$$\lim_{p=0} p[X(p) + Y(p)]e^{pt} = y(t_0) + g \lim_{p=0} \left[\frac{rT}{2p} \frac{1 + e^{-prT}}{1 - e^{-prT}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{p^2} \right] = y(t_0) + \frac{r^2 T^2 g}{12}. \tag{18}$$

Pentru ceilalţi poli (13) corespunzători valorilor întregi pozitive şi negative ale lui j în afară de zero, reziduurile vor fi

$$\lim_{p=p_j} (p - p_j)[X(p) + Y(p)]e^{pt} = \frac{rTg}{p_j^2} e^{p_j(t-t_0)} \lim_{p=p_j} \frac{p - p_j}{1 - e^{-prT}} =$$

$$= - \frac{r^2 T^2 g}{4\pi^2 j^2} e^{i \frac{2\pi j}{rT}(t-t_0)}. \tag{19}$$

Aplicînd teorema reziduurilor pentru calculul integralei (12), se găsește legea mișcării

$$x(t) = y(t_0) - y(t) + \frac{r^2T^2g}{12} - \frac{r^2T^2g}{2\pi^2}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}\cos\left[\frac{2\pi j}{rT}(t-t_0)\right], \quad (20)$$

valabilă pe întreaga durată a mișcării ($t \geqslant t_0$).

Legea mișcării se obține astfel direct din ecuația diferențială a mișcării (2) și rezultă identică cu aceea care s-ar obține din studiul făcut separat pe fiecare interval. Metoda elaborată se poate aplica pentru studiul mișcărilor periodice ale oricărui alt sistem vibropercutant pentru care studiul stabilității se poate face de asemenea printr-o metodă directă [6].

Pentru analiza mișcării este comod să se folosească dezvoltarea în serie Fourier a funcției $x(t)$, definită pe intervalul $(t_0, t_0 + rT)$, avînd forma

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}\left(a_j\cos\frac{2\pi j}{rT}t + b_j\sin\frac{2\pi j}{rT}t\right). \quad (21)$$

Notînd prin a_0^*, a_j^* și b_j^* coeficienții corespunzători dezvoltării funcției $y(t)$, din ecuația (20) se obține

$$a_0 = -a_0^* + 2y(t_0) + \frac{r^2T^2g}{6}, \qquad a_j = -a_j^* - \frac{r^2T^2g}{2\pi^2j^2}, \; b_j = -b_j^*. \quad (22)$$

Se observă imediat că în relațiile (22) numai coeficienții a_j^* și b_j^* pentru care j este multiplu de $r(j = lr)$ sînt diferiți de zero. Acești coeficienți se calculează cu formulele:

$$a_j^* = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\cos\frac{2\pi j}{rT}t\,dt \quad (j = r, 2r, \ldots), \quad (23)$$

și

$$b_j^* = \frac{2}{T}\int_0^T y(t)\sin\frac{2\pi j}{rT}t\,dt \quad (j = r, 2r, \ldots). \quad (23')$$

Cu ajutorul relațiilor (22) se determină componentele armonice ale legii mișcării. Astfel se poate aprecia importanța pe care o au diferitele componente armonice și posibilitatea de a aproxima legea mișcării prin cîteva dintre ele. În multe cazuri este suficient să se considere numai primele două armonici așa cum dealtfel se poate ușor evidenția experimental [6.]

STABILIREA LEGII MIȘCĂRII PENTRU INTERVALUL DE DEFINIȚIE

Expresia legii mișcării poate fi pusă sub altă formă, valabilă numai în perioada de definiție (t_0, t_1).

Cu ajutorul condițiilor de existență (15) și (17), relația (11) se mai poate scrie

$$X(p) + Y(p) = \left[-\frac{g}{p^3} + \frac{rTg}{2p^2} + \frac{y(t_0)}{p}\right]e^{pt_0} - \frac{rTg}{p^2}\,\frac{e^{-p(t_0+rT)}}{1-e^{-prt}}. \quad (24)$$

Funcţiile originale ale termenilor din membrul drept ale ecuaţiei (24) se pot calcula, fie folosind teorema întîrzierii, fie formula de inversiune [9]. Astfel, pentru $t > t_0$, se va obţine

$$x(t) + y(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + \frac{rTg}{2}(t - t_0) + y(t_0) - P, \qquad (25)$$

unde

$$P = \frac{rTg}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{e^{p(t-t_1)}}{p(1 - e^{-prT})}\,dp. \qquad (26)$$

Pentru calculul integralei (26) se consideră conturul format din dreapta $p = \sigma_0$ şi semicercul situat în semiplanul drept a cărui rază tinde la infinit. Ţinînd seama că sînt îndeplinite condiţiile lemei lui Jordan pentru $t < t_1$, integrala (26) poate fi calculată de-a lungul întregului contur considerat şi deoarece în interior nu există puncte singulare, rezultă $P = 0$. În felul acesta se ajunge la legea mişcării :

$$x(t) = -\frac{g}{2}(t - t_0)^2 + \frac{rTg}{2}(t - t_0) - [y(t) - y(t_0)], \qquad (27)$$

valabilă pentru $t_0 < t < t_1$. Această formă a legii mişcării a mai fost găsită şi pe altă cale [8].

Primită la redacţie la 3 iunie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. A. E. Kobrinski, *Vibroudarnie sistemî* (Dinamika i ustoicivosti), Moskva, 1973.
2. V. A. Ostapenko, *Mehaniceskie vibroudarnie sistemî*. Naukova Dumka, Kiev, 1966.
3. Gh. Silas, L. Brîndeu, *Behandlung periodischer Bewegungen von Rüttelsystemen mit den Lagrangeschen Gleichungen*. V.D.I. Berichte *135* (1969).
4. S. A. Osmakov, O. A. Savinov, *O dvijenii vibratora, svobodno opiraiuşcegosia na uprugoi ograniciteli*. Izv. AN SSSR, OTN, *3* (1964).
5. N. F. Ohotnikova, *Nekotorie voprosî formovania monolitnîh obiemnîh blokov na vibroploşciadkah opiraiuşcihsia na uprughie prokladki*. Izv. vîşs ucebn. zavedenii. Stroitelstvo i arhitektura, *3* (1964).
6. L. Bbîndeu, *Contribuţii privind studiul mişcărilor periodice ale sistemelor vibropercutante*. Teză de doctorat. Institutul politehnic Timişoara, 1970.
7. A. Taplin, *Vibroudarnie mehanizmî*. Avtotransizdat, Moskva, 1953.
8. Gh. Silas, L. Brîndeu, A. Hegedüs, *Studiul mişcărilor vibropercutante ale unei mase libere cu excitaţie periodică*. St. cerc. mec. apl. **29**, *5* (1970).
9. M. I. Kontorovici, *Calculul operaţional şi fenomenele tranzitorii din circuitele electrice* (trad. din lb. rusă) Ed. Energetică de Stat, Bucureşti, 1955.

COMPENSAREA MASELOR LA MĂSURAREA IMPEDANȚELOR MECANICE

de MIRCEA RADEȘ
Institutul politehnic București

Măsurarea precisă a forței de excitație aplicate unei structuri, de la un vibrator, prin intermediul unui captor de forțe sau cap de impedanțe, a impus măsuri de „compensare a masei" elementelor situate între structură și traductor. În lucrare se prezintă principiul compensării electrice și analitice a maselor, precum și o metodă grafică de compensare a impedanței mecanice a unui vibrator la care se cunoaște forța electromagnetică și care este legat mecanic direct de structură (fără captor de forțe).

1. INTRODUCERE

Măsurarea impedanțelor mecanice se face aplicînd o excitație armonică cunoscută într-un punct al unei structuri și măsurînd răspunsul staționar în unul sau mai multe din punctele suprafeței acesteia.

Deși noțiunea de „impedanță mecanică" are un sens strict definit (raportul „forță de excitație/viteză de răspuns liniar") [1], conceptul de „măsurări de impedanță mecanică" se referă — tradițional — la determinarea unei categorii mai largi de funcții de răspuns în frecvență, cum sînt mobilitatea, receptanța, obstructanța, masa aparentă, inertanța etc. [2]. Deoarece, însă, în cazul mișcării armonice de pulsație ω, accelerația $\ddot{\bar{x}}$, viteza $\dot{\bar{x}}$ și deplasarea $\bar{x}$, măsurate în același punct, sînt legate prin relația $\ddot{\bar{x}} = j\omega\dot{\bar{x}} = -\omega^2\bar{x}$, toate aceste funcții conțin de fapt aceeași cantitate de informație.

Considerarea unor funcții similare de răspuns în frecvență, definite de rapoarte între un cuplu armonic și rotirile corespunzătoare, sau între forțe și rotiri, cupluri și mișcări liniare, face abia obiectul unor lucrări de dată recentă, echipamentul necesar măsurării acestora fiind încă puțin dezvoltat [3].

În general, excitația constă dintr-o forță concentrată armonică, măsurîndu-se o componentă rectilinie a răspunsului structurii. Forța poate fi aplicată fie cu ajutorul unui vibrator legat mecanic de structură, fie de la o sursă fără contact cu structura.

Excitația de la distanță are avantajul de a nu modifica sistemul încercat; în schimb, amplitudinea forței nu poate fi măsurată precis, astfel că metoda se aplică doar la determinarea frecvențelor proprii și a formei modurilor de vibrație.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 4, 1976, P. 547–568

În cazul folosirii unui vibrator în contact cu structura, măsurarea forţei aplicate se face cu ajutorul unui traductor corespunzător, introdus în conexiunea mecanică dintre elementul mobil al vibratorului şi sistemul excitat. Captorul de forţe, uneori înglobat într-un cap de impedanţe, se montează cît mai aproape de structura încercată.

Inevitabil, între traductorul captorului de forţe şi structură se introduce o masă adiţională. Prin urmare, forţa aplicată structurii va fi egală cu diferenţa vectorială între forţa totală (măsurată) şi cea necesară pentru deplasarea masei interpuse. De obicei, aceasta din urmă este foarte mică şi introduce o eroare neglijabilă în valorile măsurate ale forţei de excitaţie. În vecinătatea rezonanţelor, însă, aceasta poate deveni comparabilă cu forţa efectiv aplicată, în special la structuri uşoare, slab amortizate. Apare o deplasare aparentă a frecvenţelor de rezonanţă spre valori inferioare şi, paradoxal, o modificare a valorilor calculate ale amortizării din sistem. În prima parte a lucrării se arată că eroarea în evaluarea amortizării depinde de formula de calcul utilizată.

Pentru evitarea unui calcul eronat al caracteristicilor dinamice ale sistemului, precum şi pentru determinarea precisă a impedanţei mecanice a componentelor unei structuri — absolut necesară în metodele de sinteză a răspunsului pe baza compunerii impedanţelor subansamblelor — se recurge la compensarea electrică a maselor adiţionale [4], [5] descrisă în a doua parte a lucrării.

S-a stabilit că, în vecinătatea rezonanţelor, răspunsul structurilor este influenţat de mase adiţionale, iar în vecinătatea antirezonanţelor — de constante elastice adiţionale [6]. Montarea captorilor de forţe cît mai aproape de structură şi folosirea unor elemente de asamblare de rigiditate corespunzătoare permite determinarea corectă a răspunsului la antirezonanţe, fără măsuri speciale de compensare a constantelor elastice. De asemenea, se apreciază că dacă masa aparentă [1] a structurii este de zece ori mai mare dect masa adiţională a unui cap de impedanţe, eroarea ce se face în evaluarea impedanţei mecanice, dacă nu se face compensarea de masă, este sub 1 dB [7].

S-au construit instalaţii de produs şi măsurat vibraţii, în special pentru industria aeronautică, cuprinzînd vibratoare electromagnetice acţionate de oscilatoare electronice, prin intermediul unor amplificatoare de putere avînd un semnal de ieşire cu intensitate de amplitudine constantă. Forţa de excitaţie se consideră egală cu forţa eletromagnetică generată în vibrator şi se calculează direct pe baza valorii intensităţii curentului din bobina de excitaţie, legată de echipamentul mobil al vibratorului.

Dar în cazul legării vibratorului de o structură, forţa aplicată acesteia este egală cu diferenţa vectorială dintre forţa electromagnetică produsă în vibrator (cînd baza acestuia este fixă) şi cea necesară deplasării echipamentului mobil. Aceasta din urmă este neglijabilă doar la încercarea structurilor masive. La structuri uşoare, a căror masă aparentă la rezonanţe poate fi comparabilă cu masa vibratorului ataşată structurii, compensarea masei este absolut necesară. La frecvenţe apropiate de cea proprie a echipamentului mobil al vibratorului se impune chiar o „compensare de impedanţă". În lucrare se prezintă o metodă grafică pentru realizarea acestor corecţii, precum şi oportunitatea lor în funcţie de domeniul frecvenţelor de lucru.

2. ERORI DATORITE NECOMPENSĂRII MASELOR

Fie sistemul cu un grad de libertate din figura 1*a*, acționat de o forță perturbatoare armonică $F_1(t) = \mathrm{Re}\,[F_{01}e^{j\omega t}]$. În regim staționar, mișcarea masei m este armonică, viteza ei fiind $\dot{x}(t) = \mathrm{Re}[\bar{\dot{x}}_0\, e^{j\omega t}]$, unde $\bar{\dot{x}}_0$ este o amplitudine complexă.

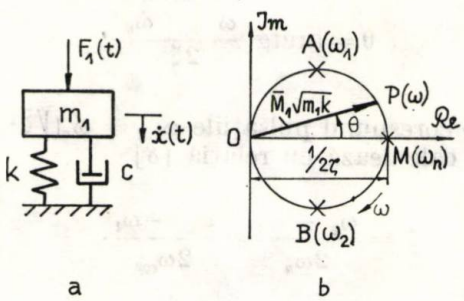


Fig. 1

Considerînd o ecuație de mișcare de forma

$$m_1\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_1(t),$$

în punctul de aplicație a forței, mobilitatea complexă este

$$\frac{\bar{\dot{x}}}{\bar{F}_1} = \bar{M}_1 = \frac{1}{c + J\left(m_1\omega - \dfrac{k}{\omega}\right)}.$$

Mărimea adimensională complexă

$$\bar{M}_1\sqrt{m_1k} = \frac{1}{2\zeta + J\left(\dfrac{\omega}{\omega_n} - \dfrac{\omega_n}{\omega}\right)} = \frac{2\zeta}{4\zeta^2 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_n} - \dfrac{\omega_n}{\omega}\right)^2} + J\,\frac{\dfrac{\omega_n}{\omega} - \dfrac{\omega}{\omega_n}}{4\zeta^2 + \left(\dfrac{\omega}{\omega_n} - \dfrac{\omega_n}{\omega}\right)^2}, \tag{1}$$

unde s-a notat

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1}},\ \zeta = \frac{c}{c_{cr_1}},\ c_{cr_1} = 2\sqrt{m_1k} = 2m_1\,\omega_n, \tag{2}$$

este reprezentată în planul complex în figura 1*b*.

Locul geometric al vîrfului vectorului $\bar{M}_1(m_1k)^{\frac{1}{2}}$ este un cerc care trece prin origine, de diametru $\dfrac{1}{2\zeta}$ și cu centrul pe semiaxa reală pozi-

tivă. Fiecărui punct P de pe cerc îi corespunde o anumită pulsație ω. La intersecția cu axa reală se obține pulsația de rezonanță $\omega_{rez} = \omega_n$.

Diametrul perpendicular pe OM taie cercul în punctele A și B, definite de unghiuri $\theta_{1.2} = \pm\frac{\pi}{4}$. Deoarece argumentul funcției complexe (1) este

$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{\frac{\omega_n}{\omega} - \frac{\omega}{\omega_n}}{2\zeta}, \tag{3}$$

punctelor A și B le corespund pulsațiile $\omega_{1,2} = \omega_n(\sqrt{\zeta^2 + 1} \mp \zeta)$. Raportul de amortizare ζ se calculează cu relația [8]

$$\zeta = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_n} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\omega_{rez}}. \tag{4}$$

Dacă se atașează sistemului din figura 1*a* o masă adițională m_2 (fig. 2*a*), ecuația mișcării va fi

$$(m_1 + m_2)\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t),$$

iar mobilitatea complexă devine

$$\bar{M} = \frac{\bar{\dot{x}}}{\bar{F}} = \frac{1}{c + j\left[(m_1 + m_2)\omega - \frac{k}{\omega}\right]}.$$

Notînd

$$\mu = \frac{m_2}{m_1}, \tag{5}$$

se obține

$$\bar{M}\sqrt{m_1 k} = \frac{1}{2\zeta + J\left[(1 + \mu)\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega_n}{\omega}\right]}, \tag{6}$$

unde s-au folosit notațiile (2).

Mărimea adimensională complexă (6) este reprezentată în planul complex în figura 2*b*. Locul geometric al vîrfului vectorului $\bar{M}(n_1 k)^{\frac{1}{2}}$ este tot un cerc de diametru $\frac{1}{2\zeta}$ ca în figura 1*b*, însă distribuția parametrului ω în lungul cercului este diferită. La intersecția cu axa reală se determină pulsația de rezonanță a sistemului

$$\omega'_{rez} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + \mu}}.$$

Pulsațiile punctelor A' și B' sînt

$$\omega'_{1,2} = \omega_n \frac{\sqrt{\zeta^2 + (1+\mu)} \mp \zeta}{1+\mu},$$

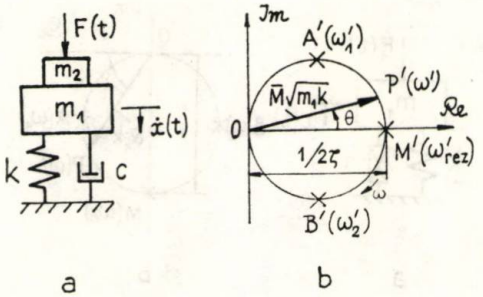


Fig. 2.

astfel că, dacă raportul de amortizare se calculează cu relația (4), rezultă valoarea eronată

$$\zeta_{\text{măsurat}} = \frac{\omega'_2 - \omega'_1}{2\omega'_{\text{rez}}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\mu}}. \tag{7}$$

Expresia (7) poate fi dedusă și direct, pe baza relației de definiție a raportului de amortizare

$$\zeta_{\text{măsurat}} = \frac{c}{c_{\text{cr}}} = \frac{c}{2\sqrt{(m_1+m_2)k}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} \frac{c}{2\sqrt{m_1 k}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu}} \frac{c}{c_{\text{cr}_1}} = \frac{\zeta}{\sqrt{1+\mu}}.$$

Rezultă că la calculul lui ζ cu relația (4), eroarea este de 1% cînd $\mu = 1/49$, de 5% cînd $\mu = 1/9{,}25$ și de 10% cînd $\mu = 1/4{,}26$.

În realitate, prin introducerea în sistem a unei mase adiționale, valoarea coeficientului de amortizare evident nu se modifică. În schimb, valoarea raportului de amortizare ζ este totuși mai mică deoarece depinde de coeficientul de amortizare critică, dependent de masa în vibrație. Apare deci mai avantajoasă exprimarea nivelului amortizării printr-o mărime adimensională independentă de masa sistemului, cum este „factorul de amortizare histeretică echivalentă" [9].

Fie sistemul cu un grad de libertate din figura 3*a*, la care s-a considerat o amortizare de tip histeretic, definită de coeficientul h [10]. În acest caz este preferabilă exprimarea răspunsului în frecvență sub forma receptanței complexe, definită ca raport între deplasarea în regim staționar $\bar{x}(t) = \bar{x}_0 e^{j\omega t}$ și forța perturbatoare armonică $\bar{F}_1(t) = F_{01}\, e^{j\omega t}$.

Considerînd o ecuație de mișcare de forma

$$m_1\ddot{x} + \frac{h}{\omega}\dot{x} + kx = F_1(t),$$

receptanţa complexă este

$$\bar{\alpha}_1 = \frac{\bar{x}}{\bar{F}_1} = \frac{\bar{x}_0}{F_{01}} \frac{1}{k - m_1\omega^2 + jh}.$$

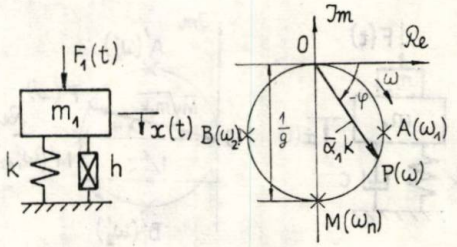


Fig. 3

Mărimea adimensională

$$\bar{\alpha}_1 k = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + jg} = \frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + g^2} - j\frac{g}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^2 + g^2}, \quad (8)$$

unde s-a notat

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1}}, \quad g = \frac{h}{k}, \quad (9)$$

este reprezentată în planul complex în figura 3*b*. Locul geometric al vîrfului vectorului $\bar{\alpha}_1 k$ este un cerc care trece prin origine, de diametru $\frac{1}{g}$ şi cu centrul pe semiaxa imaginară negativă. La intersecţia cu axa imaginară se obţine pulsaţia de rezonanţă $\omega_{rez} = \omega_n$. Diametrul perpendicular pe OM taie cercul în punctele „de putere jumătate" A şi B, definite de unghiuri de fază $\varphi_1 = -45°$ şi $\varphi_2 = -135°$. Deoarece argumentul funcţiei (8) este

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-g}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \quad (10)$$

punctele A şi B sînt definite de pulsaţiile $\omega_{1,2} = \omega_n\sqrt{1 \mp g}$.

Factorul de amortizare g se calculează cu relaţia exactă [10]

$$g = \frac{h}{k} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_n^2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_{rez}^2}. \quad (11)$$

La sisteme slab amortizate, deoarece $\omega_2 + \omega_1 \cong 2\omega_{rez}$, se folosește relația aproximativă

$$g = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_n} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_{rez}}. \tag{12}$$

De asemenea, se mai utilizează expresia [11]

$$g = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{\omega_2^2 + \omega_1^2}, \tag{13}$$

care oferă avantajul de a nu conține pulsația de rezonanță. În acest caz, pulsațiile ω_1 și ω_2 se pot obține de pe o diagramă a componentei răspunsului în fază cu excitația, ca abscise ale punctelor de extremum [10].

Dacă se atașează sistemului din figura 3*a* o masă adițională m_2 (fig. 4*a*), expresia receptanței complexe devine

$$\overline{\alpha k} = \frac{1}{1-(1+\mu)\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + jg}, \tag{14}$$

unde s-a folosit notația (5).

Locul geometric al vîrfului vectorului (14) în planul complex (fig.4*b*) este tot un cerc de diametru $1/g$ ca cel din figura 3*b*, însă cu o altă distribuție de pulsații. La intersecția cu axa imaginară se determină pulsația de rezonanță $\omega'_{rez} = \omega_n/(1+\mu)^{\frac{1}{2}}$. Punctelor A' și B' le corespund pulsațiile

$$\omega'_{1,2} = \omega_n \frac{\sqrt{1 \mp g}}{\sqrt{1+\mu}}.$$

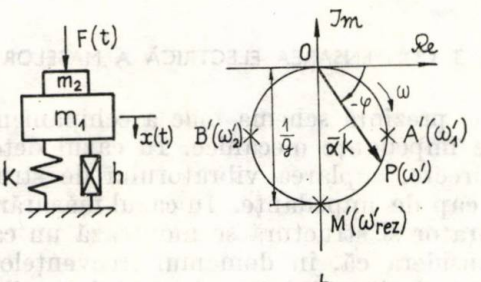


Fig. 4

Calculul factorului de amortizare pe baza relației exacte (11) duce la

$$g_{măsurat} = \frac{\omega_2'^2 - \omega_1'^2}{2\omega_{rez}'^2} = \frac{\omega_2^2 - \omega_1^2}{2\omega_{rez}^2} = g, \tag{15}$$

deci la o evaluare corectă a lui g, chiar fără compensarea de masă. Analog, din relaţia (13) rezultă

$$g_{\text{măsurat}} = \frac{\omega_2'^2 - \omega_1'^2}{\omega_2'^2 + \omega_1'^2} = \frac{\frac{\omega_n^2}{1+\mu}[(1+g)-(1-g)]}{\frac{\omega_n^2}{1+\mu}[(1+g)+(1-g)]} = g.$$

În schimb, folosind relaţia aproximativă (12), se obţine

$$g_{\text{măsurat}} = \frac{\omega_2' - \omega_1'}{\omega_{rez}'} = \sqrt{1+\mu}\,(\sqrt{1+g} - \sqrt{1-g}), \tag{16}$$

valoare dependentă de μ. Pentru amortizări mici, prin dezvoltarea în serie a radicalilor din paranteză, rezultă

$$g_{\text{măsurat}} \cong \sqrt{1+\mu}\left[\left(1+\frac{1}{2}g\right)-\left(1-\frac{1}{2}g\right)\right] = g\sqrt{1+\mu}, \tag{16a}$$

deci, aparent, o creştere a amortizării, ceea ce coincide cu unele interpretări de rezultate experimentale [5].

Rezultă că eroarea în evaluarea nivelului amortizării depinde de formula utilizată şi de modelul de amortizare ales. Problema se complică la sisteme cu mai multe grade de libertate şi la sisteme continue, la care determinarea amortizării în fiecare mod de vibraţie este în general îngreunată de dificultatea evaluării corecte a maselor modale. În aceste cazuri metoda Kennedy-Pancu [8] dă rezultate satisfăcătoare doar la sisteme slab amortizate şi cu frecvenţe proprii relativ depărtate, căci doar în acest caz se poate considera o contribuţie constantă a modurilor nerezonante la pulsaţia de rezonanţă a modului studiat.

3. COMPENSAREA ELECTRICĂ A MASELOR

În figura 5 se prezintă schema bloc a echipamentului de bază folosit la măsurări de impedanţe mecanice. În cazul determinării impedanţelor punctuale directe, cuplarea vibratorului de structură se face prin intermediul unui cap de impedanţe. În cazul măsurării impedanţelor de transfer, între vibrator şi structură se montează un captor de forţe.

Se poate considera că, în domeniul frecvenţelor uzuale de lucru, partea acestor captori situată între elementul sensibil al traductorului de forţe şi structură se comportă ca o masă ideală. Fie această masă m_h, iar structura reprezentată prin modelul cu un grad de libertate $m_s - k_s - c_s$ din figura 6*a*.

Forţa $\overline{F}$ măsurată de captor va fi deci egală cu suma vectorială dintre forţa $\overline{F}_s$ efectiv aplicată structurii şi forţa $\overline{F}_h$ necesară deplasării masei m_h (fig. 6*b*)

$$\overline{F} = \overline{F}_s + \overline{F}_h. \tag{17}$$

Dacă se notează cu $\dot{\bar{x}}$ viteza masei $(m_s + m_h)$, impedanța structurii $\bar{Z}_s = \frac{\bar{F}_s}{\dot{\bar{x}}}$ este egală cu diferența între impedanța măsurată $\bar{Z} = \frac{\bar{F}}{\dot{\bar{x}}}$ și impedanța masei adiționale $\bar{Z}_h = \frac{\bar{F}_h}{\dot{\bar{x}}}$, adică

$$\bar{Z}_s = \bar{Z} - \bar{Z}_h = \frac{\bar{F} - m_h \ddot{\bar{x}}}{\dot{\bar{x}}}, \tag{18}$$

unde $\ddot{\bar{x}}$ este accelerația maselor.

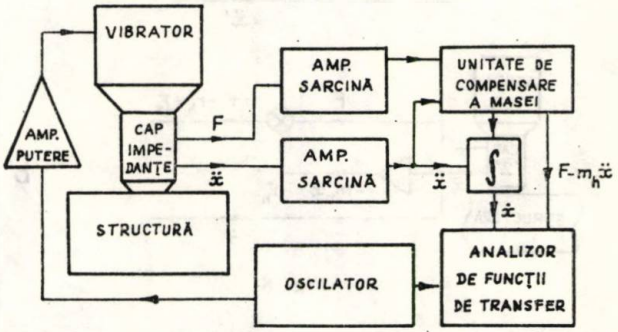


Fig. 5

Operația indicată de relația (18) poate fi efectuată electric [12]. Schema unei unități de compensare a masei este dată în figura 7. Cu ajutorul ei, semnalul dat de accelerometru este amplificat, rezultînd un semnal proporțional cu forța $\bar{F}_h = m_h \ddot{\bar{x}}$ și de semn schimbat, care apoi este adunat la semnalul dat de captorul de forțe.

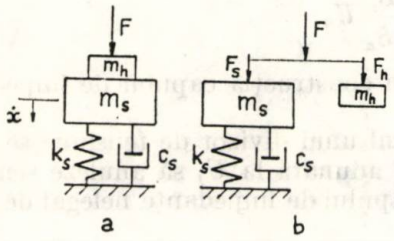


Fig. 6

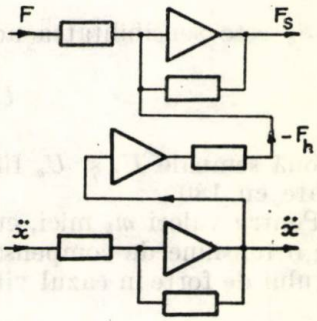


Fig. 7

Pentru reglarea constantei m_h, se pune în vibrație capul de impedanțe (sau captorul de forțe) nelegat de structură (fig. 8*a*). O parte a semnalului de ieșire al accelerometrului este introdus în circuitul semnalului de ieșire al captorului de forțe. Se reglează amplificarea pînă cînd forța rezultantă indicată este zero.

La acest reglaj, masa m_h este compensată şi, atunci cînd capul de impedanţe este ataşat unei structuri (fig. 8*b*), forţa indicată va fi $\overline{F}_s = \overline{F} - m_h\ddot{\overline{x}}$, deci impedanţa indicată va fi $\overline{Z}_s$.

Există unităţi de compensare a masei bazate pe un simplu divizor de tensiune [7].

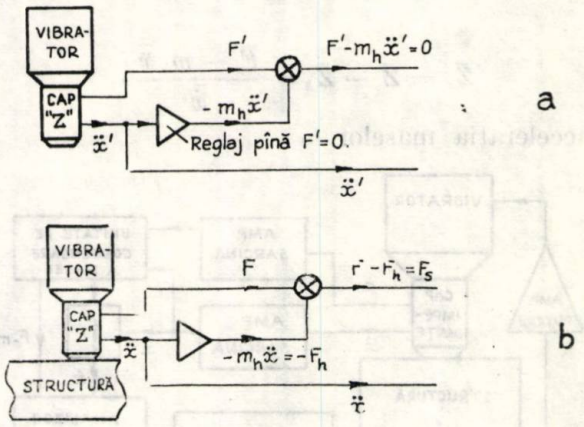


Fig. 8

Fie semnalul de ieşire al captorului de forţe datorit masei m_h

$$U_f = m_h \ddot{x} S_f,$$

unde S_f este sensibilitatea captorului de forţe.

Semnalul de ieşire al captorului de acceleraţii este

$$U_a = \ddot{x}\, S_a,$$

unde S_a este sensibilitatea accelerometrului. Rezultă

$$U_f = m_h \frac{S_f}{S_a} U_a,$$

cele două semnale U_f şi U_a fiind, prin construcţia capului de impedanţe, defazate cu 180°.

Pentru valori m_h mici, cu ajutorul unui divizor de tensiune se poate obţine o tensiune de compensare care adunată la U_f să anuleze semnalul captorului de forţe în cazul vibrării capului de impedanţe nelegat de structură.

4. COMPENSAREA IMPEDANŢEI MECANICE A VIBRATORULUI

În figura 9 se arată schema bloc a unei instalaţii folosite la măsurarea răspunsului în frecvenţă al structurilor, care, spre deosebire de cea din figura 5, nu conţine captor de forţe, permiţînd în schimb reglarea şi măsurarea precisă a forţei electromagnetice generate în vibrator.

Această forță, produsă prin interacțiunea între curentul care parcurge bobina mobilă a vibratorului și cîmpul magnetic din întrefier, este $\bar{F} = Bli$, unde B este densitatea fluxului magnetic în întrefier, l — lungimea înfășurării bobinei, i — intensitatea curentului din bobină.

Amplificatorul de putere, de construcție specială, furnizează un semnal de ieșire de intensitate constantă, independentă de frecvența

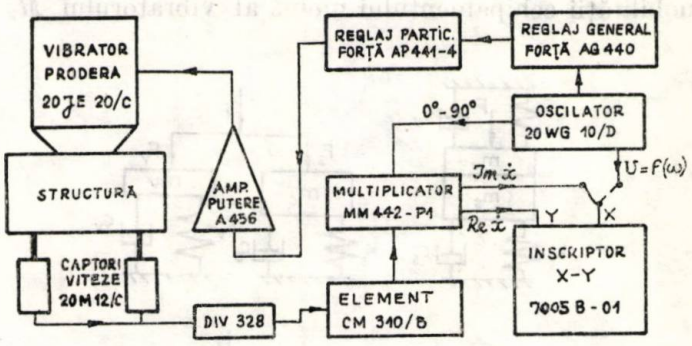


Fig. 9

de lucru. În aceste condiții, forța electromagnetică este constantă și independentă de frecvența excitatoare.

Răspunsul se măsoară cu captori electrodinamici de viteze. Pe inscriptorul $X-Y$ se obține deci hodograful vitezei structurii, trasat pentru $F = \text{const.}$, reprezentînd — la o scară diferită — diagrama polară a mobilității $\frac{\dot{x}}{\bar{F}}$. Aceasta diferă însă de diagrama polară a mobilității structurii studiate, deoarece forța F nu se transmite integral structurii, o parte fiind consumată pentru deplasarea echipamentului mobil al vibratorului.

În domeniul frecvențelor uzuale de lucru, vibratorul electromagnetic poate fi reprezentat prin modelul din figura 10, unde s-a notat m_V — masa echivalentă a echipamentului mobil, k_V și c_V — constanta elastică, respectiv coeficientul de amortizare vîscoasă echivalentă ale suspensiei părții mobile, m — masa corpului vibratorului, incluzînd (electro-) magnetul.

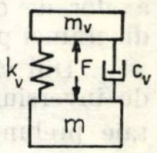


Fig. 10

Dacă vibratorul este suspendat de benzi elastice, iar masa m este mare în comparație cu m_V, sau dacă acesta este fixat de un „suport seismic", masa m poate fi considerată fixă în spațiu, iar ansamblul vibrator-structură poate fi modelat ca în figura 11*a*. Reprezentarea echivalentă din figura 11*b* pune în evidență faptul că forța măsurată $\bar{F}$ este egală cu suma vectorială dintre forța $\bar{F}_s$ aplicată efectiv structurii și forța $\bar{F}_V$ necesară deplasării echipamentului mobil al vibratorului $\bar{F} = \bar{F}_s + \bar{F}_V$. Corespunzător, impedanța structurii

$$\bar{Z}_s = \bar{Z} - \bar{Z}_V = \frac{\bar{F} - \bar{F}_V}{\dot{x}} \tag{19}$$

se determină scăzînd din impedanţa măsurată $\bar{Z}$, impedanţa vibratorului $\bar{Z}_V$, deoarece cele două subsisteme reprezintă două impedanţe legate în paralel, cu ieşirile blocate.

Experimental, se determină curba mobilităţii totale $\bar{M} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{F}}$ şi curba mobilităţii echipamentului mobil al vibratorului $\bar{M}_V = \frac{1}{\bar{Z}_V} = \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{F}_V}$

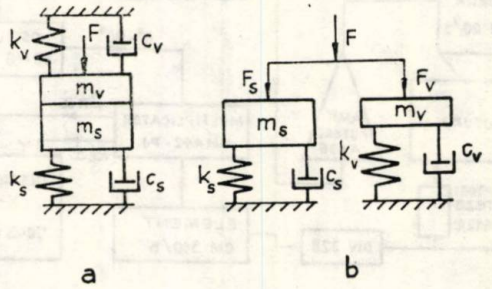


Fig. 11

— trasată cu vibratorul decuplat de structură. Prin inversare se pot obţine impedanţele $\bar{Z}$ şi $\bar{Z}_V$, apoi prin scădere vectorială $\bar{Z}_s$ şi după o nouă inversare $\bar{M}_s$, pe a cărei diagramă polară se pot determina corect caracteristicile dinamice ale structurii.

Operaţia se poate efectua grafic punct cu punct, după cum se arată în figura 12.

Metoda se bazează pe inversiunea vectorială [13]. Vectorul $\overline{OM}$ se obţine unind originea axelor de coordonate O cu punctul M, de pulsaţie ω, din diagrama polară a mobilităţii totale. Analog, vectorul $\overline{OM_V}$ se obţine unind originea cu punctul M_V, de aceeaşi pulsaţie ω, din diagrama polară a mobilităţii echipamentului mobil al vibratorului.

Se construieşte un cerc de inversiune (locul geometric al punctelor care prin inversiune se transformă în ele însele), cu centrul în originea axelor de coordonate şi rază oarecare. Dacă scopul final este trasarea diagramei polare a mobilităţii structurii, problema scărilor nu interesează.

Din vîrful vectorului $\overline{OM}$ se ridică o perpendiculară care taie cercul de inversiune în punctele T şi T'. Tangentele la cerc în aceste puncte taie prelungirea vectorului $\overline{OM}$ în punctul Z^*. Vectorul $\overline{OZ}^*$ este conjugatul inversului vectorului $\overline{OM}$, deci conjugatul vectorului impedanţei sistemului total (compus).

Analog se construieşte vectorul $\overline{OZ}_V^*$, conjugatul vectorului impedanţei subsistemului echipamentului mobil al vibratorului. Diferenţa vectorială a celor doi vectori $\overline{OZ}_S^* = \overline{OZ}^* - \overline{OZ}_V^*$ reprezintă conjugatul vectorului impedanţei mecanice a structurii. Din punctul Z_S^* se duc cele două tangente la cercul de inversiune. Dreapta T_2T_2', care uneşte punctele de contact ale celor două tangente (polara punctului Z_S^* faţă de cercul

de inversiune) intersectează vectorul $\overline{OZ}_S^*$ în punctul M_S, vîrful vectorului $\overline{OM}_S$ al mobilității structurii la pulsația ω.

În cazul cînd unul din punctele M sau M_V este în afara cercului de inversiune, punctul corespunzător Z^*, respectiv Z_V^*, se determină la fel cum s-a găsit M_S din Z_S^* mai sus.

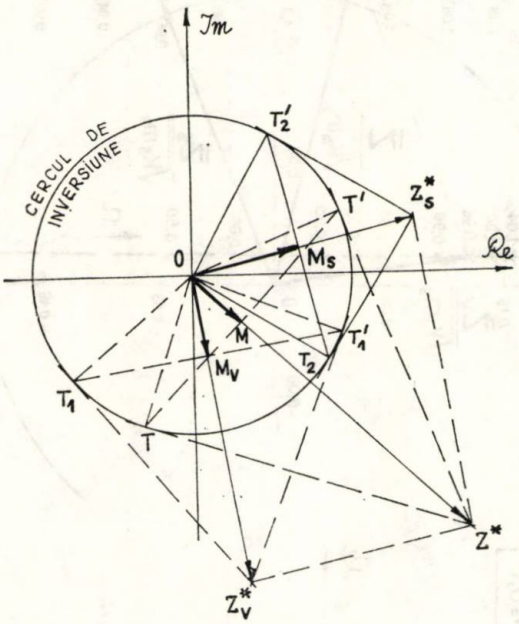


Fig. 12

Procedeul este laborios, deoarece construcția grafică trebuie repetată pentru fiecare pulsație ω pentru care s-au marcat puncte pe diagramele mobilităților M și M_V.

Drept aplicație se consideră sistemul din figura 11, la care s-au ales următoarele valori particulare

$$\frac{m_V}{m_S} = \mu = 0{,}25, \quad \frac{k_V}{k_S} = K = 0{,}1, \quad \frac{c_V}{c_S} = \gamma = 0{,}1, \quad \frac{c_S}{2\sqrt{m_S k_S}} = \zeta = 0{,}1.$$

În figura 13*a* s-au reprezentat prin linii întrerupte diagramele polare ale mobilității adimensionale a sistemului total $\overline{M}\sqrt{k_S m_S}$ și a echipamentului mobil al vibratorului $\overline{M}_V\sqrt{k_S m_S}$, iar cu linie continuă — diagrama mobilității structurii $\overline{M}_S\sqrt{k_S m_S}$, ce poate fi obținută cu ajutorul construcției grafice descrise mai sus. S-a ales drept parametru — pulsația adimensională $\Omega = \dfrac{\omega}{\omega_{n_S}}$, unde $\omega_{n_S} = \sqrt{\dfrac{k_S}{m_S}}$ este pulsația proprie a structurii. Pentru claritatea reprezentării, în figura 13*b* s-au desenat separat diagra-

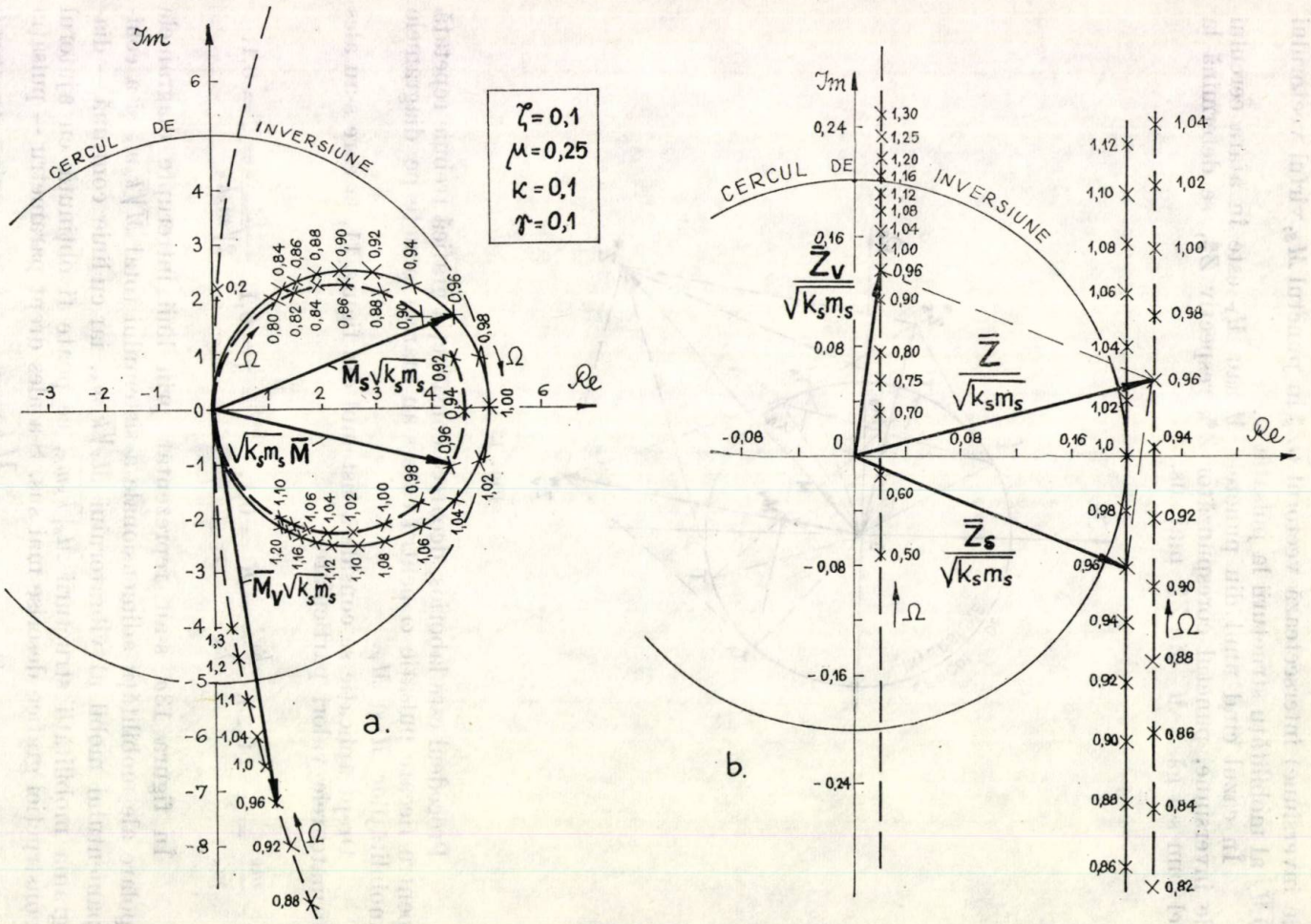

ζ = 0,1
μ = 0,25
κ = 0,1
τ = 0,1
CERCUL DE INVERSIUNE
Im
Re
Ω
$\bar{M}_s\sqrt{k_s m_s}$
$\sqrt{k_s m_s}\,\bar{M}$
$\bar{M}_v\sqrt{k_s m_s}$
a.
$\frac{\bar{Z}_v}{\sqrt{k_s m_s}}$
$\frac{\bar{Z}}{\sqrt{k_s m_s}}$
$\frac{\bar{Z}_s}{\sqrt{k_s m_s}}$
b.

Fig. 13

mele polare corespunzătoare ale impedanțelor mecanice adimensionale $\frac{\bar{Z}}{\sqrt{m_S k_S}}$.

S-au ales următoarele scări :

1 unitate de mobilitate adimensională = 10 mm ;

Raza cercului de inversiune (vectorul unitate) = 50 mm ;

Rezultă că o unitate de impedanță mecanică adimensională $= \frac{50^2}{10} =$ = 250 mm.

În cazul teoretic considerat, diagramele polare ale mobilităților sînt cercuri cu centrul pe axa reală, iar diagramele polare ale impedanțelor mecanice sînt drepte paralele cu axa imaginară. În practică, în cazul structurilor cu mai multe grade de libertate, diagrama mobilității nu este chiar un cerc, ci o curbă polară compusă din mai multe bucle care se apropie de forma circulară ; folosind metoda propusă, se face compunerea de impedanțe punct cu punct, pe baza datelor experimentale, apoi se aproximează cu cercuri buclele diagramei mobilității structurii.

Diferența între diagrama „măsurată" a mobilității $\bar{M}$ și diagrama mobilității structurii $\bar{M}_S$ este evidentă. Dacă nu s-ar face „compensarea de impedanță" și s-ar considera în mod eronat că diagrama „măsurată" este chiar cea a mobilității structurii, criteriile uzuale de localizare a rezonanței ar da o pulsație proprie

$$\omega_{n_{\text{măsurat}}} = \sqrt{\frac{1+K}{1+\mu}}\,\omega_{n_S}, \tag{20}$$

iar raportul de amortizare determinat cu formula (4) ar fi

$$\zeta_{\text{măsurat}} = \frac{1+\gamma}{\sqrt{(1+K)(1+\mu)}}\,\zeta. \tag{21}$$

În cazul numeric considerat, $\omega_{n\,\text{măsurat}} = \frac{\omega_{n_S}}{1{,}066}$, $\zeta_{\text{măsurat}} = 0{,}0938$, ceea ce reprezintă o eroare de 6,2%.

Cu cît pulsația proprie a echipamentului mobil al vibratorului $\omega_{n_V} = \sqrt{\frac{k_V}{m_V}}$ este mai mică decît pulsația proprie a structurii excitate $\omega_{n_S} = \sqrt{\frac{k_S}{m_S}}$, domeniul pulsațiilor de interes de pe diagrama $\bar{M}$ ocupă pe diagrama $\bar{M}_V$ un arc de cerc situat, în semiplanul imaginar negativ, mai aproape de origine.

Cu cît γ este mai mic, diametrul cercului $\bar{M}_V$ este mai mare, iar arcul de cerc respectiv tinde să se confunde cu un segment de pe semiaxa imaginară negativă — caz care ar corespunde neglijării totale a amortizării din vibrator. În multe aplicații practice, constanta elastică și coeficientul de amortizare ale suspensiei echipamentului mobil al vibratorului au valori neglijabile față de mărimile corespunzătoare ale structurii stu-

diate. În aceste cazuri este suficientă o compensare de masă după cum se arată în paragraful următor. Metoda prezentată a fost aplicată cu bune rezultate la determinarea caracteristicilor dinamice ale spumelor poliuretanice [14].

5. COMPENSAREA ANALITICĂ A MASELOR

Compensarea analitică a maselor a fost prezentată pentru prima dată [15] în legătură cu determinarea receptanţei structurilor continue. În cazul măsurării mobilităţii, aceasta se poate face după schema din figura 14.

Fie sistemul din figura 14*a*, obţinut prin ataşarea unei mase m_2 la sistemul cu un grad de libertate m_1-k-c. În figura echivalentă 14*b* se indică împărţirea în subsisteme. Experimental se determină curba polară a mobilităţii $\bar{M} = \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{F}}$ a sistemului total (fig. 14*c*), iar prin inversiune vectorială se poate obţine diagrama polară a impedanţei mecanice $\bar{Z} = \frac{\bar{F}}{\dot{\bar{x}}}$ a sistemului total (fig. 14*d*). Pentru subsistemul format de masa m_2 (fig. 14*e*) se determină diagrama polară a mobilităţii $\bar{M}_2 = \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{F}_2}$ (fig. 14*f*) fie experimental — cu vibratorul decuplat de structură, fie analitic — pe baza relaţiei $\bar{M}_2 = -\frac{j}{\omega m_2}$, cunoscînd masa m_2 pe baza unor măsurări descrise mai jos. Prin inversiune rezultă diagrama impedanţei mecanice a masei $\bar{Z}_2 = \frac{\bar{F}_2}{\dot{\bar{x}}}$ (fig. 14*g*). Suprapunînd diagramele din figura 14*d* şi figura 14*g* se obţine diagrama impedanţei mecanice a subsistemului din figura 14*j*, efectuînd operaţia vectorială (fig. 14*h*)

$$\bar{Z}_1 = \bar{Z} - \bar{Z}_2 = \bar{Z} + \bar{Z}_2^*, \tag{22}$$

unde $\bar{Z}_2^*$ este conjugatul lui $\bar{Z}_2$. În final, prin invesare, se determină diagrama polară a mobilităţii $\bar{M}_1 = \frac{\dot{\bar{x}}}{\bar{F}_1}$ (fig. 14*i*) subsistemului din figura 14*j* — reprezentînd structura studiată. Aceasta diferă de cea din figura 14*c* doar prin repartiţia parametrului ω în lungul curbei.

Pentru exemplificarea procedeului descris mai sus, în figura 15 se prezintă diagramele obţinute pentru un sistem la care

$$\mu = \frac{m_2}{m_1} = 0{,}25 \quad \text{şi} \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{m_1 k}} = 0{,}1,$$

alegînd drept parametru pulsaţia adimensională $\Omega = \frac{\omega}{\omega_n}$, unde $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m_1}}$.

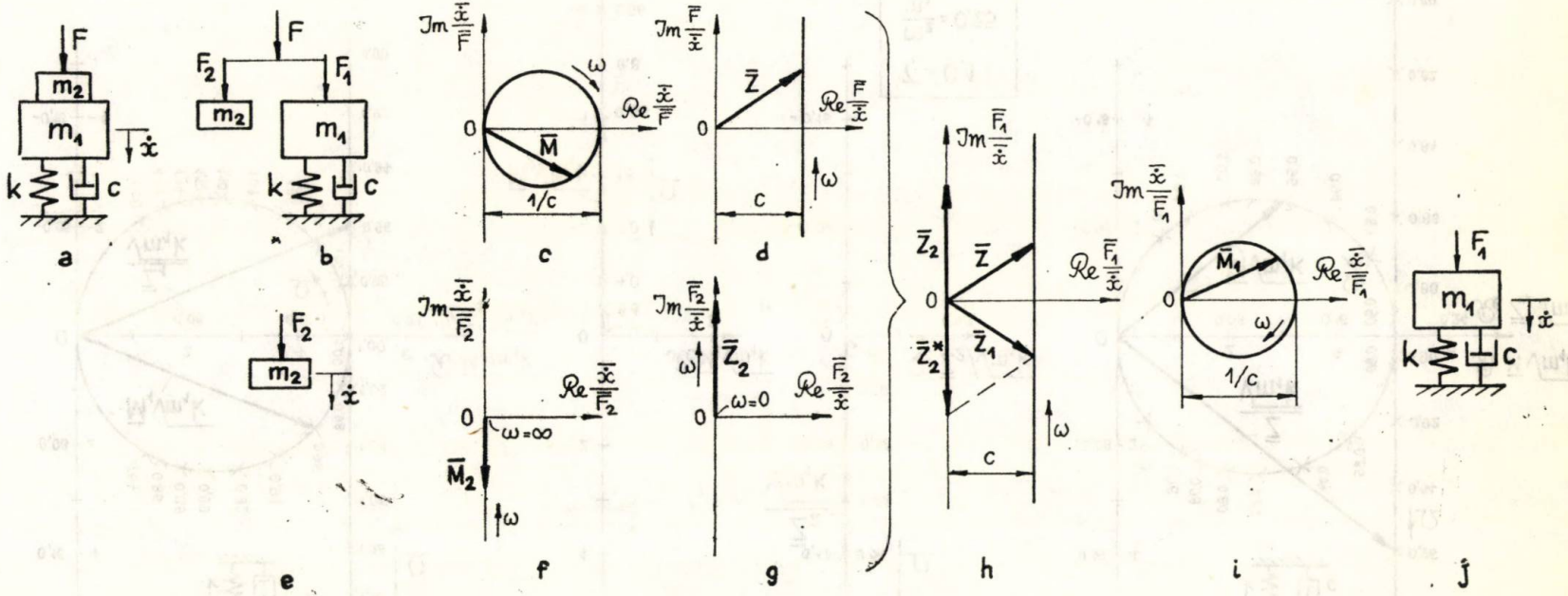


Fig. 14

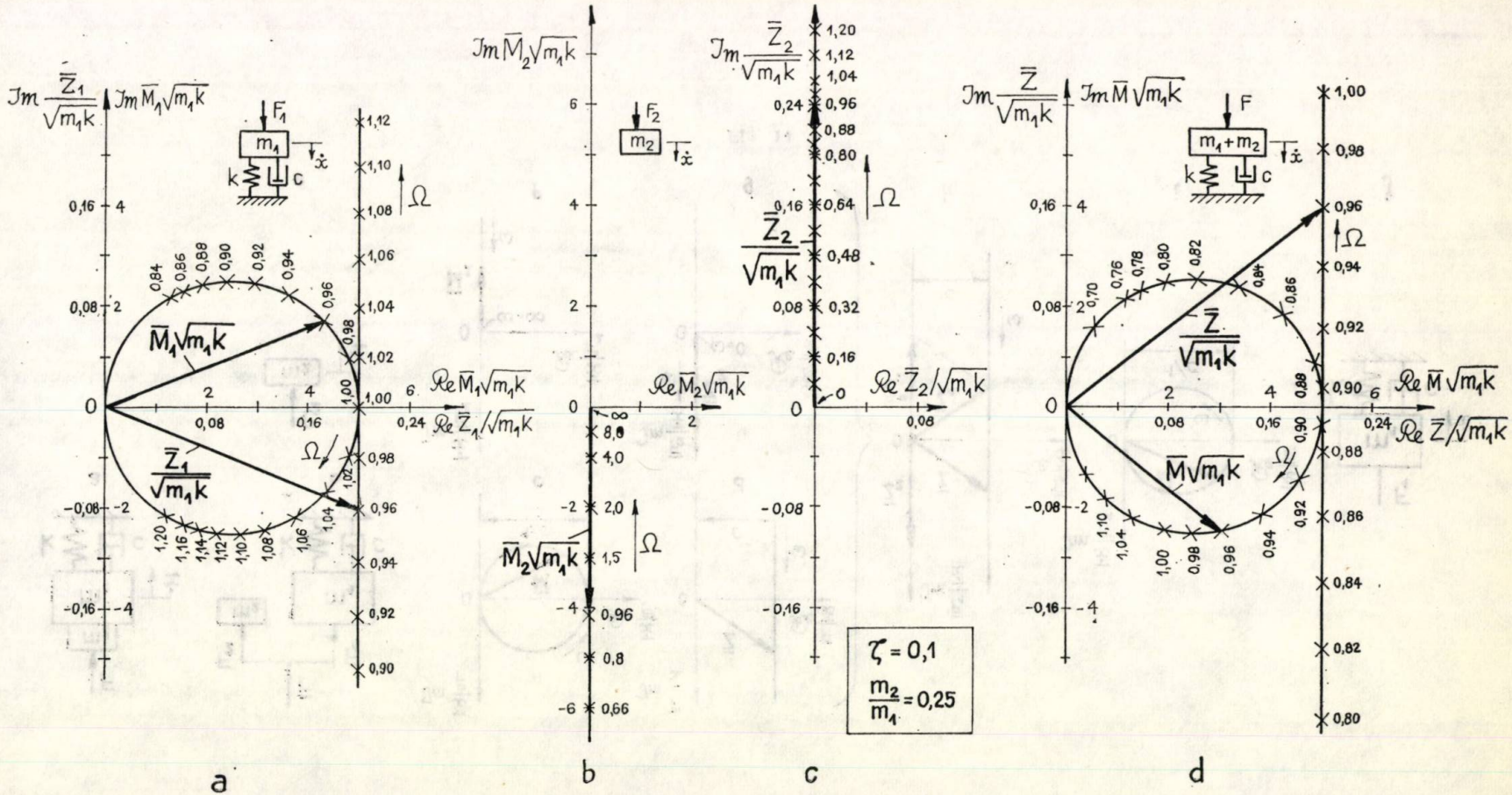


Fig. 15

În figura 15*d* s-a reprezentat mobilitatea adimensională complexă

$$\bar{M}\sqrt{m_1 k} = \frac{1}{2\zeta + j\left[(1+\mu)\,\Omega - \frac{1}{\Omega}\right]}, \tag{23}$$

iar la o scară diferită, inversul acesteia — impedanța mecanică adimensională complexă $\frac{\bar{Z}}{\sqrt{m_1 k}}$.

În figura 15*b* s-a trasat diagrama mobilității masei m_2

$$\bar{M}_2\sqrt{m_1 k} = -j\,\frac{1}{\mu\,\Omega}, \tag{24}$$

iar în figura 15*c* — diagrama impedanței mecanice corespunzătoare $\frac{\bar{Z}_2}{\sqrt{m_1 k}}$.

Din suprapunerea figurilor 15*c* și 15*d*, după efectuarea operației vectoriale (22), se obține diagrama impedanței mecanice din figura 15*a*, care prin inversare dă diagrama mobilității subsistemului studiat

$$\bar{M}_1\sqrt{m_1 k} = \frac{1}{2\zeta + j\left(\Omega - \frac{1}{\Omega}\right)}. \tag{25}$$

Construcția grafică pentru $\Omega = 0{,}96$ (într-o variantă puțin modificată) este arătată în figura 16, unde s-au folosit aceleași scări ca în figura 12. Vectorul $\overline{OM}$ al mobilității totale și $\overline{OM}_2$ al mobilității masei m_2, reprezintă baza de calcul. Alegînd raza cercului de inversiune egală cu diametrul cercului mobilității, diagrama impedanței totale — dreapta (Δ) — va fi tangentă la cerc în punctul de tangență al celor două cercuri. Prelungirea vectorului OM taie dreapta (Δ) în Z*. Vectorul $\overline{OZ}$, simetricul lui $\overline{OZ}^*$ în raport cu axa reală, reprezintă inversul lui OM.

Perpendiculara în M_2 pe $\overline{OM}_2$ intersectează cercul

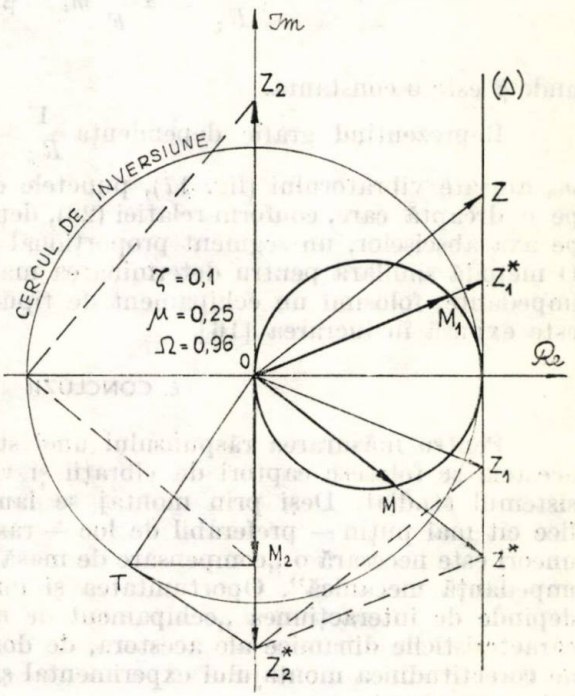


Fig. 16

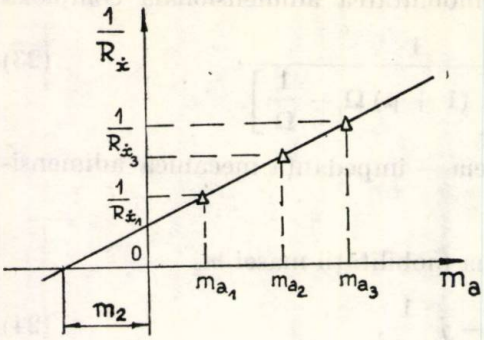


Fig. 17

de inversiune în punctul T. Tangenta în T la acest cerc determină pe axa imaginară vectorul $\overline{OZ_2^*}$, conjugatul vectorului impedanţei masei m_2 (deoarece $\overline{OM_2} \cdot \overline{OZ_2^*} = \overline{OT}^2$). Se determină vectorul $\overline{OZ_1} = \overline{OZ} + \overline{OZ_2^*}$. Simetricul acestuia în raport cu axa reală $\overline{OZ_1^*}$ intersectează cercul mobilităţii în punctul M_1 determinînd vectorul $\overline{OM_1}$ — mobilitatea sistemului studiat, la pulsaţia considerată.

S-a arătat că diagrama $\overline{M}_2$ se poate trasa analitic, după o determinare prealabilă a masei m_2. În cazul folosirii instalaţiei din figura 9, se procedează în felul următor. De sistemul mobil al vibratorului se ataşează diferite mase m_a şi se măsoară semnalele $R_{\dot{x}}$ la ieşirea captorului de viteze (respectiv segmente pe inscriptorul $X-Y$) folosind o excitaţie cu forţă F constantă şi la aceeaşi pulsaţie ω. Forţa F va deplasa masa totală $m_t = m_2 + m_a$ cu o viteză $\dot{x} = \alpha R_{\dot{x}}$, unde α este un factor de proporţionalitate. Deoarece $F = m_t \ddot{x} = m_t \omega \dot{x}$,

$$\frac{1}{R_{\dot{x}}} = \alpha \frac{\omega}{F} m_t = \beta m_t, \tag{26}$$

unde β este o constantă.

Reprezentînd grafic dependenţa $\frac{1}{R_{\dot{x}}} - m_a$ pentru diferite mase m_a ataşate vibratorului (fig. 17), punctele obţinute trebuie să se înscrie pe o dreaptă care, conform relaţiei (26), determină — prin extrapolare — pe axa absciselor, un segment proporţional cu m_2.

O metodă similară pentru determinarea masei mobile m_h a unui cap de impedanţe, folosind un echipament de tipul celui prezentat în figura 5, este expusă în lucrarea [16].

6. CONCLUZII

Pentru măsurarea răspunsului unei structuri şi a forţelor aplicate acesteia se folosesc captori de vibraţii şi vibratoare ataşaţi mecanic de sistemul studiat. Deşi prin montaj se iau măsuri ca aceştia să modifice cît mai puţin — preferabil de loc — răspunsul dinamic al structurii, uneori este necesară o „compensare de masă" sau chiar o „compensare de impedanţă mecanică". Oportunitatea şi implicaţiile acestor compensări depinde de interacţiunea „echipament de măsură—structură", deci de caracteristicile dinamice ale acestora, de domeniul frecvenţelor de lucru, de corectitudinea montajului experimental şi valabilitatea modelelor analitice considerate.

Ansamblul problemelor ridicate de corecțiile ce trebuie efectuate la măsurile de impedanță mecanică este mult prea larg pentru a fi tratat într-un articol de extinderea celui de față. De aceea, în lucrare s-a făcut doar o sinteză a problemelor legate de „compensarea masei" în cazul unei structuri rezonante simple, cunoscut fiind faptul că la structuri complexe antirezonanțele sînt afectate doar de constante elastice adiționale. S-a expus baza teoretică și principiul metodelor de compensare, utilizînd modelul cu un grad de libertate, avînd în vedere folosirea unui echipament de produs și măsurat vibrații existent în dotarea laboratoarelor noastre. Odată înțeles, principiul poate fi aplicat unor probleme reale mai complicate, la structuri cu mai multe grade de libertate etc.

Analiza teoretică a permis explicarea unor rezultate experimentale aparent contradictorii din literatură. Astfel, după unii autori [5] necompensarea maselor duce la calculul unor valori mai mari ale amortizării din sistem, iar după alții [15] la valori mai mici, deși în realitate atașarea unei mase nu poate modifica coeficientul de amortizare. În lucrare se arată că eroarea aparentă se datorește formulelor diferite folosite la calculul amortizării.

Echipamentul considerat „ideal" pentru măsurări de impedanță mecanică este cel care conține un captor de forțe sau un cap de impedanțe, dispuse cît mai aproape de structură, și o unitate de compensare electrică a maselor. În lipsa acestora, se recurge la compensarea analitică a impedanței mecanice a vibratorului, folosind metoda grafică expusă în lucrare.

Această corecție este absolut necesară la studiul sistemelor ale căror caracteristici dinamice — amortizare, constantă elastică și masă echivalentă — au valori apropiate de cele ale părții mobile a vibratorului. La frecvențe de lucru apropiate de frecvența proprie a echipamentului mobil al vibratorului, se recomandă compensarea de impedanță. La frecvențe depărtate de aceasta este suficientă o compensare de masă.

Primită în redacție la 18 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. American Standard USAS S2.6—1963: Specifying the Mechanical Impedance of Structures.
2. D. J. Ewins, *Some whys and wherefores of impedance testing*, Dynamic Testing Symposium of S.E.E., Imperial College, London, 5—6 Jan., 1971.
3. D. J. Ewins, M. G. Sainsbury, *Mobility measurements for the vibration analysis of connected structures*, Shock and Vibration Bulletin, **42**, 105—122 (1972).
4. G. M. Coleman, *Impedance head mass cancellation consideration*, S.D.C. Technical Publication.
5. A. C. Keller, *Fundamentals for mechanical impedance analysis*, S.D.C. Technical Publication, M—2, 6—67.
6. I. P. Vatz, *Determination of modal mass from test data*, Shock and Vibration Bulletin, **38**, Part 3, 271—298 (1968).
7. Instruction Manual, *Mass Compensation Unit Type 5565*, Brüel & Kjaer, 61—795.
8. M. Rades, *Metode de rezonanță pentru studiul dinamic al structurilor deformabile*, St. cerc. mec. apl., **32**, 607—633 (1973).
9. D. J. Mead, *The internal damping due to structural joints and techniques for general damping measurement*. A.R.C. Report 19870 (1958).

10. M. RADEŞ, *Metode de analiză grafică a răspunsului dinamic al sistemelor mecanice*, St. cerc. mec. apl., **33**, 75—103 (1974).
11. A. C. KELLER, *Vector component techniques: A modern way to measure modes*, Sound and Vibration, *3*, 18—26 (1969).
12. R. E. KERFOOT, *Solutions for mechanical impedance measurement problems*, S.D.C. Technical Publication, M—1, 9—66.
13. I. S. ANTONIU, *Chestiuni speciale de electrotehnică*, Editura Academiei, Bucureşti, 1956.
14. M. RADEŞ, *A technique for measuring the dynamic properties of polyurethane foam layers*, Second Int. Symp. RILEM „New Developments in Non-Destructive Testing of Non-Metallic Materials", Constanţa, 4—7 Sept. 1974.
15. J. W. PENDERED, R.E.D. BISHOP, *Extraction of data for a sub-system from resonance test results*, Jnl. Mech. Engineering Science, **5**, 368—378 (1963).
16. M. RADEŞ, *Vibraţiile verticale axial-simetrice ale unui corp rigid rezemat pe o fundaţie inerţială de tip Pasternak*, St. cerc. mec. apl., **32**, 231—253 (1973).

METODĂ DINAMICĂ DE DETERMINARE A MODULELOR DE ELASTICITATE LONGITUDINALE ŞI TRANSVERSALE

de ADALBERT NAHLIK
I. C. P. E. T. Bucureşti

În articol se dă soluţia ecuaţiei lui Timosenko, care descrie procesul vibratoriu al unei bare drepte de secţiune constantă şi liberă la capete, stabilindu-se astfel o relaţie dintre modulul de elasticitate longitudinal E şi frecvenţele proprii ale diferitelor forme de vibraţii transversale. Cu ajutorul unei instalaţii experimentale a fost determinată variaţia acestor frecvenţe proprii, deci şi a lui E, între 20—575°C pentru cîteva tipuri de oţel şi alamă folosite în construcţia turbinelor cu abur şi a turbogeneratoarelor. Pentru aceleaşi epruvete a fost stabilită şi variaţia frecvenţelor proprii de vibraţii de torsiune, deci şi a modulului de elasticitate transversal G.
La sfîrşitul articolului se dau cîteva aprecieri privind folosirea metodei dinamice descrise.

Cunoaşterea modulelor de elasticitate ale oţelurilor atît la temperatură ambiantă, cît şi la temperaturi înalte, este o cerinţă permanentă în special a proiectantului agregatelor termoenergetice. Acest interes este justificat prin aceea că la şocuri termice şi chiar la un regim termic staţionar în materiale apar tensiuni termice dependente de modulul de elasticitate longitudinal E şi transversal G.

Faptul că pentru oţelurile termorezistente româneşti mai noi nu există date privind variaţia acestor module funcţie de temperatură, a impus căutarea unor metode relativ uşor accesibile şi precise pentru determinarea lor.

Metoda statică, cea mai răspîndită de altfel, se bazează pe măsurarea sarcinii şi a deformaţiei corespunzătoare la o epruvetă standardizată. La solicitarea epruvetei la tracţiune trebuie să se ţină seamă de contracţia transversală a secţiunii active, curba tensiune-alungire obţinută se corectează în consecinţă. De obicei din cauza unor procese de relaxare curba tensiune-alungire este influenţată de viteza de aplicare a sarcinii. La cele de mai sus se adaugă şi faptul că sarcina aplicată nu trebuie să cauzeze deformaţii peste limita de elasticitate. Aparatura este voluminoasă, scumpă, necesită realizarea unor forţe de ordinul 30—100 tf, un sistem electronic sensibil pentru măsurarea deformaţiilor, ceea ce mai ales la temperaturi înalte ridică probleme deosebit de dificile. În afară de aceasta epruveta trebuie să aibă forme şi dimensiuni standardizate, cerinţă care poate provoca de multe ori greutăţi suplimentare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 4, 1976 P. 569—576

Metoda dinamică se bazează pe relaţia ce există între viteza de propagare a sunetului în materiale şi modulul de elasticitate corespunzător. Această metodă comportă trei etape :

a) găsirea unor relaţii analitice suficient de exacte între frecvenţele proprii de vibraţie de formă oarecare ale unor corpuri şi modulele de elasticitate ;

b) determinarea pe cale experimentală a frecvenţelor proprii de vibraţie ale unor epruvete confecţionate din materialul studiat ;

c) calculul modulelor de elasticitate E şi G pe baza punctelor a) şi b).

În cadrul lucrării s-a ajuns la concluzia că din punct de vedere experimental vibraţiile transversale (cu frecvenţe proprii f_p) pot fi mai uşor stăpînite decît cele longitudinale. Acest lucru ne-a obligat să alegem drept obiect al punctului a) de mai sus relaţia de tipul $E = \varphi(f_p)$, iar pentru modulul de elasticitate transversal o relaţie de tipul $G = \psi(f_t)$, unde f_t reprezintă frecvenţa proprie de vibraţie torsională.

VIBRAŢIILE TRANSVERSALE ALE UNEI BARE DREPTE, LIBERE, DE SECŢIUNE CONSTANTĂ

Teoria simplificată a vibraţiilor libere ale unei bare drepte, de secţiune constantă, este bine cunoscută. Reamintim doar că ecuaţia diferenţială care descrie mişcarea ei are forma

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \tag{1}$$

unde ρ reprezintă densitatea materialului în kg/cm³ ;

A, J — suprafaţa şi momentul de inerţie al secţiunii faţă de axa perpendiculară pe axa y ce trece prin centrul de greutate al secţiunii, în cm², respectiv cm⁴ ;

E — modulul de elasticitate longitudinal în N/cm² ;

x — abscisa măsurată în lungul barei în cm ;

y — deplasarea transversală a unui punct al barei, în cm ;

t — timpul în s.

Introducînd condiţiile la limită, corespunzătoare unei bare libere (momentul încovoitor şi forţă tăietoare nule la capete), obţinem următoarea expresie pentru frecvenţele proprii :

$$f_p = \frac{X_p'^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A l^4}}, \quad [\mathrm{s}^{-1}], \tag{2}$$

unde l este lungimea barei în cm ;

X_p' — factor dependent numai de numărul armonicii p.

Din relaţia (2) găsim modulul de elasticitate E' pentru o secţiune circulară cu diametrul d şi pentru o secţiune pătrată cu latura h :

$$E' = M \frac{\rho l^4}{d^2} f_{p0}^2 \quad \text{şi} \tag{3}$$

$$E' = N \frac{\rho l^4}{h^2} f_{p\square}^2, \tag{3a}$$

unde

$$M = \frac{64\,\pi^2}{X_p'^4} \quad \text{şi} \quad N = \frac{48\,\pi^2}{X_p'^4}.$$

Valorile factorilor X_p' pentru primele patru armonici sînt trecute în tabela 1 împreună cu cei doi coeficienţi de calcul M şi N (pentru secţiune circulară şi pătrată).

Tabela 1

Valorile factorilor X_p' şi ale coeficienţilor M şi N

Nr. armonicii p	1	2	3	4
X_p'	4,7300	7,8532	10,9960	14,1372
M	1,26193	$1{,}66071.10^{-1}$	$4{,}32057.10^{-2}$	$1{,}58137.10^{-2}$
N	0,94645	$1{,}24553.10^{-1}$	$3{,}24043.10^{-2}$	$1{,}18603.10^{-2}$

Dacă ţinem seamă —după S.P. Timoşenko — de influenţa forţei tăietoare, de inerţia rotirii secţiunii şi de deplasările cauzate de lunecare obţinem o formă mai exactă a ecuaţiei (1) :

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EJ \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - J\rho\left(1 + \frac{E}{Gk}\right) \frac{\partial^4 y}{\partial x^2\,\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{Gk} \frac{\partial^4 y}{\partial t^4} = 0. \tag{4}$$

În ecuaţia de mai sus k este factorul de formă dependent de geometria secţiunii transversale. Frecvenţele proprii ale barei vor avea în acest caz expresia :

$$f_p = \frac{X_p^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EJ}{\rho A l^4}}\ [\mathrm{s}^{-1}], \tag{5}$$

de unde modulul de elasticitate va fi pentru o secţiune circulară :

$$E = \frac{64\,\pi^2}{X_p^4} \frac{\rho l^4}{d^2} f_p^2. \tag{6}$$

Rădăcinile X_p au fost determinate pe un calculator electronic, pentru un domeniu larg de valori ale raportului E/G, l/d și k. Pînă la precizarea experimentală a valorii coeficientului k, în calcule s-a acceptat $k = 0{,}9$, conform datelor din literatură. Pentru oțeluri s-a admis $E/G = 2{,}6$. Valorile X_p^2 pentru primele patru armonici și $l/d = 5 \div 40$, $E/G = 2{,}6$, $k = 0{,}9$ sînt redate în tabela 2.

Tabela 2

Variația X_p^2 funcție de $2\ l/d$ ($E/G = 2{,}6$; $k = 0{,}9$)

$1/d$	X_1^2	X_2^2	X_3^2	X_4^2
5	20,391803	49,304514	84,178337	121,272878
6	20,925555	52,163863	91,358764	134,476448
7	21,274486	54,184905	96,790246	144,928885
8	21,513352	55,651651	100,956926	153,293877
9	21,683240	56,742030	104,197308	160,046953
10	21,808009	57,570368	106,750972	165,544139
11	21,902137	38,211995	108,789208	170,055745
12	21,974807	58,717695	110,435670	173,788395
13	22,032013	59,122488	111,780724	176,900874
14	22,077818	59,451034	112,891058	179,515922
15	22,115040	59,721000	113,816556	181,729010
16	22,145696	59,943332	114,594897	183,614854
17	22,171230	60,133616	115,254922	185,232348
18	22,192702	60,293090	115,818887	186,628241
19	22,210956	60,429289	116,304173	187,839886
20	22,226577	60,546462	116,724472	188,897348
21	22,240052	60,647985	117,090683	189,824979
22	22,251768	60,736491	117,411561	190,642631
23	22.262011	60,814096	117,694173	191,366627
24	22,271008	60,882503	117,944283	192,010414
25	22,278948	60,943114	118,166628	192,585166
26	22,286015	60,997045	118,365126	193,100236
27	22,292309	61,045253	118,543025	193,563436
28	22,297959	61,088511	118,703056	193,981417
29	22,303038	61,127464	118,847509	194,359758
30	22,307615	61,162669	118,978315	194,703253
31	22,311749	61,194584	119,097134	195,015978
32	22,315526	61,223609	119,205366	195,301479
33	22,318959	61,250073	119,304229	195,562777
34	22,322092	61,274278	119,394766	195,802487
35	22,324953	61,296479	119,477879	196,022915
36	22,327599	61,316878	119,554354	196,226047
37	22,330017	61,335661	119,624878	196,413616
38	22,332263	61,352999	119,690038	196,587180
39	22,334323	61,369049	119,750377	196,748055
40	22,336240	61,383912	119,806353	196,897472

Deoarece $X_p < X_p'$, modulele de elasticitate calculate pe baza lor vor respecta relația $E > E'$ (unde E' este determinat conform relației (3) sau (3a), pentru frecvența unei armonici oarecare f_p, stabilită experimental pentru o epruvetă de dimensiuni și material date). Diferența procentuală dintre cele două module de elasticitate a fost calculată pe baza

relaţiei :

$$\Delta E\,\% = \frac{E - E'}{E'} \cdot 100 = \left(\frac{X_p'^4}{X_p^4} - 1 \right) \cdot 100 \qquad (7)$$

şi reprezentată în figura 1.

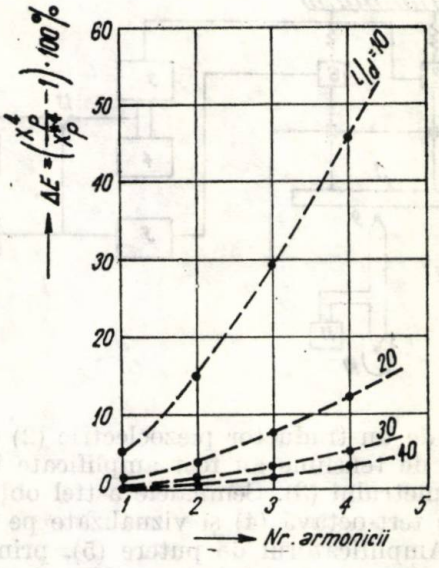


Fig. 1. — Dependenţa erorii la determinarea lui E funcţie de numărul armonicii pentru diferite l/d.

Din analiza curbelor rezultă că diferenţa procentuală dintre modulele de elasticitate E şi E' creşte odată cu micşorarea raportului l/d, creşterea fiind mai însemnată la armonicile superioare.

VIBRAŢIILE TORSIONALE ALE UNEI BARE DREPTE DE SECŢIUNE CIRCULARĂ

Frecvenţa vibraţiilor torsionale ale unei bare de secţiune constantă, circulară, are, după cum se ştie, expresia

$$f_t = \frac{p}{2l} \sqrt{\frac{G}{\rho}}\ [s^{-1}], \qquad (8)$$

de unde poate fi exprimat modulul de elasticitate transversal :

$$G = \frac{4\,l^2 \rho}{p^2} f_t^2. \qquad (8a)$$

Se remarcă că G nu depinde de diametrul barei, el fiind direct proporţional cu pătratul lungimii şi cu masa specifică a materialului barei.

INSTALAȚIA EXPERIMENTALĂ, METODOLOGIE DE LUCRU

Schema-bloc a instalației experimentale este reprezentată în figura 2. Epruvetele de formă cilindrică ($l \cong 200$ mm, $d \cong 10$ mm) au fost suspendate de două sîrme de 0,01 mm grosime, în secțiunile nodale corespunzătoare primei armonici a vibrației transversale (0,224 l, resp. 0,776 l) și introduse într-o etuvă cu termoreglare (12). Vibrațiile epruvetei au fost

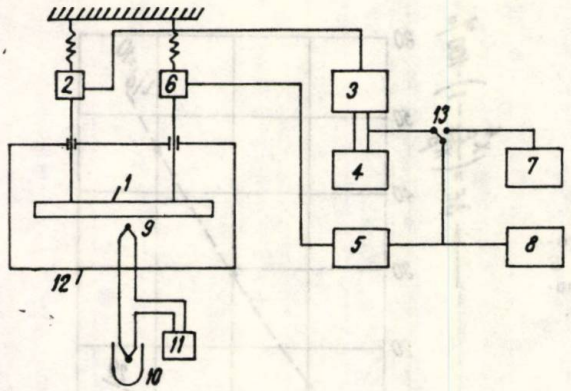


Fig. 2. — Schema bloc a instalației experimentale.

sesizate de un traductor piezoelectric (2) construit în acest scop, ale cărui semnale de tensiune au fost amplificate în blocul amplificator-integrator al vibrometrului (3). Semnalele astfel obținute au fost trecute prin analizorul de terț-octavă (4) și vizualizate pe ecranul osciloscopului vibrometrului. Amplificatorul de putere (5), prin comutatorul (13) a amplificat semnalele provenite ori de la analizorul (4) în regim de autoexcitație, ori de la generatorul de frecvență (7). Excitatorul electrodinamic (6) fiind alimentat de (5) a întreținut vibrațiile barei (1) prin intermediul sîrmei de suspensie, Frecvența a fost controlată cu frecvențmetrul digital (8).

Temperatura din etuvă a fost măsurată cu un termocuplu cupru-constantan (9). sudura rece (10) fiind menținută la 0°C (gheață în curs de topire), t.e.m. fiind măsurată cu un milivoltmetru de precizie (11).

Suspendarea epruvetelor s-a făcut în două puncte diametral opuse pentru a putea genera și vibrațiile torsionale. Suspensia elastică a traductorului de vibrație și a excitatorului a asigurat izolarea practic totală a epruvetei de vibrațiile parazitare ale incintei.

Identificarea diferitelor forme de vibrații s-a făcut cu ajutorul unui traductor electropneumatic realizat la ICPET, în combinație cu un sonometru, ale cărui semnale au fost comparate ca fază cu semnalele sinusoidale de tensiune obținute de la generatorul de frecvență.

REZULTATE OBȚINUTE, CONCLUZII

În cadrul experimentărilor a fost stabilită variația modulelor de elasticitate longitudinale și transversale pentru patru epruvete, funcție de temperatură. Rezultatele sub forma curbelor de variație a modulului de elasticitate E și a coeficientului lui Poisson funcție de temperatură au

fost reprezentate în figurile 3 și 4, unde cifrele de pe curbe indică următoarele materiale : *1* — oțel Cr—Mo—V, *2* — oțel Cr — Mo, *3* — oțel Cr—Ni—V, *4* — alamă, folosite în construcția turbinelor cu abur și a turbogeneratoarelor.

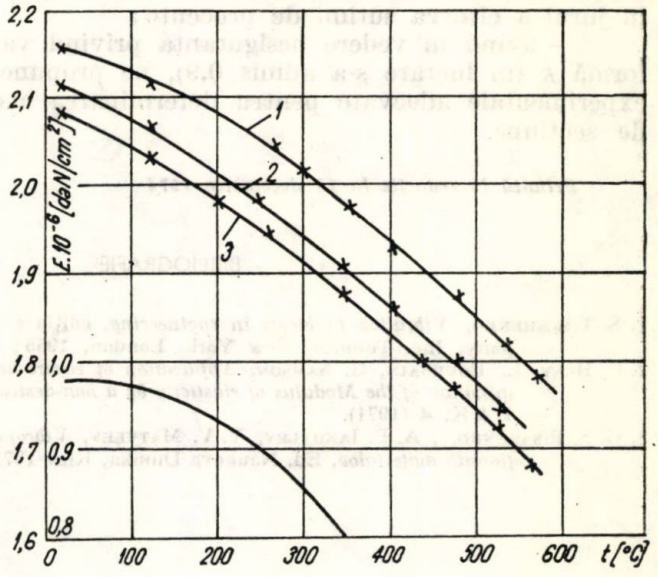


Fig. 3. — Variația modulelor de elasticitate E funcție de temperatură.

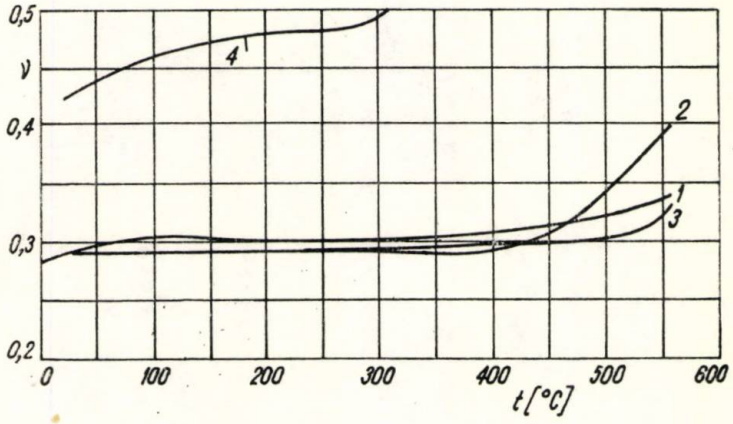


Fig. 4. — Variația coeficientului lui Poisson funcție de temperatură.

Se observă că la oțelurile examinate, panta de descreștere a modulului E funcție de temperatură este practic constantă — cel puțin în domeniul de temperatură studiat. Concluziile la care s-a ajuns în urma lucrărilor efectuate sînt următoarele :

— metoda dinamică reprezintă o posibilitate rapidă, precisă și accesibilă de determinare a modulelor de elasticitate E și G în diferite condiții de temperatură, pentru orice material, chiar și nemetalic ;

— precizia determinărilor poate fi mult mărită, mai ales la epruvete scurte — dacă se porneşte de la soluţiile ecuaţiei Timoşenko;

— modulele de elasticitate obţinute cu ajutorul metodei dinamice sînt mai mici decît cele obţinute static, diferenţa fiind însă mică (<1%) şi se află mult în afara limitelor de erori ale experimentului, care au valori în jurul a cîtorva sutimi de procente;

— avînd în vedere nesiguranţa privind valoarea coeficientului de formă k (în lucrare s-a admis 0,9), ne propunem găsirea unei metode experimentale adecvate pentru determinarea acestuia la diferite forme de secţiune.

Primită la redacţie la 18 decembrie 1974

BIBLIOGRAFIE

1. S. Timoshenko, *Vibration problems in engineering*, ediţia a III-a , D. van Nostrand Company, Inc. Toronto, New York, London, 1955;
2. D. Blay, L. Bourgain, G. Samson, *Application of electro-acoustical techniques to the determination of the Modulus of elasticity by a non-destructive process*, Technical Review B & K, *4* (1971).
3. G. S. Pisarenko, , A. P. Iakovlev, V. V. Matveev, *Vibropogloşciaiuşcie svoistva construcţionnîh materialov*, Ed. Naukova Dumka, Kiev 1971.

CONSIDERAȚII ASUPRA UTILIZĂRII CALCULATORULUI ELECTRONIC NUMERIC ÎN VEDEREA DETERMINĂRII CONDIȚIILOR DE PREVENIRE A GRIPAJULUI ROȚILOR DINȚATE

de A. TUDOR

Institutul politehnic București

Se prezintă parametrii de dependență ai gripajului roților dințate (ungerea, microgeometria flancului, temperatura instantanee) și corelarea acestora într-un algoritm, pentru a putea fi programat pe un calculator electronic.
Se adimensionalizează mărimile caracteristice de pe linia de angrenare, pentru a putea fi utilizat programul la proiectarea oricărui angrenaj modelabil într-unul cilindric cu dinți drepți.
Temperatura critică de distrugere a peliculei de ulei neaditivat se poate determina cu ajutorul indicelui de defect determinabil pe o instalație cu role sau Timken.

Transmisiile moderne cu roți dințate impun gabarite minime, cu utilizarea corespunzătoare a materialelor în condiții de încărcare și viteze mărite, ceea ce face ca uzura de gripaj să nu mai poată fi neglijată. Pentru transmisii mari (pentru nave, mori de ciment etc.) această uzură este preponderentă și deci încă din faza de proiectare trebuie stabilite și prevenite condițiile de scoatere din uz a angrenajului.

Stadiul actual al cercetărilor privind gripajul roților dințate pune pe prim plan, ca parametrii : starea de ungere în comparație cu mărimea asperităților [2], [5], [6], temperatura critică a angrenajului (instantanee [10], medie [14]) precum și diverse criterii experimentale dependente de sarcină și viteză (stabilite de Almen, Hoffer, Niemann etc.).

În lucrarea de față ne propunem să prezentăm un studiu și considerentele care să permită utilizarea calculatorului electronic pentru a facilita analiza condițiilor de evitare a gripajului și, implicit, să determinăm algoritmul de calcul la gripaj pe baza priorității următorilor factori : grosimea filmului de lubrifiant, rugozitatea suprafeței flancului (sub aspectul mărimii și proprietăților sale elastice) și temperatura instantanee maximă.

În alcătuirea programului de calcul, se va avea în vedere determinarea tipului de ungere caracteristic fiecărui punct de pe linia de angrenare și grosimea corespunzătoare a filmului de lubrifiant. Analiza parametrilor de ungere se fac în ipoteza că lubrifiantul este de tip ulei mineral neaditivat, iar cupla de frecare este un angrenaj cilindric cu dantură dreaptă și profil evolventic. De asemenea, se are în vedere ca mărimile de

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 4, 1976, P. 577–587

intrare să fie minime ca număr, ceea ce face ca în proiectare să poată fi utilizat programul de calcul.

Pentru generalizarea rezultatelor, se vor adimensionaliza principalii parametri caracteristici de pe linia de angrenare astfel:

a) poziţia relativă a unui punct curent de angrenare x,

$$x = \frac{l}{a \cdot \sin \alpha} \quad \text{şi} \quad -\frac{1}{1+i} \leqslant x \leqslant \frac{i}{1+i}, \tag{1}$$

unde l este abscisa unui punct de pe linie, originea fiind în polul P;
α — unghiul real de angrenare;
a — distanţa dintre axele angrenajului;
i — raportul de transmitere;

b) funcţia razei de curbură redusă y_ρ,

$$y_\rho = \frac{1}{1+i}(1 + x + ix) \cdot (i - x - ix); \tag{2}$$

c) funcţia vitezei de alunecare y_{va},

$$y_{va} = x \frac{(i+1)^2}{i} \cdot \sin \alpha; \tag{3}$$

d) funcţia vitezei totale y_v,

$$y_v = \left(1 + x \frac{i^2 - 1}{2i}\right) \cdot \sin \alpha; \tag{4}$$

e) parametru de variaţie a sarcinii fiecărei perechi de dinţi de pe linia de angrenare β,

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{pentru } \dfrac{-1}{1+i} \leqslant x < -x_{s1} \text{ şi } x_{s2} < x \leqslant \dfrac{i}{1+i}, \quad (5) \\ \dfrac{x(1-k) - x_{s1} + k\,x_{E1}}{x_{E1} - x_{s1}} & \text{pentru } -x_{s1} \leqslant x < -x_{e1}, \quad (5') \\ 1 & \text{pentru } -x_{E1} \leqslant x \leqslant x_{E2}, \quad (5'') \\ \dfrac{x(1-k) - x_{s2} + k x_{E2}}{x_{E2} - x_{S2}} & \text{pentru } x_{E2} \leqslant x \leqslant x_{S2}, \quad (5''') \end{cases}$$

unde k este un coeficient de repartizare a sarcinii, dependent de gradul de acoperire real; poate fi determinat cu suficientă precizie pentru

roţile dinţate cilindrice cu dinţi drepţi [1], numai în funcţie de eroarea pasului de bază.

$$k \approx 0{,}41 + 8{,}22\frac{\Delta}{F_1}, \tag{6}$$

unde Δ este eroarea pasului de bază (μm),

F_1 — sarcina normală maximă statică ce revine unei perechi de dinţi (daN);

S_1, S_2 — punctul de intrare, respectiv ieşire din angrenare;

E_1, E_2 — punctele de angrenare unipară;

x_{S1}, x_{S2}, x_{E1}, x_{E2} — distanţele relative ale punctelor respective, calculate din geometria angrenajului;

f) parametrii tribologici de pe linia de angrenare:

— parametru adimensional de lubrifiant X_u,

$$X_u = \frac{\alpha_p \cdot P_1}{R_{r_1} \cdot y_\rho} \cdot \sqrt{\frac{P_1}{\eta_0 \cdot \omega_1 \cdot R_{r_1} \cdot y_v}}, \tag{7}$$

unde α_p este parametrul de variaţie a vîscozităţii lubrifiantului cu presiunea (cm^2/daN);

R_{r_1} — raza de rostogolire a pinionului (cm);

η_0 — viscozitatea dinamică a lubrifiantului ($daN \cdot s/cm^2$)

ω_1 — viteza unghiulară a pinionului (rad/s);

P_1 — sarcina normală pe unitatea de lungime a dintelui corespunzătoare punctului curent.

$$P_1 = \beta F_1, \tag{7'}$$

— parametru adimensional al elasticităţii materialelor roţilor dinţate Xe,

$$Xe = \frac{P_1}{R_{r_1}} (E \cdot \eta_0 \cdot \omega_1 \cdot y_\rho \cdot y_v)^{-1/2}, \tag{8}$$

E fiind modulul de elasticitate redus, corespunzător materialelor cuplei de frecare

— parametru adimensional de viteză X_v,

$$X_v = \alpha_p \cdot (E^3 \cdot \eta_0 \cdot \omega_1 \cdot y_v)^{1/4}, \tag{9}$$

— parametru adimensional de sarcină X_p,

$$X_p = \alpha_p \cdot \sqrt{\frac{P_1 \cdot E}{2\pi \cdot R_{r_1} \cdot y_\rho}}. \tag{10}$$

Natura ungerii unui angrenaj depinde atît de geometria şi elasticitatea danturii, cît şi de condiţiile de exploatare (sarcină, viteză, lubrifiant), fapt pentru care pot fi utilizate valorile mărimilor tribologice adimensionale astfel :

— regim de ungere hidrodinamic [2], [4] dacă : $X_u < 1{,}5$ şi $X_e < 0{,}6$;

— regim de ungere hidrodinamic critic (viscozitatea variază cu presiunea) [4], dacă $X_p < 1$ şi $X_v < 1{,}8$;

— regim de ungere E.H.D.[2]—[6] dacă $X_u > 1{,}5$; $X_e > 0{,}6$; $1{,}8 < x_v < 100$ şi $1 < X_p < 100$.

Variaţia parametrilor tribologici adimensionali pe linia de angrenare permite determinarea tipului respectiv de ungere şi deci posibilitatea de calcul a grosimii filmului de lubrifiant.

Utilizînd funcţiile caracteristice de pe linia de angrenare aceste grosimi au expresiile :

$$h_{0H} = 2{,}45 \cdot \eta_0 \cdot \frac{R_{r_1}^2}{P_1} \cdot \omega_1 \cdot \cos\alpha \cdot y_v \cdot y_\rho \tag{11}$$

— în regim hidrodinamic ;

$$h_{0_{EHD}} = 2{,}65\, \alpha_p^{0,54} \cdot R_{r1}^{1,13} \cdot (\eta_0 \cdot \omega_1 \cdot y_v)^{0,7} \cdot y_\rho^{0,43} \cdot P_1^{-0,13} \cdot E^{-0,03} \tag{11'}$$

— în regim EHD ;

$$h_{0Hcr} = 1{,}05 R_{r1} \cdot y_\rho^{1/3} \cdot (\alpha_p \cdot \eta_0 \cdot y_v \cdot \omega_1)^{2/3} \tag{11''}$$

— în regim hidrodinamic critic.

Interdependenţa grosimii peliculei de ulei de microgeometria suprafeţei flancului (înălţimea rugozităţiilor) constituie o condiţie necesară de estimare a uzurii de gripaj. Suficienţa acestei dependenţe, încă nu este argumentată şi verificată experimental cu caracter de reproductibilitate [5].

Siguranţa de gripaj bazată pe ipoteza ruperii peliculei de lubrifiant de către asperităţile suprafeţei, se poate determina cu ajutorul parametrului adimensional C_{gu}.

$$C_{gu} = \frac{h_0}{\sigma}, \tag{12}$$

unde h_0 este grosimea minimă a peliculei de lubrifiant din zona hertziană, corespunzătoare fiecărui punct de pe linia de angrenare ;

σ — media aritmetică a abaterilor medii pătratice a rugozităţilor celor două elemente ale cuplei de frecare ($\sigma_{1,2}$).

Caracterul dispersiei microasperităţilor pe flanc (admiţînd o distribuţie normală Gauss) imprimă coeficientului de siguranţă al ungerii (C_{gu}) un aspect statistic, probabilitate maximă de apariţie a gripajului avînd zonele corespunzătoare frecvenţei maxime a înălţimilor rugozităţilor.

Mărimea parametrului C_{gu} [6], [15] implică, într-o oarecare aproximaţie, regimul de frecare şi deci estimează implicit cauzele de apariţie a gripajului.

Astfel dacă

$C_{gu} < 1$ — frecare limită, care conduce la uzură și deci gripajul apare cu siguranță;

$C_{gu} \geq 4$ — frecare fluidă, uzura foarte redusă, gripajul nu poate apare.

$1 < C_{gu} < 4$ — frecare mixtă, gripajul este posibil dar nu este cert.

Acest ultim caz este des întîlnit pe linia de angrenare, fapt pentru care un rol determinant în prognoza gripajului poate fi considerată microgeometria sub aspectul caracterului deformației.

Acest caracter al deformației poate fi determinat cu ajutorul indicelui de plasticitate a lui Williamson [7], care poate fi aplicat și flancurilor roților dințate.

$$\psi = \frac{E}{H} \cdot \sqrt{\frac{\sigma}{r}}, \tag{13}$$

unde H este microduritatea stratului superficial al flancului;

r — raza sferelor ce modelează asperitățile flancului.

Dată fiind rectificarea ca formă finală de prelucrare a flancurilor, asperitățile sînt conuri [9] și deci pot fi modelate ca sfere, de rază determinabilă cu relația [8]:

$$r = \frac{l^2}{8h}, \tag{14}$$

unde l este pasul rugozităților cu frecvență maximă de apariție;

h — înălțimea aceleași rugozități.

Deformația asperităților va fi:

— elastică dacă $\psi < 0{,}6$,

— elastoplastică dacă $0{,}6 < \psi < 10$,

— plastică dacă $\psi \geq 10$.

În cazul deformației elastice, posibilitatea de apariție a gripajului este puțin probabilă, dată fiind valoarea redusă a nivelului energetic de priză conform ipotezei sudării la rece a lui Semenov.

Deformația elastoplastică caracterizează fenomenul de aderență, care în anumite condiții de material și temperatură poate conduce la microsuduri locale. Dacă aceste microsuduri nu se foarfecă sub acțiunea mișcării normale, atunci gripajul apare cu siguranță.

Deformația plastică este caracteristică în general fazei de rodaj a angrenajului, în care, dacă nu se iau măsuri corespunzătoare cu privire la treptele și durata de încărcare, conduc la gripaj. Dacă microgeometria nu poate fi adusă din starea plastică în starea elastoplastică, atunci gripajul poate apare fără depășirea unei temperaturi critice.

Algoritmul de calcul urmărește în continuare, determinarea temperaturii instantanee maxime care devine hotărîtoare.

Pentru calculul acestei temperaturi se utilizează relația lui Blok [10] care pentru punctul curent de pe linia de angrenare are forma

$$T_i = 1{,}11 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{f \cdot P_1 \cdot \sqrt{\omega_1 \cdot R_{r1}} \cdot |y_{va}|}{t_1 \sqrt{|y_v + y_{va}|} + t_2 \sqrt{|y_v - y_{va}|}} \cdot \frac{1}{\sqrt{b}}, \tag{15}$$

unde $t_i = (\lambda_i \cdot \gamma_i \cdot c_i)^{1/2}$ este parametru de disipare termică;
λ_i — conductivitate termică [daN·cm/(cm.s.grad)];
γ_i — greutatea specifică [kg/cm³];
c_i — căldura specifică [daN.cm/(cm.grad)];
$i = 1$ — pinion;
$i = 2$ — roata.
Pentru oţelurile din care se fac roţile dinţate

$$t_1 = t_2 = t \approx 12 \ldots 16 \ (\text{kg.cm}^{-1} \cdot \text{s}^{0.5} \cdot {}^\circ\text{C}^{-1});$$

f — coeficient de frecare, ce caracterizează starea de ungere a punctului curent de pe linia de angrenare.
Pentru ungerea hidrodinamică f poate fi calculat cu relaţia

$$f = f_H = 3{,}309 \cdot \sqrt{\frac{\eta_0 \cdot \omega_1 \cdot R_{r1} \cdot y_v}{P_1}}. \tag{16}$$

Pentru ungerea hidrodinamică critică şi *E.H.D.*, f poate fi calculat cu relaţia dedusă experimental de A. Cameron şi O'Donogue [11], care pe linia de angrenare va avea forma:

$$f = f_H = f_{EHD} = 4{,}28 \cdot 10^{-2}(25{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot \sigma + 22) \cdot (\eta_0^{1/8} \cdot \omega_1^{1/2} \cdot R_{r1}^{1/2} \cdot y_\rho^{1/2} \cdot y_v^{1/6} \cdot y_{va}^{1/3})^{-1} \tag{17}$$

σ fiind în μm;
b — lăţimea hertziană de contact, şi poate fi determinată cu relaţia

$$b = \sqrt{\frac{32 P_1 \cdot R_{r1} \cdot y_\rho}{\pi E}}. \tag{18}$$

Admiţînd că această temperatură instantanee se suprapune peste temperatura medie a corpului pinionului (T_{m1}) şi al roţii (T_{m2}), temperatura maximă a angrenajului va fi

$$T_{\max.} = T_i + \frac{1}{2}(T_{m1} + T_{m2}). \tag{19}$$

Dacă această temperatură este mai mică decît o temperatură critică atunci griparea nu va apare.

Asupra acestei temperaturi critice, Blok [10] găseşte experimental o dependenţă aproximativ liniară cu vîscozitatea ca în figura 1.

De remarcat că această variaţie este valabilă numai pentru uleiurile neaditivate. Cu aceiaşi observaţie, Wydler [13] găseşte pentru roţile călite şi şle uite următoarea dependenţă:

$$T_{cr} = 140 \, C_\eta \cdot C_R \qquad (^\circ\text{C}), \tag{20}$$

unde $C_\eta = \dfrac{1{,}5\,E^0}{2 + E^0}$ (20')

este un factor de viscozitate; E^0 reprezintă viscozitatea uleiului în grade Engler la 50°C,

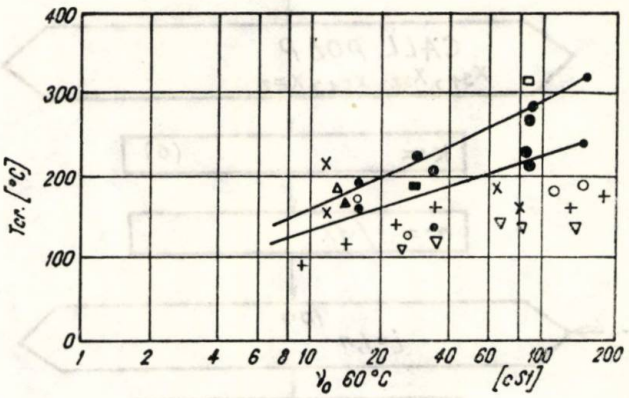


Fig. 1

$$C_R = \sqrt{(75 + R_{am})/4R_{am}} \tag{21}$$

este un factor de rugozitate, iar

$$R_{am} = \frac{2\,R_{a1} \cdot R_{a2}}{R_{a1} + R_{a2}} \tag{21'}$$

(R_{a1}, R_{a2} fiind rugozităţile flancului în μm).

Temperatura critică poate fi determinată şi pe un stand cu role sau Timken, folosind indicele de defect al peliculei de lubrifiant, (δ) definit de Bowden G. şi Tabor D.[12].

$$\delta = \frac{f - f_s}{f_g - f_s} \leqslant \delta_{cr}, \tag{22}$$

unde f este coeficientul de frecare ce caracterizează starea de ungere a angrenajului determinabil cu relaţia (16) sau (17),

f_s — coeficientul de frecare determinabil pe un stand cu role sau Timken ce modelează condiţiile de pe linia de angrenare (raza de curbură, încărcare, viteza de alunecare) în prezenţa uleiului de cercetat,

f_g — coeficient de frecare caracteristic începutului de gripaj al rolelor model, determinabil la limită din (22),

$\delta_{cr.}$ — indice de defect critic la care pelicula se rupe ($\delta_{cr.} \approx 0{,}7$).

Temperatura de contact ce apare la f_g determinat, caracterizează punctul de instabilitate al peliculei de lubrifiant şi deci posibilitatea de apariţie a gripajului.

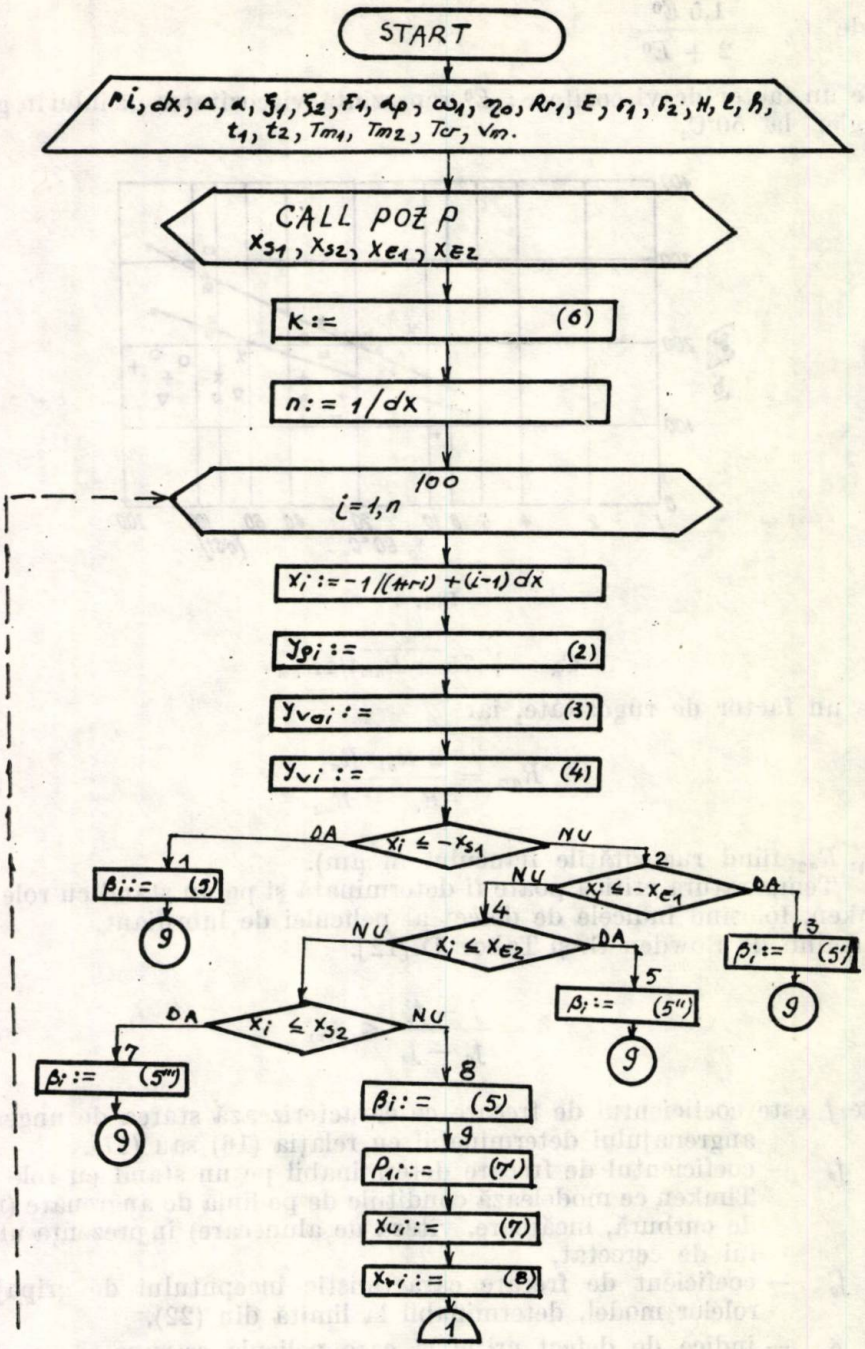

START
ri, dx, Δ, α, ξ1, ξ2, F1, αp, ω1, η0, Rr1, E, r1, r2, H, l, h,
t1, t2, Tm1, Tm2, Tcr, Vm.
CALL POZ P
xS1, xS2, xE1, xE2
K := (6)
n := 1/dx
100
i=1,n
xi := -1/(1+ri) + (i-1) dx
yρi := (2)
yvai := (3)
yvi := (4)
xi ≤ -xS1
DA
NU
1
βi := (5)
9
2
xi ≤ -xE1
NU
DA
3
βi := (5')
9
4
xi ≤ xE2
NU
DA
5
βi := (5'')
9
xi ≤ xS2
DA
NU
7
βi := (5''')
9
8
βi := (5)
9
P1i := (7')
xui := (7)
xvi := (8)
1

Fig. 2

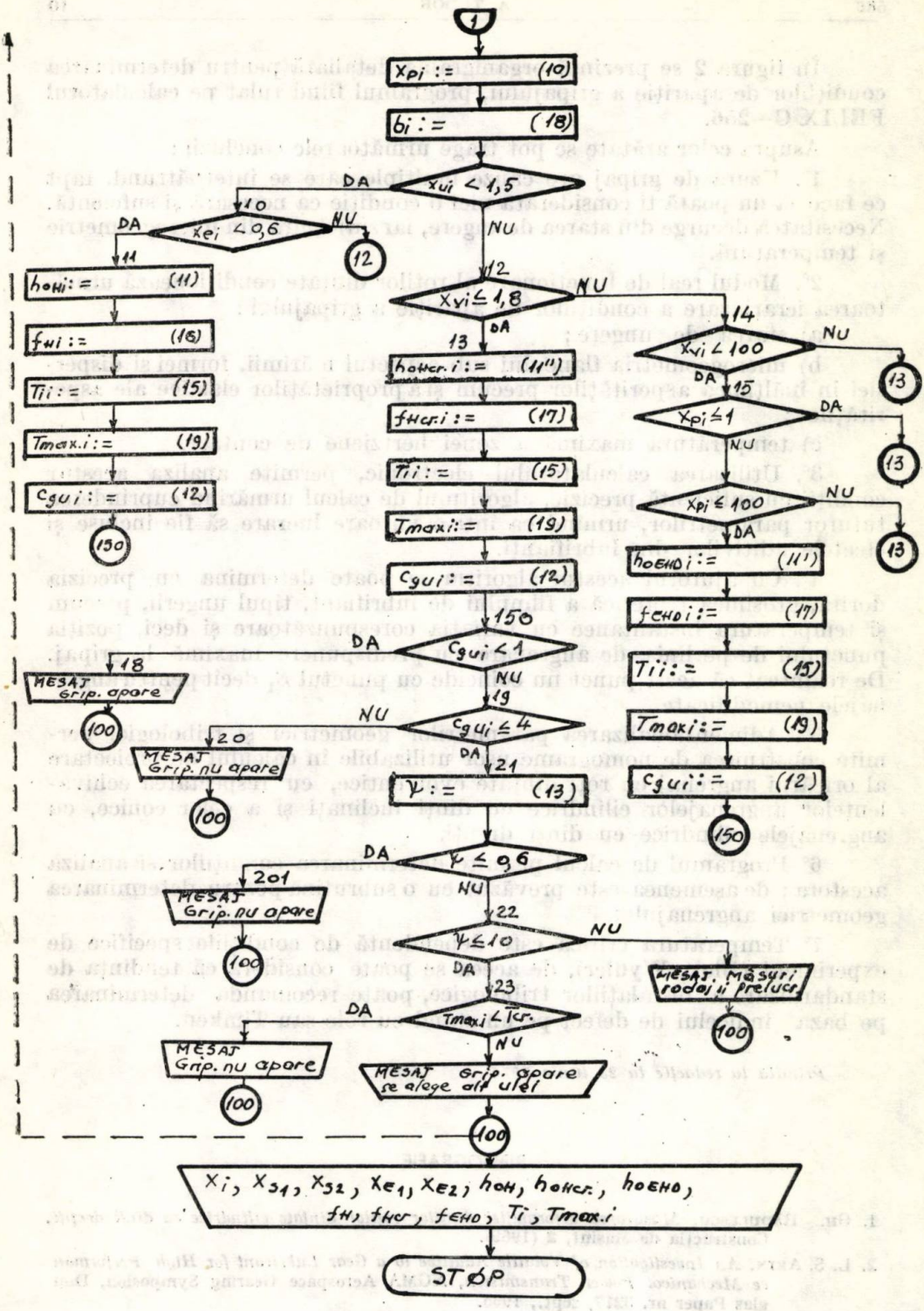


Fig 2. (continuare)

În figura 2 se prezintă organigrama detaliată pentru determinarea condiţiilor de apariţie a gripajului, programul fiind rulat pe calculatorul FELIX C—256.

Asupra celor arătate se pot trage următoarele concluzii :

1°. Uzura de gripaj are cauze multiple care se interpătrund, fapt ce face să nu poată fi considerată nici o condiţie ca necesară şi sufcientă. Necesitatea decurge din starea de ungere, iar suficienţa din microgeometrie şi temperatură.

2°. Modul real de funcţionare al roţilor dinţate condiţionează următoarea ierarhizare a condiţiilor de apariţie a gripajului :

a) starea de ungere ;

b) microgeometria flancului sub aspectul mărimii, formei şi dispersiei în înălţimea asperităţilor precum şi a proprietăţilor elastice ale asperităţilor ;

c) temperatura maximă a zonei hertziene de contact.

3°. Utilizarea calculatorului electronic, permite analiza acestor condiţii cu suficientă precizie, algoritmul de calcul urmărind cuprinderea tuturor parametrilor, urmînd ca într-o viitoare lucrare să fie incluse şi efectele aditivilor din lubrifianţi.

4°. Cu ajutorul acestui algoritm se poate determina cu precizia dorită, grosimea teoretică a filmului de lubrifiant, tipul ungerii, precum şi temperatura instantanee cu variaţia corespunzătoare şi deci, poziţia punctului de pe linia de angrenare cu predispunere maximă la gripaj. De reamrcat că acest punct nu coincide cu punctul S_1 decît pentru angrenajele nemodificate.

5°. Adimensionalizarea parametrilor geometrici şi tribologici permite construirea de nomograme uşor utilizabile în calculul de proiectare al oricărui angrenaj cu roţi dinţate evolventice, cu respectarea echivalenţelor angrenajelor cilindrice cu dinţi înclinaţi şi a celor conice, cu angrenajele cilindrice cu dinţi drepţi.

6° Programul de calcul permite determinarea condiţiilor şi analiza acestora ; de asemenea este prevăzut cu o subrutină pentru determinarea geometriei angrenajului.

7° Temperatura critică este dependentă de condiţiile specifice de experiment (Blok, Wydler), de aceea se poate considera că tendinţa de standardizare a instalaţiilor tribologice, poate recomanda determinarea pe baza indicelui de defect pe un stand cu role sau Timken.

Primită la redacţie la 23 iunie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Rădulescu, *Măsurarea deformaţiei dinţilor roţilor dinţate cilindrice cu dinţi drepţi*, Construcţia de Maşini, **2** (1969).

2. L. S. Akin, *An Investigation of Volatile Additive to a Gear Lubricant for High Performan ce Mechanicol Power Transmision*, AGMA Aerospace Gearing Symposion, Dou glas Paper nr. 3217, sept., 1965.

3. D. Dowson, G. R. Higginson, *Teoria ungerii roţilor dinţate cu dantura în evolventă*, Maschinenbautechnik, RDG 20, *4*, ap. 1971, p. 186—190 (tradusă în Frecare. Uzură. Ungere D, S. IDT *8*—1971).
4. T. Mladinescu, *Consideraţii asupra ungerii angrenajelor*, St. cerc. mec. apl., *3*, **32** (1973).
5. E. F. Finkin, A. Gu, L. Yung, *A critical Examination of the EHD criterion for the scoring of Gears*, Journal of Lubric. Techn., July, 1974.
6. W. I. Bartz, *Some investigations of the application EHD theory to practical gear lubrication*, Elastohyd. lubrif. Symp. 1972. London 1972, 37—39.
7. I. A. Greenwood, *Area of contact Between a Rough Surfaces And a Plane-Research*, Report nr. 25, July 30, 1965.
8. H. B. Demkin, *Fakticeskaia plosciadi kasania tverdih poberhnostei*, Izd. Akad. Nauk. SSSR, Moscova, 1962.
9. V. E. Rîjov, *Kontactnaia jestkosti detalei maşin*, Maşinostroenie, 1966.
10. W. Rohonyi, *E. H. D. und Getriebeberechnung*, Konstruction, 1973, **25**, *5* (1973—1977).
11. T .P. O'Donogue, und A. Cameron, *Friction and temperature in rolling/sliding contact ASLE*, Preprint nr. 65—LC—15 Trans. ASLE **9** (1966).
12. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and lubrication of solids*, Oxford at the Clarendon Press, 1964.
13. R. Wydler, *Voranssage über die Altradfähigkeit von Nochlestungs Getrieben*, Konstruction, **24**, *3*, 81—85 (1972).
14. G. Niemann, K. Seitinger, *Nagrev ţementirovanih zubciatih koles, kak criterii ih mesuscei sposobnosti po zaedanie*, E. I. Detali maşin. *11* (1971) (tradusă din VDI—z—1971, **113**, *2*, 97—105).
15. D. Pavelescu, *Concepţii noi, calcul şi aplicaţii în frecarea şi uzarea solidelor deformabile*, Edit. Academiei, 1971.

ASUPRA UNUI LIMBAJ DE PROGRAMARE PENTRU PRELUCRAREA REZULTATELOR MĂSURĂRILOR TENSOMETRICE REZISTIVE

de IOAN CONSTANTINESCU, DAN GOLUMBOVICI

Institutul politehnic Bucureşti.

Se prezintă un algoritm de prelucrare statistică a rezultatelor măsurărilor efectuate cu traductoare rezistive în vederea determinării valorilor cele mai probabile ale alungirilor specifice măsurate şi se enunţă o metodologie de definire şi analiză a erorilor care au afectat măsurările.
De asemenea, se prezintă instrucţiunile şi structura generală a unui limbaj pentru programarea pe calculator a operaţiilor de calcul corespunzătoare.

1. INTRODUCERE

Prelucrarea rezultatelor măsurărilor realizate cu traductoare tensometrice rezistive duce deseori la necesitatea efectuării unui mare volum de calcule numerice. La aceasta se ajunge cînd s-au utilizat într-un număr relativ mare de puncte montaje cu trei sau patru traductoare şi trebuie determinate deformaţiile specifice principale, tensiunile principale, direcţiile principale ale solicitării şi eventual tensiunile echivalente.

Pe de altă parte, în cazul unor măsurări efectuate pe şantier, pe instalaţii sau construcţii de importanţă deosebită, este necesar să se determine pe baza unui şir de măsurători valoarea cea mai probabilă, cu un nivel de încredere cît mai ridicat. În aceste condiţii este foarte necesar să se poată face, pe baza unor criterii judicioase, aprecieri asupra corectitudinii măsurărilor efectuate şi deci a nivelului de încredere al rezultatelor obţinute. Pentru aceasta trebuie ca valorile măsurate să se supună prelucrării matematice în vederea evaluării erorilor aleatoare care au afectat determinările experimentale şi pe cît posibil să se elimine aceste erori. De asemenea, să se depisteze eventualele erori grosolane şi să se decidă în privinţa efectelor acestora şi a modalităţilor de înlăturare.

Ca urmare a acestei analize se va putea aprecia, pe baza unor criterii cantitative bine alese, dacă măsurările efectuate corespund scopului propus sub aspectul preciziei, al numărului de determinări şi al condiţiilor în care s-au desfăşurat.

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 4, 1976, P. 589–601

2. PRELUCRAREA MATEMATICĂ A REZULTATELOR MĂSURĂRILOR

Rezultatele măsurărilor efectuate cu traductoare rezistive pot fi considerate ca şiruri de valori ale unor variabile aleatorii care se exprimă printr-o singură dimensiune (citirea la puntea tensometrică). Pentru ca acestor valori să li se poată aplica metodele de prelucrare proprii statisticii matematice se face ipoteza că sînt îndeplinite următoarele condiţii :

a. Şirurile de valori obţinute în urma măsurărilor efectuate înainte şi după aplicarea unor sisteme de sarcini ce formează cicluri de încărcare-descărcare ale structurii pe care s-au lipit traductoarele tensometrice, nu sînt funcţii de timp, adică toate determinările experimentale s-au făcut în aceleaşi condiţii, deşi ele sînt decalate în timp.

b. Toate traductoarele şi aparatura tensometrică funcţionează corect, în condiţii de precizie egale, determinările nefiind afectate de erori sistematice.

c. Sarcinile care produc deformarea sistemului mecanic pe care se determină alungirile specifice ε sînt bine definite, în sensul că la repetarea măsurărilor ele intervin cu aceleaşi valori şi se aplică în aceleaşi condiţii. Aceasta înseamnă că măsurarea sarcinilor (dacă este cazul) nu este afectată de erori, sau este afectată de erori neglijabile în comparaţie cu cele care intervin la măsurarea deformaţiilor specifice.

d. Sistemul mecanic sau structura pe care se fac măsurările este perfect elastică, la repetarea măsurărilor comportarea acesteia fiind identică.

Observaţie. Aceste ipoteze nu pot fi acceptate în cazurile în care măsurările trebuie să evidenţieze o „istorie" a comportării structurii sub sarcini sau în alte situaţii similare.

Prin însuşi principiul lor de funcţionare, cu traductoarele rezistive se pot determina numai variaţii ale stărilor de solicitare faţă de o stare de referinţă. Aceasta înseamnă că alungirile specifice ε, care apar într-o structură cînd aceasta este solicitată de un sistem de sarcini a cărui intensitate este definită de un parametru p, pot fi privite ca o funcţie $\varepsilon(p)$, care are proprietatea

$$\varepsilon(0) = 0. \tag{1}$$

Parametrul p poate fi, de exemplu, valoarea presiunii din interiorul unui recipient, sau factorul de proporţionalitate al unui sistem de forţe ce se aplică unei grinzi cu zăbrele ; cînd se aplică sistemul nominal de sarcini $p = 1$, cînd se aplică un sistem de suprasarcini de 20%, $p = 1,2$ etc.

Pe de altă parte trebuie avut în vedere faptul că structura pe care se fac măsurările poate avea elemente de etanşare (de exemplu garnituri) nemetalice, elemente de rezemare în care există jocuri precum şi alte componente care să producă efecte de neliniaritate ale comportării sub sarcini, deşi materialul structurii este solicitat în stadiul elastic. Din acest motiv se consideră că funcţia $\varepsilon(p)$ a dependenţei deformaţiilor specifice ε de para-

metrul p care definește intensitatea sistemului de sarcini ce se aplică structurii este de forma unui polinom de gradul k

$$\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{k} a_i p^i. \tag{2}$$

Dacă se admite ipoteza că erorile de măsurare au o repartiție normală, atunci coeficienții a_i ai polinomului (2) pot fi determinați, pentru fiecare traductor în parte, prin metoda celor mai mici pătrate. Pentru un polinom de gradul doi, de exemplu, se obține [1]

$$a_1 = \frac{\sum \varepsilon_i p_i \sum p_i^4 - \sum \varepsilon_i p_i^2 \sum p_i^3}{\sum p_i^2 \sum p_i^4 - (\sum p_i^3)^2},$$
$$a_2 = \frac{\sum \varepsilon_i p_i^2 \sum p_i^2 - \sum \varepsilon_i p_i \sum p_i^3}{\sum p_i^2 \sum p_i^4 - (\sum p_i^3)^2}, \tag{3}$$

în care sumele sînt efectuate pentru cele n perechi de valori ε_i, p_i măsurate.

Dacă gradul polinomului considerat pentru funcția $\varepsilon(p)$ este mai mare de 2, apar erori relativ mari la determinarea coeficienților a_i, erori ce sînt cu atît mai mari cu cît gradul polinomului crește.

În lucrarea de față s-a considerat un polinom de gradul doi pentru funcția $\varepsilon(p)$.

Pentru a putea formula aprecieri calitative și cantitative asupra măsurării trebuie să se știe împrăștierea valorilor ε_i măsurate față de funcția $\varepsilon(p)$. În acest scop s-au definit abaterile ξ_i ale valorilor ε_i măsurate cînd parametrul ce definește intensitatea sistemului de sarcini a fost p_i, față de valorile corespunzătoare date de funcția $\varepsilon(p_i)$, adică (pentru $k = 2$) [2]:

$$\xi_i = \left(\frac{\varepsilon_i}{a_1 p_i + a_2 p_i^2} - 1\right) \times 100 \qquad [\%]. \tag{4}$$

De asemenea, s-au definit abaterile citirilor de zero

$$\xi_j^0 = \frac{C_j^0 - C_{j+1}^0}{a_1 p_{\max j} + a_2 p_{\max j}^2} \times 100 \qquad [\%], \tag{5}$$

în care C_j^0 și C_{j+1}^0 sînt citirile de zero pentru ciclul j de încărcare-descărcare;

$p_{\max j}$ — valoarea maximă a parametrului p, la care s-au făcut măsurări în decursul ciclului j;

a_1, a_2 — parametrii polinomului de gradul doi $\varepsilon(p)$, calculați cu relațiile (3), pentru traductorul considerat.

Se menționează că abaterile ξ_i și ξ_j^0 se determină pentru fiecare traductor în parte. Dacă pentru fiecare ciclu de încărcare-descărcare se fac două citiri de zero, una înaintea aplicării sarcinilor și una după aplicarea acestora, atunci pentru fiecare citire la punteа tensometrică se determină două valori ale abaterii ξ_i : una față de citirea de zero inițială (abaterea ξ_i' la încărcare) și una față de citirea de zero finală (abaterea ξ_i'' la descărcare). Abaterile citirilor de zero ξ_j^0, se determină cîte una pentru fiecare ciclu, pentru fiecare traductor.

După ce s-au calculat abaterile ξ_i, ξ_i^0 pentru toate traductoarele, se verifică dacă nu sînt valori care să difere sensibil față de ansamblul celorlalte, caz în care se poate presupune că unele citiri au fost afectate de erori grosolane, ca urmare a încălcării normelor generale de măsurare (de exemplu o manevră greșită la puntea tensometrică, o citire greșită ca urmare a unei neatenții etc.).

Adoptînd un test [3] de apreciere a valorilor ξ_i, ξ_j^0 „apărute neașteptat" se vor elimina acele citiri care au generat abaterile ce nu satisfac exigențele testului. Pentru traductoarele la care s-au eliminat citiri se recalculează, cu citirile rămase, coeficienții (3) și abaterile (4), (5). Calculul se repetă pînă cînd toate abaterile calculate satisfac testul de eliminare.

În acest proces de calcul este posibil ca pentru unele traductoare să se elimine toate citirile ca fiind necorespunzătoare (mai ales cînd se măsoară deformații ε_i relativ mici) ceea ce arată fie că traductoarele respective au funcționat incorect (de exemplu au avut o rezistență de izolație necorespunzătoare), fie că testul impus este prea sever pentru condițiile de precizie în care s-au făcut măsurările.

Analiza ansamblului valorilor ξ_i, ξ_j^0 poate duce la formularea unor concluzii prețioase privind măsurările ce se supun prelucrării. Pentru aceasta trebuie verificat mai întîi dacă valorile abaterilor ξ_i, ξ_j^0 formează o populație a cărei repartiție este normală. În acest scop populației i s-a aplicat testul χ^2 [3], [4].

Se menționează că testul χ^2 nu se poate aplica decît dacă numărul N de date ce se supun prelucrării este mai mare decît o anumită limită [5]. Din acest motiv, dacă numărul de citiri făcute pentru fiecare traductor este prea mic, se vor supune prelucrării statistice valorile abaterilor pentru grupe de traductoare montate în aceleași punct, în puncte apropiate sau chiar montate pe întreaga structură.

Pe de altă parte este adeseori util ca să se analizeze nu numai populația tuturor abaterilor ci și populații extrase din aceasta și anume :

— populația citirilor de zero ;
— populația citirilor la încărcare ;
— populația citirilor la descărcare ;
— populația citirilor pe fiecare ciclu.

Pe baza rezultatelor obținute în aceste situații se vor putea face aprecieri asupra modului cum s-au desfășurat măsurările pe diversele etape. Valorile parametrilor statistici principali de tendință și de împrăștiere, determinate pentru șirurile de date care în baza testului χ^2 au putut fi calificate drept populații cu repartiție normală, constituie criterii cantitative judicioase pentru aprecierea măsurărilor efectuate.

În final, se pot calcula pentru fiecare traductor, cu funcția $\varepsilon(p_i)$ corespunzătoare, valorile cele mai probabile ale alungirilor specifice

pentru valorile p_i ale parametrului intensității sistemului de sarcini. În punctele de măsurare cu 3 și 4 traductoare se vor calcula alungirile specifice principale și direcțiile principale ale stării de solicitare. Apoi se vor calcula tensiunile principale și eventual tensiunile echivalente.

3. ELEMENTELE LIMBAJULUI PENTRU PRELUCRAREA PE CALCULATOR A REZULTATELOR MĂSURĂRILOR

Din cele prezentate mai sus rezultă că prelucrarea matematică a rezultatelor măsurărilor făcute cu traductoare rezistive comportă efectuarea unui volum atît de mare de calcule încît realizarea lor cu ajutorul unui calculator electronic este foarte indicată.

În acest scop autorii au elaborat un program special, pe care l-au denumit PIREMT (pentru Prelucrarea și Interpretarea Rezultatelor Măsurărilor Tensometrice) și care este scris în limbajul FORTRAN.

Pentru ca programul să fie accesibil unei game largi de utilizatori, i s-a asociat un limbaj orientat pe aplicație, simplu și intuitiv, care să ușureze considerabil folosirea programului.

Pe de altă parte, atît în faza de analiză sintactică și de interpretare, cît și în faza de execuție, programul efectuează un număr relativ mare de verificări ale corectitudinii datelor și rezultatelor și transmite mesaje corespunzătoare. În acest mod se reduce foarte mult riscul unei utilizări greșite a programului și a obținerii unor rezultate aparent bune dar în realitate eronate. Mesajele transmise permit depistarea imediată a erorilor și înlăturarea lor.

Instrucțiunile programului PIREMT sînt în număr de 11 și se scriu pe cartele începînd din coloana 7. Ele sînt prezentate în tabelul 1.

Instrucțiunea de tip 5 permite alegerea variantelor de calcul și de redactare a rezultatelor și anume:

— specificațiile I, D, C, Z, T permit să se facă opțiuni asupra verificării normalității repartițiilor populațiilor formate de abaterile ξ_i, ξ_j^0 obținute din citirile de încărcare (opțiunea I), de descărcare (D), pe fiecare ciclu (C), de zero (Z) și din toate citirile (T). Pentru fiecare din aceste situații se tipărește un mesaj care menționează dacă repartiția respectivă este normală sau nenormală și se tipăresc valorile parametrilor statistici principali ai populației;

— specificațiile E, SC, SE1, SE2, SE3, SE4 permit să se facă opțiuni asupra rezultatelor care se tipăresc și anume alungirile specifice principale (opțiunea E), tensiunile principale (SC) și tensiunile echivalente după cele patru teorii de rezistență (SE1, SE2, SE3, SE4).

Instrucțiunea de tip 8 descrie ce fel de montaj formează traductoarele montate într-un punct de măsură. Convențional, tipurile montajelor s-au notat ca în tabelul 2. Se menționează că numerele traductoarelor trebuie să fie trecute în succesiunea înscrisă pe schița montajului respectiv din tabelul 2.

În instrucțiunea de tip 9 se înscriu, în interiorul parantezei, citirile la punțea tensometrică corespunzătoare traductorului cu numărul v. Dacă pentru un traductor s-au făcut mai puține citiri decît numărul

maxim (NMAS) al acestora, citirile neefectuate vor fi cele corespunzătoare rangurilor pentru care apare o succesiune de două virgule, sau pentru care

Tabelul 1

Instrucțiunile programului PIREMT

Tip	Instrucțiune	Tipul argumentului	Descriere
1	NPCT = n_1	întreg	n_1 — număr puncte de măsurare
2	NTR = n_2	întreg	n_2 — număr traductoare
3	NCICL = n_3	întreg	n_3 — număr cicluri încărcare-descărcare
4	NMAS = n_4	întreg	n_4 — număr maxim de citiri pentru un traductor
5	OPT (I,D,C,Z,T,E,SC,SE1, SE2, SE3, SE4)	—	opțiuni pentru efectuarea calculelor și redactarea rezultatelor
6	PREM ($v_1, v_2, \ldots v_n$)	reale sau întregi	$v_1, v_2, \ldots, v_n$ — valorile parametrului intensității sistemului de sarcini pentru care s-au făcut măsurările.
7	PREC ($v_1, v_2, \ldots v_c$)	reale sau întregi	$v_1, v_2, \ldots, v_c$ — valorile parametrului intensității sistemului de sarcini pentru care se calculează deformațiile specifice și tensiunile.
8	Pv (n, t_1, t_2, t_3, t_4)	întregi	v — număr punct de măsurare n — tip montaj traductoare t_1, t_2, t_3, t_4 — numerele traductoarelor din punctul Pv.
9	Tv ($c_1, c_2, \ldots, c_n, k$)	întreg întregi real	v — număr traductor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — citirile la puntea tensometrică k — constanta de corecție a citirilor
10	TEST1 (v)	real sau întreg	test de tip 1 pentru eliminarea citirilor eronate v — valoarea testului
11	TEST 2	—	test de tip 2 pentru eliminarea citirilor eronate

sînt pe cartelă numai zerouri sau blancuri, între două virgule. Constanta k de la sfîrșitul șirului permite efectuarea corecției citirilor ca urmare a efectului lungimii cablului sau al modificării constantei traductorului. Dacă valoarea lui k lipsește, se consideră că ea este egală cu 1.

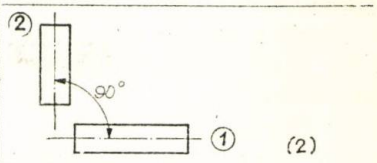
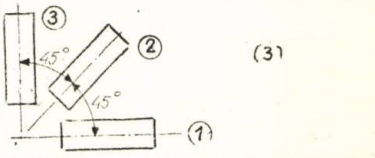
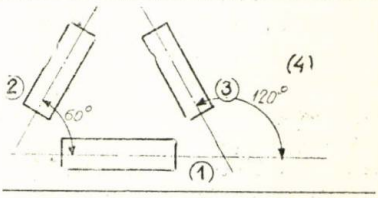
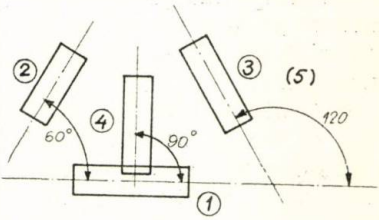
Prin intermediul instrucțiunilor de tip 10 și 11 se precizează tipul de test pentru eliminarea citirilor pentru care au rezultat abateri ξ_i și ξ_j^0 cu valori absolute mai mari de v % (TEST 1(v)) sau cu valori mai mari decît cele rezultate din calculul făcut după lucrarea [3], pagina 17 (TEST 2).

Comenzile programului PIREMT sînt în număr de trei și se scriu pe cartele începînd din coloana 1. Ele sînt prezentate în tabelul 3.

Se pot utiliza și cartele de comentariu, care au litera C în coloana 1. Ele se tipăresc fără să se facă alte operații de analiză sintactică sau de calcul.

Tabelul 2

Tipurile montajelor de traductoare

Tip	Denumirea montajului	Schiţa montajului
1	Un singur traductor	
2	Rozetă dreptunghiulară cu două traductoare	
3	Rozetă dreptunghiulară cu trei traductoare	
4	Rozetă delta	
5	Rozetă T-delta	

Cartelele pe care sînt înscrise instrucţiunile programului PIREMT (tabelul 1) pot fi aşezate în orice ordine, singura restricţie fiind ca instrucţiunile de tipurile 1—4 să fie aşezate înaintea celorlalte.

Dacă o cartelă nu este suficientă pentru o instrucţiune, aceasta poate fi prelungită pe alte cartele, pentru aceasta perforîndu-se un caracter oarecare în coloana 6 a cartelelor de prelungire. Instrucţiunile de tipurile 1—4 nu admit prelungiri.

Tabelul 3

Comenzile programului PIREMT

Tip	Instrucţiune	Descriere
1	* SET NR.n	indică set nou de date *n* — întreg
2	*SFIRSIT SET	indică sfîrşitul unui set de date, după care urmează alt set
3	* SFIRSIT	indică sfîrşitul ultimului set de date; după execuţia acestuia programul PIREMT se încheie

Între oricare din caracterele înscrise pe o cartelă, indiferent de tipul instrucţiunii, pot fi lăsate oricîte blancuri.

Numerele care se atribuie traductoarelor şi punctelor au funcţia de identificatori şi pot fi oricare, între 1 şi 9999.

Numerele reale ce se introduc în instrucţiuni de tipurile 6, 7, 9, 10 pot fi scrise în una din formele : .252 ; 0.524 ; .283.573 iar numărul cifrelor din faţa sau de după punctul zecimal trebuie să fie mai mic sau egal cu cinci.

Analiza sintactică a unei instrucţiuni are drept scop semnalarea erorilor. Dacă o instrucţiune conţine mai multe erori, se semnalează numai prima eroare.

4. STRUCTURA GENERALĂ A PROGRAMULUI PIREMT

Programul PIREMT are o structură modulară. El poate fi împărţit în două părţi mari, funcţional distincte : citire-încărcare date şi prelucrarea datelor. Pentru prima parte s-au elaborat 10 module denumite ANS, TRI, VES, VEN, VERS, CV, MIV, CPT, MES, CDA, iar pentru partea a doua alte 9 module purtînd denumirile HI2, BAC, VER, AINC, ADS, AZE, ATO, ACI, EX3C.

În cele ce urmează se face o prezentare sumară a principalelor funcţiuni îndeplinite de modulele mai importante ale programului, utilizînd, pentru uşurinţa descrierii, organigramele generale ale acestora. La întocmirea organigramelor ce se prezintă s-au folosit reprezentările convenţionale definite în lucrarea [6].

Organigrama programului principal se prezintă în figura 1, din care rezultă că el face citirea şi tipărirea cartelelor, transferă comanda subrutinelor ANS, CDA sau EX3C şi decide dacă execuţia continuă sau se abandonează.

Subrutina ANS constituie modulul principal al analizorului sintactic (fig. 2). Ea elimină blancurile de prisos, analizează prelungirile, încarcă într-o memorie tampon de cinci caractere şirul de caractere cuprins între doi separatori şi indică tipul şirului şi anume : 1 pentru litere (simbol), 2 pentru litere cu cifre (simbol cu număr) şi 3 pentru cifre. Subrutina ANS transferă execuţia subrutinelor TRI, VERS, CV. În funcţie de tipul şirului aflat în memoria tampon, subrutina TRI, la rîndul ei cheamă subrutinele VES, VEN sau CV. Dacă în urma cercetării şirului rezultă necesitatea completării unor valori în tabelele de puncte sau de traductoare, comanda este transferată subrutinei MIV. Subrutina CPT completează referirile încrucişate dintre tabela de puncte şi cea de traductoare.

Subrutina CDA analizează cartelele care încep cu asterix în coloana 1 şi poziţionează indicatori pentru tipul cartelei de comandă.

Subrutina MES tipăreşte mesajele de eroare. Ea este apelată de celelalte subrutine atunci cînd este necesară semnalarea unei erori. Sînt încorporate 16 mesaje de eroare şi anume : „EROARE SINTAXA" ; „EROARE CITIRI DE ZERO" ; „COMANDA GRESITA" ; „EROARE CONTINUARE" ; „EROARE SECVENTA" ; „EROARE VALOARE" ; „EROARE MONTAJ" ; „EROARE NUMAR PRESIUNI" ; „SIR PREA LUNG" ; „SEPARATOR INCORECT" ; „EROARE CITIRI" ; „DEFINIRE MULTIPLA" ; „NEDEFINIRE" ; „TRADUCTORUL

NR... NECITIT"; „TRADUCTORUL NR... FARA PUNCT"; „DEPASIRE TABEL".

Principalul modul de prelucrare a datelor este EX3C. Organigrama sa este reprezentată în figura 3. EX3C chemă modulul BAC care calculează coeficienţii a_1, a_2 ai parabolei (2) pentru fiecare traductor şi abaterile

PROGRAMUL PRINCIPAL **PIREMT**

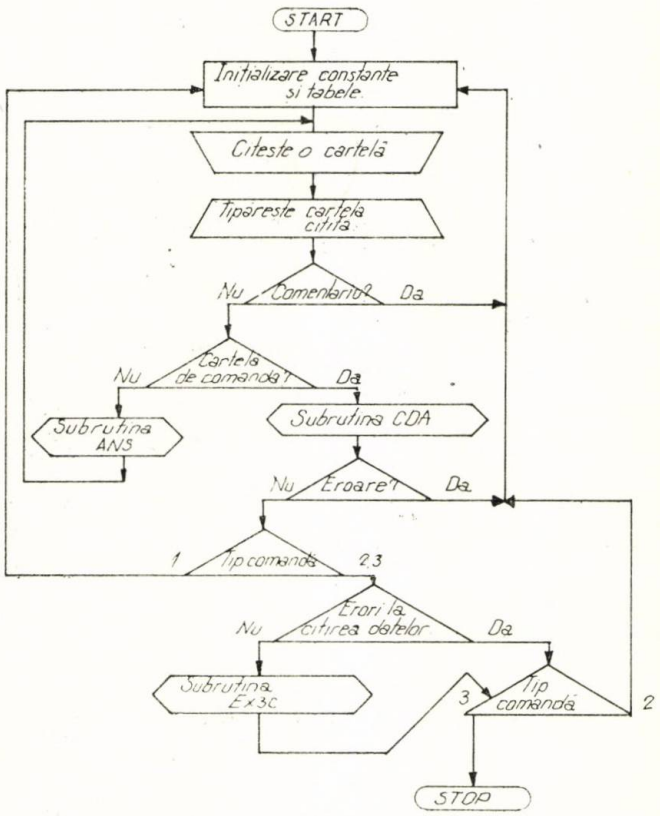


Fig. 1

ξ_i şi ξ_j^0 (definite prin relaţiile (4) şi (5)), pentru toate citirile la puntea tensometrică. Modulul VER, pe baza tipului de test ales, verifică dacă nu sînt abateri care depăşesc limitele testului şi elimină citirile care le-au generat. Se menţionează că în calcul se consideră formal că s-au efectuat două serii de citiri: una pentru încărcare şi una pentru descărcare. Aceasta permite ca eliminările să se facă selectiv pentru cele două situaţii.

În funcţie de opţiunile de tip I, D, C, Z, T specificate în instrucţiunea de tipul 5 (v. tabelul 1), se cedează comanda modulelor AINC, ADS, ACI, AZE, ATO care calculează respectiv abaterile ξ_i, ξ_j^0 pentru următoarele situaţii: încărcări, descărcări, pe fiecare ciclu de solicitare, numai citiri de zero, toate citirile. Fiecare din aceste module cheamă

subrutina HI2 care face prelucrarea statistică a populațiilor valorilor ξ_i, ξ_j^0 corespunzătoare.

Modulul HI2 tipărește numărul de date supuse prelucrării, valoarea maximă și minimă a datelor din șir, media aritmetică, abaterea medie pătratică, valoarea testului χ^2 și concluzia dacă populația statistică are repartiție normală sau nenormală.

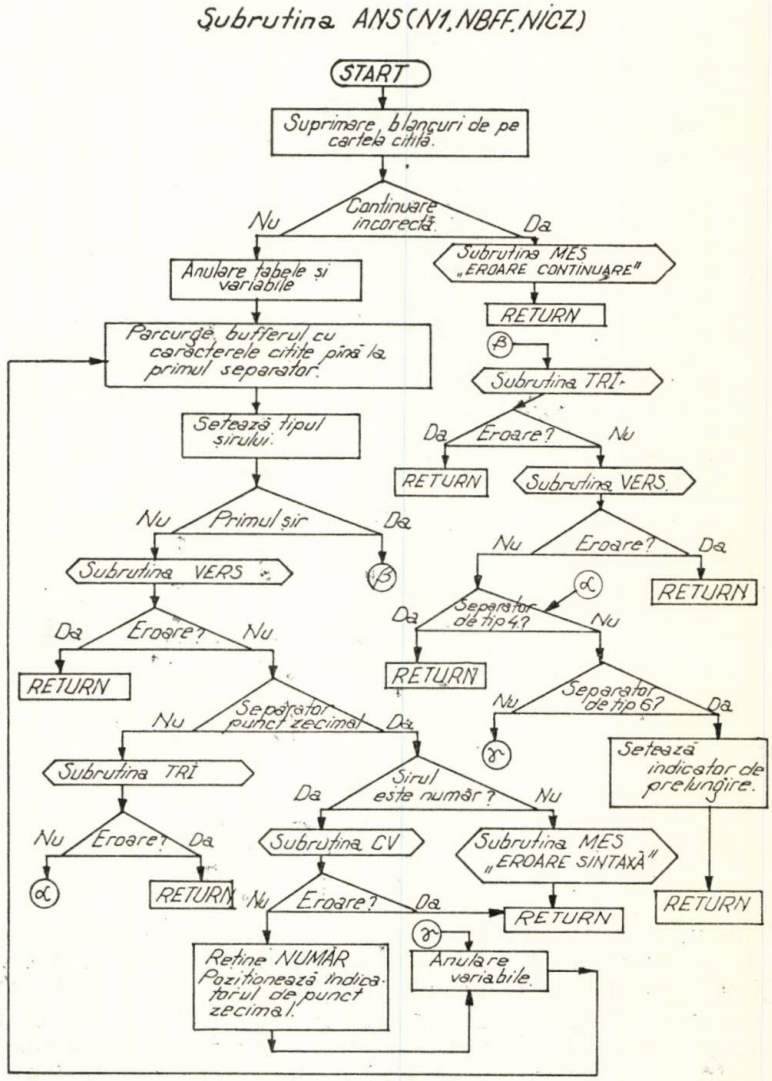


Fig. 2

Din descrierea sumară a programului PIREMT, au rezultat condițiile de bază în cadrul cărora acesta a fost elaborat, nefiind posibilă descrierea detaliată a tuturor secvențelor de calcul.

Se precizează că următoarele restricţii trebuie avute în vedere la utilizarea programului PIREMT, încălcarea lor constituind erori ce se semnalează prin mesaje corespunzătoare :

— numărul traductoarelor, al punctelor de măsură şi al citirilor la puntea tensometrică, să nu depăşească dimensiunile încorporate în program, pentru tablourile respective. Această restricţie este impusă nu de

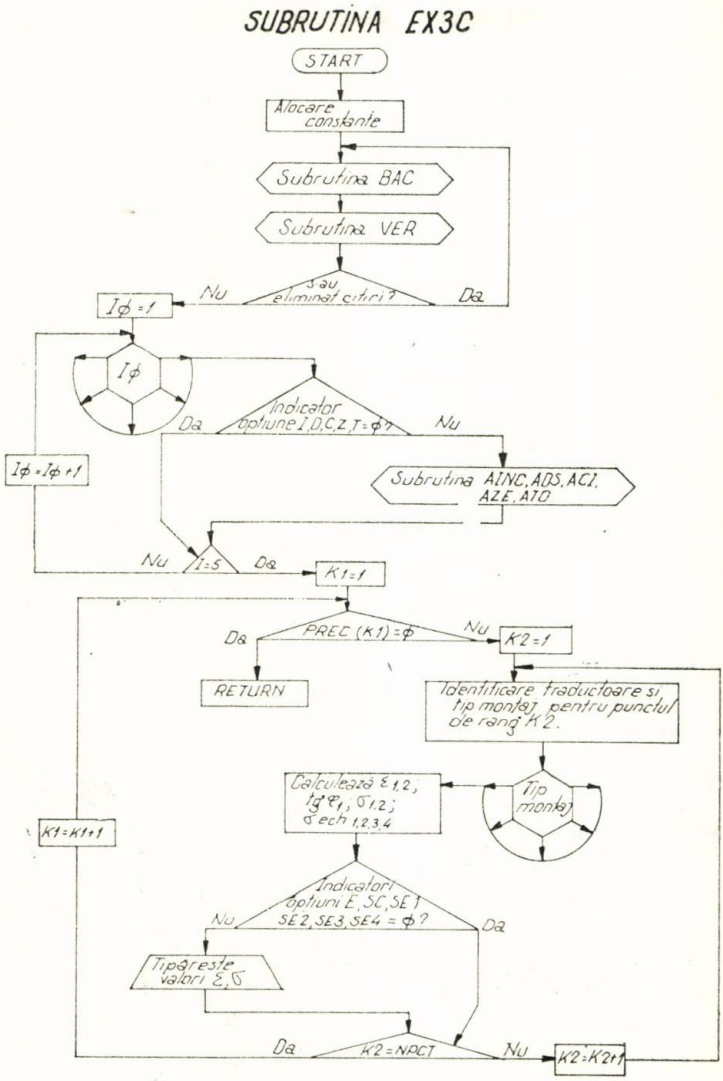


Fig. 3

programul în sine, ci de parametrii funcţionali ai calculatorului pe care se utilizează programul ;

```
      *SET  NR.5
            NPOT=4
            NTR=8
            NCICL=1
            NMAS =9
            PREM(0,11.560,34.360,54.360,34.360,11.560,34.360,11.560,0)
            PREC(34.)
            P17(2,33,34)
            P18(2,35,36)
            P19(2,37,38)
            P20(2,39,40)
            T33(992,1076,1236,1370,1246,1084,1235,1084,992,1.04435)
            T34(1047,1008,944,892,928,996,941,996,1047,1.04435)
            T35(475,562,736,888,751,574,745,574,475,1.04435)
            T36(541,544,512,492,503,533,511,531,541,1.04435)
            T37(895,982,1144,1277,1149,991,1144,987,895,1.04435)
            T38(974,940,881,836,867,927,880,928,974,1.04435)
            T39(469,555,724,869,742,562,734,565,469,1.04435)
            T40(1012,1008,978,952,967,999,977,1000,1012,1.04435)
            CPI(T,E,SC,SE1,SE2,SE3,SE4)
            TEST1(15)
      *SFIRSIT
```

PRESIUNEA = 34.00 ATM

PUNCT	DEF.SPEC.PR.		DIR.PR.	TENSIUNI PRINCIPALE		TENSIUNI ECHIVALENTE DAN/CM2			
NR.	MICRONI PE METRU		FI GR.	DAN/CM2		TEORIA 1	TEORIA 2	TEORIA 3	TEORIA 4
	EPS1	EPS2		SIGMA1	SIGMA2				
17	256.81	-112.75	-0.00	514.60	-82.40	514.60	539.32	597.00	560.36
18	278.78	- 30.29	-0.00	622.39	123.10	622.39	585.45	499.28	570.88
19	260.92	-100.83	0.00	532.33	-52.04	532.33	547.95	584.38	560.17
20	272.62	- 36.08	-0.00	604.14	105.46	604.14	572.50	498.67	558.92

Fig. 4

— citirile la punte să fie valori nenule, pozitive, întregi, date în unități $\mu m/m$. O citire nulă se interpretează ca o citire care nu s-a efectuat și ea se prelucrează ca atare ;

— prima și ultima citire la puntea tensometrică să fie citiri de zero.

În figura 4 se prezintă, spre exemplificare, instrucțiunile și rezultatele calculului deformațiilor specifice și tensiunilor pentru o serie de măsurări efectuate de autori pe o structură solicitată cu presiune interioară.

Măsurările s-au efectuat cu traductoare tip 10/120 LP 11, care s-au lipit cu adeziv X 60 și s-au protejat împotriva umidității cu chit de protecție AK22. S-a folosit o punte tensometrică tip MK și o cutie de comutare UM 74/20. Materialele și aparatura folosită au fost fabricație Hottinger Boldwin Messtechnik.

Pentru populația statistică a abaterilor ξ_i, ξ_j^0 calculate pentru toate citirile (opțiunea T), aplicînd un test de tip 1, cu valoarea 15% se elimină 18 valori astfel încît rezultă : numărul de date 102, valoarea minimă a datelor din șir —13.23, valoarea maximă 12.09, media aritmetică 0.155, abaterea medie pătratică 4.634, valoarea testului χ^2, calculată pentru 4 grade de libertate, este 11.449, concluzia fiind că repartiția valorilor populației statistice este normală (pentru χ^2 critic s-a considerat nivelul de încredere 0.995).

Din analiza acestor rezultate, se poate afirma că valorile deformațiilor specifice ε și ale tensiunilor σ din tabelul prezentat în figura 4, sînt mărimile cele mai probabile obținute în urma măsurărilor, în condițiile unor erori aleatorii a căror valoare medie a fost de 0.155% iar abaterea medie pătratică de 4.634%.

5. CONCLUZII

Programul PIREMT, elaborat pe baza algoritmului prezentat mai sus, poate constitui un instrument comod și eficace pentru prelucrarea și interpretarea rezultatelor măsurărilor efectuate cu traductoare tensometrice rezistive, mai ales în situațiile cînd este necesar să se decidă, cu un nivel de încredere ridicat, dacă condițiile în care s-au făcut o serie de măsurători, corespund sau nu exigențelor scopului urmărit de aceste măsurători.

Primită la redacție la 15 ianuarie 1975

BIBLIOGRAFIE

1. A. G. Worthing, T. Geffner, *Treatment of Experimental Data*, John Wiley & Sons, Inc. New York, 1955.
2. M. Blumenfeld, M. Buga, I. Constantinescu, C. Voicu, H. Gheorghiu, *Considerații asupra prelucrării și interpretării rezultatelor măsurărilor tensometrice rezistive*, Sesiunea științifică jubiliară a Universității din Brașov, 15—17 februarie, 1974.
3. L. Z. Rumșiskii, *Matematiceskaia obrabotka rezulitatov eksperimenta*, Izdatelistvo Nauka, Moskva, 1971.
4. J. S. Bendat, A. G. Piersol, *Measurement and Analysis of Random Data*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967.
5. STAS 7122-72, Statistica matematică — Prezentarea și prelucrarea datelor experimentale și de observație, 1972.
6. P. Dimo, Programarea în FORTRAN, Edit. didactică și pedagogică, București, 1971.

CONTRIBUȚII LA CALCULUL DISPOZITIVELOR DE ILUMINAT PENTRU MICROSCOAPELE DE CERCETARE MODERNE

PETRE DODOC
Institutul politehnic București

În lucrare se precizează condițiile generale pe care trebuie să le satisfacă dispozitivele de iluminat ale microscoapelor moderne, se descrie construcția și funcționarea dispozitivului de tip Köhler și se indică metode de calcul pentru diferite dispozitive de iluminat folosite la microscoape.

Dispozitivul de iluminat determină în mod hotărîtor calitatea imaginii furnizată de un microscop. Datorită acestui fapt, au fost realizate numeroase dispozitive și metode de iluminare descrise pe larg în literatura de specialitate.

Cu toate acestea, în prezent nu se cunosc suficiente elemente privind modul de calcul și condițiile pe care trebuie să le satisfacă un dispozitiv de iluminare pentru un microscop de cercetare modern.

În cele ce urmează se încearcă soluționarea acestei probleme.

1. CONDIȚIILE GENERALE PE CARE TREBUIE SĂ LE SATISFACĂ DISPOZITIVELE DE ILUMINAT ALE MICROSCOAPELOR

Dispozitivele de iluminat ale microscoapelor moderne de cercetare trebuie să fie construite în așa fel încît ele să satisfacă următoarele condiții generale :

a) să ilumineze cîmpul obiect în mod uniform și suficient de puternic pentru ca în planul imagine să se obțină luminanța dorită ;

b) să ilumineze obiectul cu fascicule telecentrice sub unghiul de apertură $\pm \sigma_0$, pentru a realiza imaginile primare și secundare conform teoriei lui Abbé, în scopul obținerii detaliilor în planul imagine ;

c) să delimiteze net cîmpul obiect pentru ca imaginea să apară net conturată ;

d) în planul imagine să nu apară imaginea sursei, altfel calitatea imaginii este compromisă ;

e) să permită variația continuă a unghiului de apertură (de deschidere), corespunzător aperturii obiectivului și metodei de cercetare folosite ;

f) să facă posibilă variația continuă a mărimii cîmpului obiect în scopul cercetării atente a anumitor zone din acest cîmp ;

ST. CERC. MEC. APL., TOM 35, NR. 4, 1976, P. 603–610

g) să fie prevăzut cu diferite mecanisme și dispozitive care să asigure mișcările axiale și transversale ale principalelor elemente și subansambluri constitutive în scopul realizării unor efecte speciale sau al reglării;

h) sursa de iluminat să aibă dimensiuni minime posibile, strălucire mare și radiații calorice reduse pentru a evita influențarea micropreparatului și tensionarea elementelor constitutive;

i) să aibe dimensiuni de gabarit minime posibile, pentru a economisi materiale și deci pentru a reduce prețul de cost.

Pentru satisfacerea condițiilor a—f dispozitivul de iluminat trebuie să conțină cel puțin următoarele elemente:

— o sursă de radiații luminoase;
— un sistem optic colector situat după sursă;
— o diafragmă de cîmp reglabilă (iris);
— o diafragmă de apertură reglabilă (iris);
— un sistem optic condensor.

Este meritul lui A. Köhler de a fi creat pentru prima dată un dispozitiv constituit din elementele menționate și de a fi explicat funcționarea lui.

2. DISPOZITIVUL DE ILUMINAT DE TIP KÖHLER

Dispozitivul de iluminat de tip „Köhler" (fig. 1) este folosit astăzi la toate microscoapele perfecționate atît pentru iluminarea „DIA", cît și pentru luminarea „EPI".

Dispozitivul este constituit din următoarele elemente principale: sursa S, de mărime $l_c = \overline{S_1S_2}$, situată la distanța z_c în fața planului focal, obiect al colectorului C, diafragma de iluminare D_i, care este și diafragmă de cîmp D_c, reglabilă (iris), montată la distanța p'_c după colectorul C, diafragma de apertură (de deschidere) D_A și condensorul K al cărui plan focal obiect coincide cu planul diafragmei D_A.

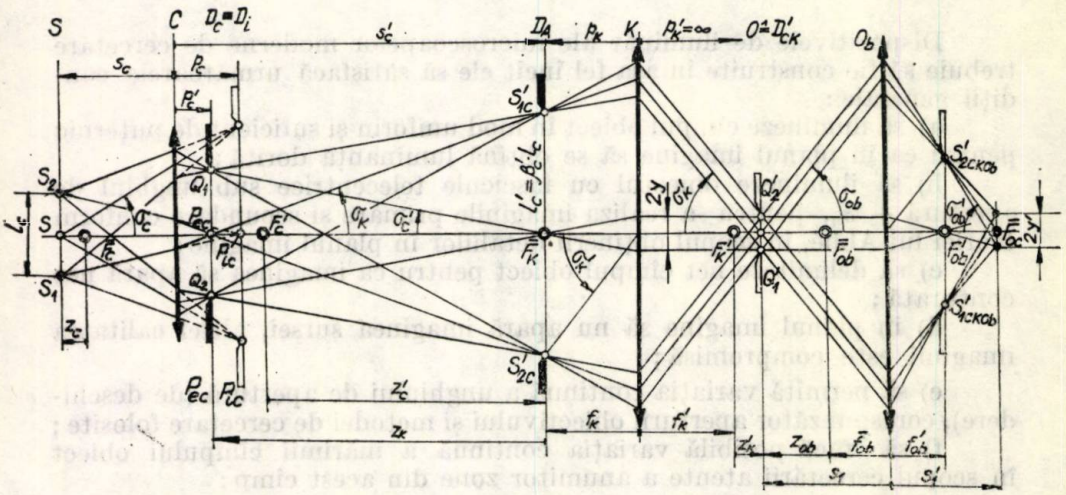


Fig. 1. Dispozitivul de iluminat „Köhler".
Schema pentru calculul de gabarit

Se observă că imaginea sursei dată de colectorul C se formează în planul diafragmei D_A. Condensorul K formează imaginile diafragmei D_A și imaginii sursei l'_c la infinit.

Așadar, pupila de ieșire a condensorului K, și deci a întregului dispozitiv de iluminat, este situată la infinit.

Pupila de ieșire a dispozitivului de iluminat constituie pupilă de intrare pentru obiectivul microscopului. Ea fiind la infinit, imaginea sa dată de obiectiv, adică pupila de ieșire a obiectivului, se formează în planul focal imagine al obiectivului.

Dispozitivul de iluminat de tip Köhler asigură formarea imaginii obiectului pe retina ochiului și imaginea sursei în pupila de intrare a ochiului.

Datorită poziției și mărimii diafragmei de deschidere D_A, obiectul este iluminat cu fascicule telecentrice sub unghiul de apertură $\pm \sigma_0$. Cîmpul obiect este limitat net de imaginea diafragmei de cîmp D_c, formată de condensorul K în planul obiect.

În figura 1 se vede modul de formare a imaginii sursei în planul focal imagine al obiectivului cu ajutorul razelor pupilare principale și marginale.

3. CALCULUL DISPOZITIVELOR DE ILUMINAT

Se observă că tuburile luminoase, și deci dimensiunile transversale al dispozitivului de iluminat, sînt determinate de razele pupilare marginale.

Elementele constructive pot fi, așadar, determinate cu ajutorul relațiilor din tabela 1, deduse din figura 1.

În cazul în care condensorul și colectorul sînt sisteme compuse, constituite din mai multe lentile, diametrele D_{col} și D_k sînt mai mici decît cele date de relațiile (35) și, respectiv, (33) din tabela 1.

În figura 2 este reprezentată schema unui dispozitiv folosit la iluminarea obiectelor mici cu aperturi mari, la care propagarea luminii între colectoarele C_1 și C_2 se face telecentric, adică sursa $l_c = \overline{S_1S_2}$ este situată în planul focal obiect al colectorului C_1. Se observă că, pentru a reduce gabaritul transversal al dispozitivului, se folosește doar jumătate din fluxul luminos care trece prin diafragma colectorului C_1.

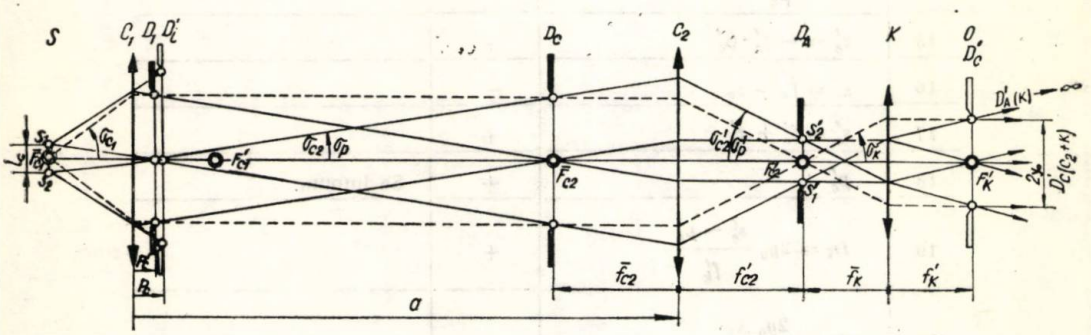


Fig. 2

Tabela 1

Nr. crt.	Parametrul de calculat	Semnul	Observaţii
1	$A_0 = n_0 \sin \sigma_0$	+	
2	$\beta'_0 = \frac{-2y'_0}{+2y_0} = \frac{+A_0}{-A'_0}$	−	
3	$N_{oc} - -2y'_0$	−	
4	$\Phi = 2y_0 A_0$	+	
5	$A'_0 = \frac{+A_0}{-\beta'_0}$	−	
6	$\operatorname{tg} \sigma_0 = A_0 + \frac{1}{2} A_0^3$	+	
7	$P_{eob.} = 2 f'_{ob} \cdot \operatorname{tg} \sigma_0$	+	
8	f'_k	+	Focala condensorului se impune
9	$D_A = P_{eob} \cdot \frac{f'_k}{f'_{ob}}$	+	
10	$l'_c \geqq D_A$	+	
11	f'_c	+	Focala şi mărirea transversală ale colectorului se impun
12	β'_c	−	
13	$l_c = \frac{l'_c}{\beta'_c}$	−	
14	$z_c = \frac{f'_c}{\beta'_c}$	−	
15	$z'_c = -f'_c \cdot \beta'_c$	+	
16	$s_c = \bar{f}_c + z_c$	−	
17	$s'_c = f'_c + z'_c$	+	
18	p'_c	+	Se impune
19	$D_i = 2y_0 \frac{s'_c - p'_c}{f'_k}$	+	
20	$A_k = \frac{2y_0 A_0}{D_i}$	+	

Tabela 1 (continuare)

Nr. crt.	Parametrul de calculat	Semnul	Observaţii
21	$\beta'_k = \frac{2y_0}{D_i}$	−	
22	$z_k = -(s'_c - p'_c)$	−	
23	$z'_k = -f'_k \cdot \beta'_k$	+	
24	$s_k = \bar{f}_k + z_k$	−	
25	$s'_k = f'_k + z'_k$	+	
26	$p_c = \frac{p'_c \cdot f'_c}{f'_c - p'_c}$	+	
27	$P_{ic} = P_{ec} \frac{p_c}{p'_c}$	+	$P_{ec} = D_c = D_i$
28	$\operatorname{tg} \sigma_c = \frac{P_{ic}}{(s_c - p_c)} \rightarrow \sigma_c$	−	
29	$A_c = \sin \sigma_c$	−	
30	$\operatorname{tg} \sigma'_c = \frac{D_i}{-2z_k} \rightarrow \sigma'_c$	+	
31	$A'_c = \sin \sigma'_c$	+	
32	$\beta'_c = \frac{A_c}{A'_c}$	−	Relaţie de verificare (compară cu relaţia (12)
33	$D_k = 2y_0 + 2s'_k \operatorname{tg} \sigma_0$	+	$\sigma_0 = \sigma'_k$
34	$\operatorname{tg} \alpha = \frac{D_k - D_A}{2f'_k}$	−	
35	$D_{col} = D_i + 2p'_c \operatorname{tg} \alpha$	+	$= l_c + (P_{ic} - l_c) \frac{s_c}{s_c - p_c}$

Din figura 2 rezultă următoarele relații între elementele constructive ale dispozitivului :

$$D_A = l'_{c(C_1C_2)} = \frac{250}{f'_{c1}} \cdot \frac{f'_{c2}}{250} \cdot l_c. \tag{36}$$

$$2y_0 = D_c \cdot \frac{250}{f'_{c2}} \cdot \frac{f'_k}{250}, \tag{37}$$

$$f'_k = f'_{c2}, \tag{38}$$

$$\frac{D'_1}{D_i} = \frac{p_c}{p'_c}. \tag{39}$$

Dacă diafragma D_i este situată în planul principal al colectorului C_1, abscisa $p'_c = 0$ și deci $D'_i = D_i$. În această ipoteză rezultă

$$D_{col_1} = 2f'_{c1} \cdot \operatorname{tg} \sigma_c = D_c, \tag{40}$$

$$\operatorname{tg} \sigma_p = \frac{D_c}{2a} = \frac{D_A}{2f'_{c2}} \tag{41}$$

sau

$$D_A = 2f'_{c2} \cdot \operatorname{tg} \sigma_p, \tag{42}$$

$$D_C = 2a \operatorname{tg} \sigma_p, \tag{43}$$

$$A_0 = \sin \sigma_0 = \sin \sigma'_k = A'_k, \tag{44}$$

$$D_k = D_A + 2f'_k \cdot \operatorname{tg} \sigma_k, \tag{45}$$

$$\operatorname{tg} \sigma_c = \frac{D_A}{2f'_{c1}}, \tag{46}$$

$$\operatorname{tg} \sigma'_{c1} = 0 = \operatorname{tg} \sigma_{c2}, \tag{47}$$

$$\operatorname{tg} \sigma'_{c2} = \frac{D_c}{2f'_{c2}} = \operatorname{tg} \sigma_k = \frac{D_k}{2f'_k}, \tag{48}$$

$$\operatorname{tg} \sigma'_k = \frac{D_A}{2f'_k}. \tag{49}$$

Se înțelege că, și în acest caz, elementele de pornire sînt caracteristicile obiectivului și cele ale celorlalte elemente (spre exemplu ale colectorului, dacă acesta este cunoscut).

În figura 3 se vede propagarea luminii prin dispozitivul de iluminat folosit la iluminarea obiectelor mari cu aperturi de iluminare mici. Între elementele constructive există următoarele relații :

$$p' = \frac{p_c \cdot f'_c}{f'_c + p_c}, \tag{40}$$

$$D_c = 2f'_{c1} \operatorname{tg} \sigma_c = 2f'_{c3} \cdot \operatorname{tg} \sigma'_{c3}, \tag{41}$$

$$\frac{D'_c}{D_c} = \frac{p_c}{p'_c}, \tag{42}$$

$$D_A = l_c \frac{250}{f'_{c1}} \cdot \frac{f'_{c3}}{250} = l'_{c(C_1, C_2)}, \tag{43}$$

$$D_{0b} = D_A \frac{250}{f'_{c2}} \cdot \frac{f'_{ks}}{250}, \tag{44}$$

$$a \leqq f'_{c2} \tag{45}$$

$$D_{l'c(C_3C_2)} = D_c \frac{250}{f'_{c3}} \cdot \frac{f'_{c2}}{250}, \tag{46}$$

$$\operatorname{tg} \sigma_{pc} = \frac{D_A}{2f'_{c3}}, \tag{47}$$

$$D_{\text{col1}} = D_c + 2p'_c \operatorname{tg} \sigma_{pc}, \tag{48}$$

$$D_{\text{col3}} = D_A + D_C, \tag{49}$$

$$D_{\text{col2}} = D_A + D_C \frac{f'_{c2}}{f'_{c3}}, \tag{50}$$

$$s'_{ks} = \frac{f'_{ks} \cdot s_{ks}}{f'_{ks} + s_{ks}}. \tag{51}$$

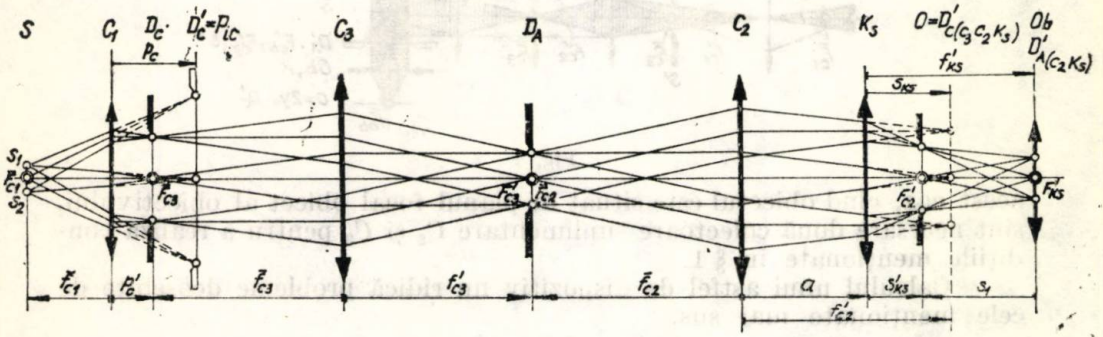


Fig. 3.

Pentru ca obiectul 0 să se găsească foarte aproape de condensorul special K_s trebuie ca abscisa s'_{ks} să fie foarte mică. Cînd $s'_{ks} = 0$ imaginea diafragmei de cîmp dată de colectoarele C_3 și C_2 se formează în planul condensorului special și deci se poate scrie :

$$2y_0 = D_{ks} = D'_{c(C_3, C_2)} = D_c \frac{f'_{c2}}{f'_{c3}}. \tag{52}$$

mai rezultă

$$D_{0b} = D'_{A(c_2, K_s)} = D_A \frac{250}{f'_{2c}} \cdot \frac{f'_{ks}}{250} \tag{53}$$

sau

$$D_{0b} = l''_c = l_c \frac{250}{f'_{c1}} \cdot \frac{f'_{c3}}{250} \cdot \frac{250}{f'_{c2}} \cdot \frac{f'_{ks}}{250} \tag{54}$$

și

$$a = f'_{c2} - \frac{f'_{ks} \cdot s'_{ks}}{f'_{ks} - s'_{ks}}, \tag{55}$$

$$\frac{2y_0}{l_c} = \frac{f'_{c3}}{f'_{c1}} \cdot \frac{f'_{c3}}{f'_{c2}} \approx 1. \tag{56}$$

Este evident că planul obiect trebuie să fie situat la o anumită distanță față de condensorul special K_s. Totodată este de remarcat faptul că acest dispozitiv nu îndeplinește riguros condiția iluminării telecentrice a obiectului.

Dispozitivul de iluminat Köhler se folosește și la iluminarea cu lumină incidentă (EPI) la diferite microscoape (fig. 4). Se observă că în

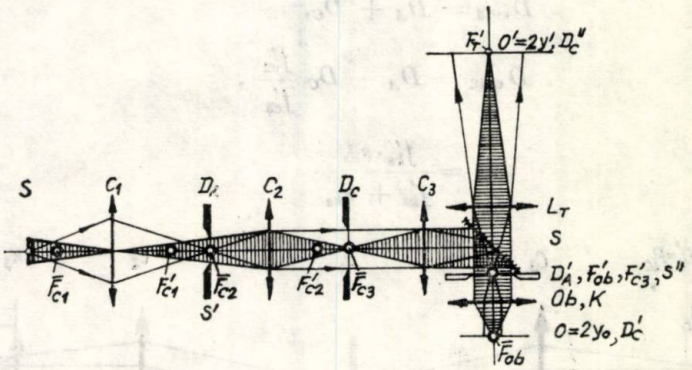


Fig. 4

acest caz, cînd obiectul este situat în planul focal obiect al obiectivului, sînt necesare două colectoare suplimentare C_2 și C_3 pentru a realiza condițiile menționate în § 1.

Calculul unui astfel de dispozitiv nu ridică probleme deosebite de cele menționate mai sus.

Primită la redacție la 7 iunie 1974

RECENZII

Gyrodynamics. Colocviul Euromech 38, Louvain la Neuve, Belgia, 3 — 5 sept. 1973. Editor P. Y. Williams. Springer, Berlin — Heidelberg — New York, 1974.

În carte se prezintă pe 280 pagini, 99 figuri, un număr de 35 de lucrări, majoritatea în limba engleză, 3 în limba germană şi 2 în limba franceză. Autorii provin din 9 ţări europene, Japonia, S.U.A. şi Israel, reprezentînd instituţii de învăţămînt superior, industria aeronautică şi spaţială, centre de cercetări cu profil de mecanică aplicată şi studii spaţiale.

Lucrările tratează diferite aspecte ale dinamicii corpurilor în rotaţie atît din punct de vedere teoretic, cît şi aplicativ.

Referatele se grupează pe următoarele teme:

— Teoria şi proiectarea instrumentelor de măsură şi control echipate cu giroscoape, în special în ceea ce priveşte acordarea dinamică a acestora.

— Probleme teoretice fundamentale ale dinamicii mişcării corpurilor în rotaţie, axate pe dinamica corpurilor flexibile, ecuaţii de mişcare neliniare, optimizarea mişcării.

— Arbori rotativi, cu accent pe comportarea neliniară, echilibrarea optimă a arborilor cotiţi, comportarea deformaţiei de forfecare, lagăruirea arborilor.

— Studii privind mişcarea navelor spaţiale şi a sateliţilor, analizînd influenţa deformaţiilor elastice, sisteme compuse din mai multe corpuri, prezenţa rezervoarelor de combustibil, stabilizarea mişcării şi echilibrul poziţiei.

Majoritatea lucrărilor sînt însoţite de referiri bibliografice cuprinzătoare.

Considerăm că această carte oferă cercetătorilor specializaţi în domeniile amintite posibilitatea de a se orienta asupra preocupărilor actuale pe plan mondial.

O. Gündisch

Constantin I. Staicu, Analiza dimensională generală. Ed. tehnică, Bucureşti, 1976, 206 pag.

Lucrarea aduce o contribuţie importantă la modul de prelucrare prin relaţii fizice a datelor experimentale, în cazul unor legături între un număr mai mare de mărimi fizice măsurabile. Pe baza unei examinări critice a analizei dimensionale cunoscută în etapa actuală şi pe care autorul o prezintă în prima parte a lucrării, se aduc o serie de completări şi de elemente noi, care au condus la o nouă teorie în acest domeniu, ce a fost numită de autor *analiză dimensională generală*.

În noua teorie, aspectele originale se referă la omogenizarea dimensională progresivă, soluţii inedite în rezolvarea sistemelor de ecuaţii nedeterminate de tip diofantic, la teorema valorilor exponenţilor de mărime, etc. Toate aceste contribuţii fac din analiza dimensională generală un instrument de studiu foarte util pentru practică. Cu ajutorul ei se pot obţine relaţii raţionale, de tip monom, omogene dimensional între variabilele măsurate, spre deosebire de analiza dimensională actuală, care conduce la produse de puteri fără dimensiuni şi numai în unele cazuri particulare se ajunge la relaţii raţionale de tip monom. De asemenea, cu ajutorul analizei dimensionale generale, se pot verifica diferite relaţii raţionale stabilite prin alte metode.

În primele două capitole, autorul face o examinare critică a analizei dimensionale actuale făcînd unele observaţii de principiu, pe baza cărora s-a dezvoltat noua teorie dimensională.

În capitolul al 3-lea se prezintă o serie de aplicații cu ajutorul analizei dimensionale actuale, referitor la calculul produselor de puteri fără dimensiuni, la relații între mărimi fizice stabile (influența temperaturii asupra viscozității unui gaz, vibrațiile unei stele) sau la relații între produse de puteri fără dimensiuni (intensitatea curentului electric într-o linie telegrafică, răcirea unui corp solid scufundat într-un curent de lichid). De asemenea, se prezintă modul cum se verifică o serie de relații fizice, dacă sînt corecte sau eronate.

Toate aceste aplicații sînt de un real folos cititorului, făcînd din această lucrare un instrument util de lucru atît pentru proiectanți, cît și pentru cercetători.

În capitolul al 4-lea se prezintă fundamentarea noii teorii, plecînd de la anumite întrebări pe care și le pune autorul pentru mărirea eficienței și a posibilităților de aplicare a analizei dimensionale.

În capitolul al 5-lea se concretizează bazele teoretice stabilite în capitolul anterior prin aplicarea noii analize dimensionale la o serie de cazuri practice, frecvent întîlnite în tehnică. Astfel, se prezintă aplicații privind relațiile între mărimi fizice regăsite (alungirea la solicitarea prin forță centrifugă, convenția liberă turbulentă pe o placă, în spațiu nelimitat) sau între mărimi fizice stabilite (magnetismul unui corp în rotație, diametrul picăturilor de lichid pulverizat, curgerea nepermanentă într-un puț, amortizarea undei termice etc.) și modul cum se face verificarea relațiilor fizice.

Lucrarea se remarcă printr-o ordonare progresivă a cunoștințelor, printr-o claritate a noțiunilor prezentate și cu o concretizare continuă a elementelor teoretice pe aplicații tehnice întîlnite în mod curent în activitatea experimentală. Datorită acestor însușiri, lucrarea poate fi consultată de un număr mare de cititori, chiar dacă nu au preocupări frecvente cu un instrument matematic modern.

Alexandru Vaicum

György Sitkei, Transfer de căldură și sarcini termice în mașini cu ardere internă. Akadémiai Kiadó, Budapest, 268p.

Cartea reprezintă o foarte cuprinzătoare expunere a unor fenomene și probleme de bază, care apar în funcționarea motoarelor cu ardere internă.

După prezentarea unor chestiuni fundamentale privind conducția termică, transferul de căldură prin convecție și radiația termică, autorul tratează pe larg procesele de transfer termic la pereții camerelor de ardere, pistoanelor, cilindrilor, suprafețelor de răcire, precum și principiile transferului în radiatoare.

În ultimele două capitole, se studiază încărcarea termică și tensiunile provocate de aceasta în diferitele componente ale motorului.

Lucrarea conține rezultatele unor cercetări recente pe plan mondial în domeniu. Metodele de calcul prezentate sînt ilustrate cu exemple concrete și practice. Autoul face adesea uz de rezultatele propriilor sale cercetări din ultimul timp, întreprinse la Universitatea tehnică din Budapesta.

Se remarcă în mod deosebit prezentarea și aplicarea unor tehnici foarte moderne de calcul, bazate pe metoda elementelor finite, cu ajutorul cărora sînt realizate cîteva probleme importante privind încărcarea termică a diferitelor părți de motor.

Lucrarea se bazează pe un bogat material bibliografic la zi. Se adresează în egală măsură specialiștilor din producție, cadrelor didactice, precum și cercetătorilor din institutele de profil; toți aceștia vor găsi un material bogat, pus la punct și foarte util activității lor tehnico-științifice.

D. Pantazopol

CHR. PELECUDI, D. TERME, N. MANAFI, S. CONONOVICI

SINTEZA GENERALĂ A MECANISMELOR PLANE PRIN METODA APROXIMAȚIILOR SUCCESIVE ASISTATĂ DE CALCULATORUL ELECTRONIC

Lucrarea tratează problema generală a sintezei mecanismelor plane prin metoda aproximațiilor succesive. Se alcătuiesc ecuațiile de proiectare pentru diferite metode clasice de sinteză. Acestea fiind neliniare, rezolvarea lor sub această formă este dificilă, de aceea se propune un procedeu de liniarizare a ecuațiilor. Rezolvarea acestora se realizează cu ajutorul unei metode iterative, prin aproximații succesive.
Se prezintă algoritmul pentru sinteza unui mecanism patrulater articulat de ghidare și un exemplu numeric realizat pe un calculator electronic.
Lucrarea a fost prezentată la Conferința Națională de Mecanică Aplicată, București, iunie 1969.

St. cerc. mec. apl., tom 35, nr. 4, 1976, p. 469—484
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

CRĂCIUN C., HOMENTCOVSCHI D., MASGRAS V.

STUDIU COMPARATIV AL VITEZELOR ȘI DEBITELOR DIN CONDUCTA PĂTRATĂ ȘI CIRCULARĂ PENTRU MIȘCAREA STRATIFICATĂ

Pentru curgerea stratificată a două lichide vîscoase, se calculează și se compară vitezele în puncte corespondente din conducta de secțiune pătrată și circulară.
Cunoscînd creșterile de debit produse prin procedeul de injecție în conducta pătrată ca și factorii care determină fenomenul, se apreciază că și în conducta circulară are loc o creștere de debit importantă. Evaluarea corectă a creșterii necesită în prealabil determinarea vitezelor sub o formă care să permită calculul debitelor.

St. cerc. mec. apl., tom 35, nr. 4, 1976, p. 485—496
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

B. DIMITROV, H.—A. LUEB, TH. G. F. SCHOON

CERCETĂRI PRIVIND COMPORTAREA CUPLEI CU CONTACT LINIAR ÎN REGIM DE FRECARE MIXTĂ

Se folosește ca instrument de cercetare al regimului lubrificației mixte o instalație tip Almen-Wieland (AWM) — automatizată, construită de autori la Institutul de chimie fizică al Universității din Würzburg (R.F. Germania). Cu ajutorul acesteia, se studiază diferite aspecte tribologice ale funcționării unei cuple de frecare cu contact liniar în prezența lubrifianților. Se evidențiază influența forței normale și a vitezei de creștere a încărcării cuplei, asupra evoluției coeficientului de frecare a acesteia.

St. cerc. mec. apl., tom 35, nr. 4, 1976, p. 497—513
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

DAN COȘA, CONSTANTIN PAVEL, GHEORGHE PAMFIL

STABILITATEA DEFORMAȚIEI PLANE SIMETRICE LA ÎNCOVOIERE A GRINZII „T" CU TALPĂ LATĂ

În evoluția procesului de industrializare a execuției construcțiilor s-a ajuns, în perioada ultimilor ani, la folosirea unor elemente din beton precomprimat de mare deschidere, cu secțiunea în T și talpa superioară lată și relativ subțire.
Pentru proiectarea lor rațională este necesar a se cunoaște cît mai exact modul de participare a tălpii la comportarea de ansamblu a grinzii.
În prezenta lucrare se analizează stabilitatea generală a grinzilor de acest tip pornind de la ipoteza că talpa comprimată se comportă ca o placă plană subțire, deformabilă în planul secțiunii transversale a elementului. Metoda propusă pentru calculul încărcării critice este mai exactă decît cele existente în literatura tehnică de specialitate și servește la studiul alcătuirii optime a grinzilor cu secțiune T avînd talpa superioară lată și relativ subțire.

St. cerc. mec. apl., tom 35, nr. 4, 1976, p. 515—530
Redacția: București, str. Const. Mille nr. 15

ŞTEFAN STAICU

METODE ENERGETICE PENTRU STUDIUL CIOCNIRILOR

Lucrarea prezintă cîteva metode energetice pentru studiul ciocnirii unui sistem de puncte materiale cu mai multe grade de libertate.
Astfel se demonstrează teorema energiei cinetice faţă de centrul maselor care serveşte pentru studiul ciocnirii sistemului material, în mişcarea sau în jurul centrului maselor.
În continuare se deduc ecuaţiile lui Lagrange în cazul fenomenului de ciocnire, introducîndu-se noţiunea de percuţie generalizată. Ca aplicaţie, pornind de la aceste relaţii, se deduc ecuaţiile ciocnirii rigidului liber în mişcarea generală.

St. cerc. mec. apl., tom 35, nr. 4, 1976, p. 531—538
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

LIVIU BRÎNDEU

DETERMINAREA PE CALE OPERAŢIONALĂ A MIŞCĂRILOR VIBROPERCUTANTE PERIODICE

Folosind calculul operaţional se dezvoltă o nouă metodă de a determina mişcările periodice ale unui sistem vibropercutant, direct din ecuaţiile diferenţiale ale mişcării. Se obţine astfel legea mişcării sub forma unei serii Fourier. Pentru exemplificare se ia un sistem vibropercutant format dintr-o masă aşezată liber pe o platformă vibrantă.

St. cerc. mec. apl., tom 35, nr. 4, 1976, p. 539—545
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

MIRCEA RADEŞ

COMPENSAREA MASELOR LA MĂSURAREA IMPEDANŢELOR MECANICE

Măsurarea precisă a forţei de excitaţie aplicate unei structuri, de la un vibrator — prin intermediul unui captor de forţe sau cap de impedanţe, a impus măsuri de „compensare a masei" elementelor situate între structură şi traductor. În lucrare se prezintă principiul compensării electrice şi analitice a maselor, precum şi o metodă grafică de compensare a impedanţei mecanice a unui vibrator la care se cunoaşte forţa electromagnetică şi care este legat mecanic direct de structură (fără captor de forţe).

St. cerc. mec. apl., tom. 35, nr. 4, 1976, p. 547—568
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

ADALBERT NAHLIK

METODA DINAMICĂ DE DETERMINARE A MODULELOR DE ELASTICITATE LONGITUDINALE ŞI TRANSVERSALE

În articol se dă soluţia ecuaţiei lui Timosenko, care descrie procesul vibratoriu al unei bare drepte de secţiune constantă şi liberă la capete, stabilindu-se astfel o relaţie dintre modulul de elasticitate longitudinal E şi frecvenţele proprii ale diferitelor forme de vibraţii transversale. Cu ajutorul unei instalaţii experimentale a fost determinată variaţia acestor frecvenţe proprii, deci şi a lui E, între 20—575°C pentru cîteva tipuri de oţel şi alamă folosite în construcţia turbinelor cu abur şi a turbogeneratoarelor. Pentru aceleaşi epruvete a fost stabilită şi variaţia frecvenţelor proprii de vibraţii de torsiune, deci şi a modulului de elasticitate transversal G.
La sfîrşitul articolului se dau cîteva aprecieri privind folosirea metodei dinamice descrise.

St. cerc. mec. apl., tom 35, nr. 4, 1976, p.569 — 576
Redacţia: Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15

A. TUDOR

CONSIDERAȚII ASUPRA UTILIZĂRII CALCULATORULUI ELECTRONIC NUMERIC ÎN VEDEREA DETERMINĂRII CONDIȚIILOR DE PREVENIRE A GRIPAJULUI ROȚILOR DINȚATE

Se prezintă parametrii de dependență ai gripajului roților dințate (ungerea, microgeometria flancului, temperatura instantanee) și corelarea acestora într-un algoritm, pentru a putea fi programat pe un calculator electronic.
Se adimensionalizează mărimile caracteristice de pe linia de angrenare, pentru a putea fi utilizat programul la proiectarea oricărui angrenaj modelabil într-unul cilindric cu dinți drepți.
Temperatura critică de distrugere a peliculei de ulei neaditivat se poate determina cu ajutorul indicelui de defect determinabil pe o instalație cu role sau Timken.

St. cerc. mec. apl., tom 35, nr. 4, 1976, p. 577 — 587
Redacția : București, str. Const. Mille nr. 15

IOAN CONSTANTINESCU, DAN GOLUMBOVICI

ASUPRA UNUI LIMBAJ DE PROGRAMARE PENTRU PRELUCRAREA REZULTATELOR MĂSURĂTORILOR TENSOMETRICE REZISTIVE

Se prezintă un algoritm de prelucrare statistică a rezultatelor măsurărilor efectuate cu traductoare rezistive în vederea determinării valorilor celor mai probabile ale alungirilor specifice măsurate și se enunță o metodologie de definire și analiză a erorilor care au afectat măsurările.
De asemenea, se prezintă instrucțiunile și structura generală a unui limbaj pentru programarea pe calculator a operațiilor de calcul corespunzătoare.

St. cerc. mec. apl., tom 35, nr. 4, 1976, p. 589 — 601
Redacția : București, str. Const. Mille nr. 15

PETRE DODOC

CONTRIBUȚII LA CALCULUL DISPOZITIVELOR DE ILUMINAT PENTRU MICROSCOAPELE DE CERCETARE MODERNE

În lucrare se precizează condițiile generale pe care trebuie să le satisfacă dispozitivele de iluminat ale microscoapelor moderne, se descrie construcția și funcționarea dispozitivului de tip Köhler și se indică metode de calcul pentru diferite dispozitive de iluminat folosite la microscoape.

St. cerc. mec. apl., tom 35, nr. 4, 1976, p. 603—610
Redacția : București, str. Const. Mille, nr. 15

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni).

● Referate ştiinţifice şi tehnice, la care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţii, orbite sincrone, astrorelative, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosfera densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase, primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille, nr. 15, sectorul 7.

LUCRĂRI APĂRUTE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

ŞT. ISPAS, ALEX. NICA, IOANA PÂRVULESCU, **Sisteme de lubrifiaţie, alimentarea cu carburant şi fluide hidraulice pentru construcţiile aerospaţiale**, 1976, 268 p., 32 lei.
VALENTIN I. VLAD, RADU ZACIU, JEAN MAURER, NICOLAE MIRON, DAN SPOREA, **Prelucrarea optică a informaţiilor**, 1976, 476 p., 46 lei.
ADOLF HAIMOVICI, **Ecuaţii diferenţiale cu funcţii de mulţime ca necunoscute**, 1976, 168 p., 8,75 lei.
CHR. PELECUDI, **Precizia mecanismelor**, 1975, 397 p., 32 lei.
A. C. VASILESCU, **Combaterea produşilor poluanţi emişi de motoarele autovehiculelor**, 1975, 288 p., 26 lei.
VLAD IONESCU, **Introducerea în teoria structurală a sistemelor liniare**, 1975, 236 p., 18 lei.
VLADIMIR RĂZVAN, **Stabilitatea absolută a sistemelor automate cu întîrziere**, 1975, 276 p., 17 lei.
B. GRÜNWALD, N. APOSTOLESCU, **Neomogenitatea termică şi chimică a gazelor din motoarele cu ardere internă**, 1975, 266 p., 26 lei.
ALEXANDRU VAICUM, **Fundaţii pentru construcţii energetice de distribuţie şi transport**, 1975, 314 p., 31 lei.
V. BĂNUŢ, HR. POPESCU, **Stabilitatea structurilor elastice**, 1975, 192 p., 13 lei.
GH. BUZDUGAN, LUCIA FETCU, M. RADEŞ, **Vibraţiile sistemelor mecanice**, 1975, 572 p., 41 lei.
O. ONICESCU, **Mecanica invariantă şi cosmologia**, 1974, 109 p., 6,75 lei.
EDMOND NICOLAU, **Introducere în electromagnetismul teoretic modern**, 1974, 241 p., 14 lei.
D. D. SANDU, **Electronica fizică**, 1973, 516 p., 31 lei.
VLAD IONESCU, **Sisteme liniare**, 1973, 228 p., 10 lei.
V. I. NITU, **Fiabilitatea instalaţiilor energetice**, 1973, 362 p., 208 lei.
BAZIL POPA, VIRGINIA ISCRULESCU, **Procese de ardere în cîmp sonor**, 1973, 265 p., 17 lei.
N. DĂNILĂ, **Centrale nucleare electrice**, 1973, 775 p., 52 lei.
G. MOISIL, **Controlul electric al coroziunii reţelelor subterane**, 1973, 240 p., 9,75 lei.
EDMOND NICOLAU, **Radiaţia electromagnetică**, 1973, 231 p., 10,50 lei.
M. MIŞICU, **Încovoiere şi torsiune**, 1973, 180 p., 20 lei.

Mai găsiţi în librării:

V. GIONCU, **Plăci curbe subţiri din beton armat**, 1974, 439 p., 28 lei.
VALENTIN I. VLAD, **Holografie**, 1973, 234 p., 15,50 lei.
M. M. NIŢĂ, **Teoria zborului spaţial**, 1973, 502 p., 30 lei.
MARIUS PROTOPOPESCU **Teoria electronică a metalelor**, 1973, 366 p., 33 lei.
I. S. GHEORGHIU, ALEXANDRU S. FRANSUA, **Tratat de maşini electrice**, vol. IV, **Maşini sincrone**, 1972, 482 p., 30 lei.
P. P. TEODORESCU, **Dinamica corpurilor liniar elastice**, 1972, 392 p., 24,50 lei.

REVISTE PUBLICATE ÎN EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ
REVUE ROUMAINE DES SCIENCES TECHNIQUES
— SÉRIE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE
— SÉRIE D'ÉLECTROTECHNIQUE ET D'ÉNERGETIQUE

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 35, NR. 4, 1976, P. 467–612

I. P. INFORMAŢIA c. 1416

43 822

Lei 40.–